

Valorisation de contrats gaziers

Principes et méthodes numériques classiques

Marie Bernhart, EDF R&D

Cours de l'ENPC, 25 février 2013

Le marché du gaz

Le marché du gaz est en mutation, depuis une quinzaine d'années déjà.

- Organisation globale du marché mondial en **3 marchés régionaux**
 - ▶ Amérique du Nord : US/Canada
 - ▶ Europe : Europe de l'Ouest/Russie, Norvège, Algérie
 - ▶ Asie : Japon/Indonésie, Middle East
- Ouverture des marchés de l'énergie en Europe
 - ▶ **3 directives européennes** : 1998, 2003, 2009
 - ▶ Nouveaux entrants, montée en concurrence
 - ▶ Compagnies gazières se diversifiant dans le domaine de l'énergie
 - ▶ Compagnies électriques investissant le domaine gazier
- **Régulation par le marché** : développement en Europe autour de différents hubs
- Les produits dérivés gaz, devenus des instruments d'arbitrage et de spéculation
- Diverses tensions sur l'offre et la demande en gaz en Europe
- Prix du gaz plus totalement expliqué par le pétrole
- **Augmentation de la volatilité des prix, pics de prix**

Dépendance de l'Europe aux importations : 65% in 2010 → 80% in 2030

- Production européenne (~35%) : champs de la Mer du Nord, Pays-Bas, Danemark
- Importations par pipelines de Russie (~25%), Norvège (~15%), Algérie (~8%)
- GNL (Gaz Naturel Liquéfié) livré aux terminaux d'Europe de l'Ouest et du Sud (~10%)

En France : **importation de la quasi-totalité** du gaz consommé (~500 TWh en 2010)

- Champ de Lacq épuisé, 98% du gaz importé
- dont 85% par pipelines de Russie (~18%), Norvège (~30%), Pays-Bas (~19%), Algérie (~15%) aux frontières allemande, belge et espagnole
- le reste en tant que GNL (3 terminaux méthaniers)

Consommation de gaz en France :

- 39 % : secteur résidentiel (chauffage)
- 38 % : industrie
- 16 % : secteur tertiaire (transport), 8 % : production énergétique

Qu'est-ce qu'un hub ?

- Un **point géographique ou une région** (hub virtuel), où les expéditeurs envoient/reçoivent du gaz et où les systèmes sont interconnectés (nœuds de pipelines). Il doit être possible de transférer facilement du gaz depuis et vers ce marché (IAE, 2008)
- Un **point commercial**, où les expéditeurs achètent/vendent du gaz. Il doit y avoir un usage pour le gaz : soit au travers d'une base de consommation significative, soit d'une demande d'autres marchés facilement accessibles (IAE, 2008).
- Comment mesurer **l'efficacité d'un hub** \Leftrightarrow sa liquidité, profondeur, maturité ?
 - ▶ Volumes tradés
 - ▶ Churn ratio = nombre de fois qu'une "parcelle" d'une commodité est tradée et re-tradée entre sa vente initiale par le producteur et son achat final par le consommateur
 - ▶ Churn ratio > 10 times \Rightarrow Marché efficient (OIES, 2011)
- Henry Hub : hub mature et liquide aux US
- 8 hubs en Europe en 2011

Les hubs gaziers en Europe

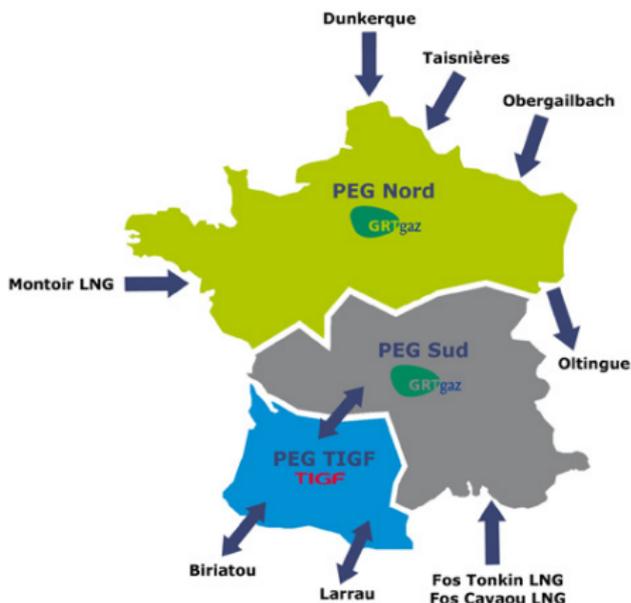
- **NBP (National Balancing Point)** : UK, depuis 1996, le plus efficient en Europe
- **TTF (Title Transfert Facility)** : Pays-Bas, depuis 2003, croissance rapide mais toujours $\sim 10\%$ NBP
- **Zeebrugge** : Belgique, depuis 2000, principal hub physique de trading, qui est étroitement lié au NBP
- **NCG (Net Connect Germany)** : Allemagne, depuis 2009, hub de trading virtuel
- **PEGs (Point d'Echange de Gaz)** : France, depuis 2004, hub virtuels mais seul le PEG Nord a une activité
- ...

Average daily traded volumes (GWh) on European gas hubs in 2010 (OIES)





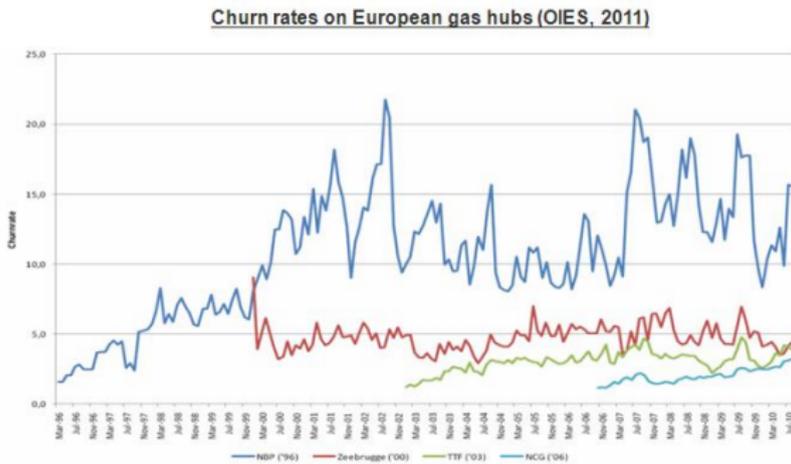
Main gas hubs and exchanges in NW Europe in 2011



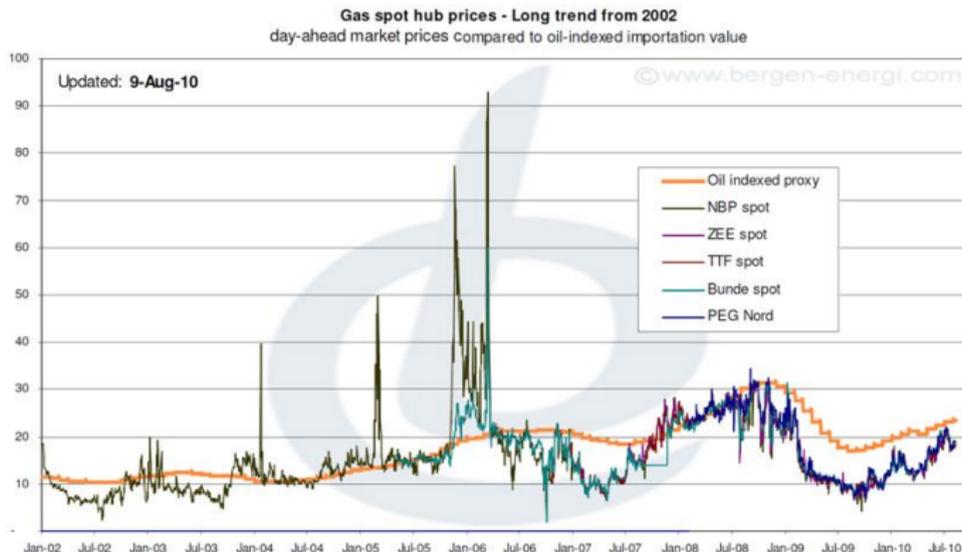
- En France, 3 zones d'équilibrage disposant d'un PEG (Point d'Echange de Gaz)
- PEG = point virtuel qui permet à deux utilisateurs du réseau (expéditeurs) de s'échanger des titres de propriété du gaz en conduite
- PEG \Rightarrow zone où chaque expéditeur est tenu d'être équilibré (injections = soutirages sur le réseau)

Globalement, il existe deux principale zones en Europe.

- **UK** : NBP est un hub de trading réellement efficient, 50% du gaz consommé est trading sur le NBP
- **Europe continentale** : le gaz est principalement échangé OTC, à travers des contrats de long terme



On observe une convergence des prix spot sur les différents hubs européens due aux interconnexions.

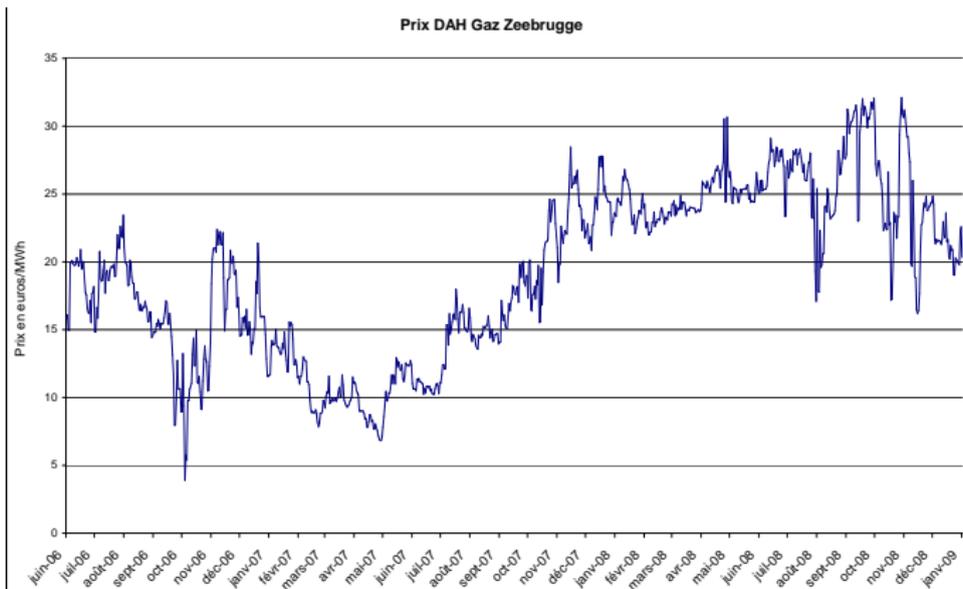


Development of European spot prices (Bergen Energi, Heren, 2010)

Le prix spot du gaz

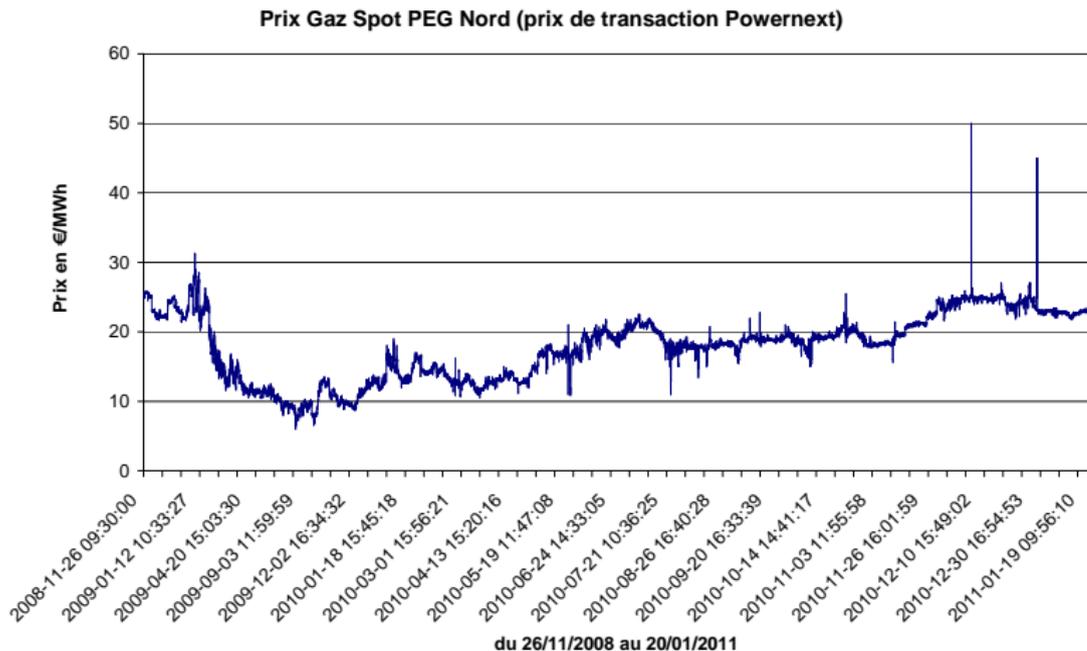
Spécificités du prix du gaz (1/3)

- Retour à la moyenne
- Saisonnalité multi-échelle



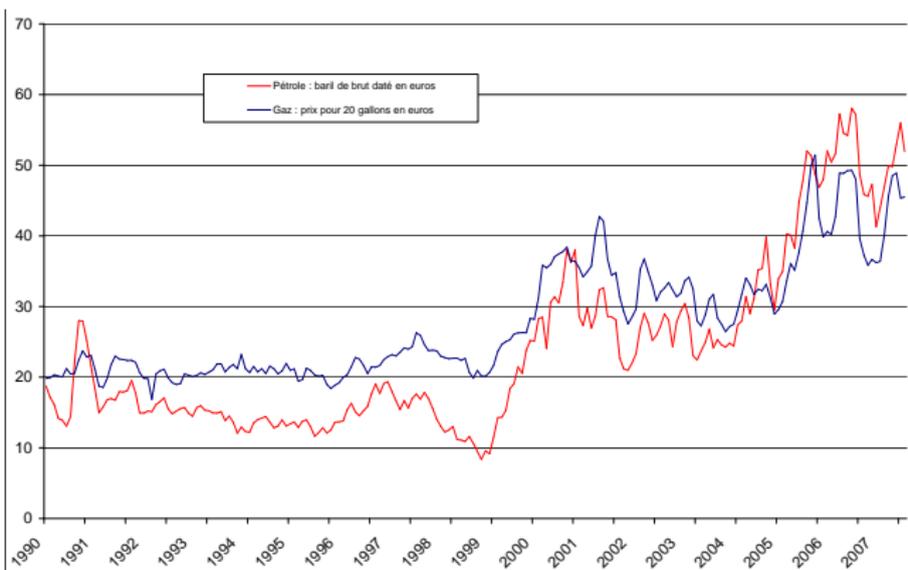
Spécificités du prix du gaz (2/3)

● Pics de prix



Spécificités du prix du gaz (3/3)

- Granularité journalière : le marché spot est quotidien (mensuel pour le pétrole, horaire pour l'électricité).
- Corrélation/cointégration au prix du pétrole (avec retard de trois à six mois)



Deux principaux contrats échangés sur le marché gazier :

- les contrats gaziers de type **Swing** : contrat optionnels de fourniture en gaz.
- les contrats de **stockage gaz** : investissement/location d'un actif physique,

La **valeur intrinsèque** de ces contrats peut être déterminée grâce aux courbes futures de prix du gaz et aux caractéristiques (déterministes) de ces contrats. Mais leur valeur extrinsèque dépend fortement des **conditions de marché**.

- Dans un marché des matières premières compétitif, les méthodes traditionnelles déterministes ne capturent pas la valeur économique de ces contrats.
- ⇒ Approche des **options réelles**
 - ▶ Le cadre des options réelles emprunte les idées de la théorie du pricing d'options financières classiques et voit un actif réel ou un projet d'investissement comme une option sur les revenus qu'il génère.
- Problèmes d'options réelles plus difficiles car font intervenir de la **flexibilité** mais également des **contraintes** opérationnelles/physiques.
- Modélisation maths fi. ⇒ Problèmes de **contrôle stochastique avec contraintes**.

Références

Evaluation de contrats Swing :

-  Bardou O., Bouthemy S. and Pagès G. (2009) : *Optimal quantization for the pricing of Swing options*, Applied Mathematical Finance, 16(2), pp. 183-217.
-  Bardou O., Bouthemy S. and Pagès G. (2007) : *When are Swing options bang-bang and how to use it ?*, International Journal of Theoretical and Applied Finance, 13(6), pp. 867-899.
-  Barrera-Esteve C., Bergeret F., Dossal C., Gobet E., Mezoui A., Munos R. and Reboul-Salze D. (2006) : *Numerical methods for the pricing of Swing options : a stochastic control approach*, Methodology and Computing in Applied Probability, 8(4), pp. 517-540.
-  Carmona R. and Touzi N. (2008) : *Optimal multiple stopping and valuation of Swing options*, Mathematical Finance, 18(2), pp. 239-268.
-  Jaillet P., Ronn E. I. and Tompaidis S. (2004) : *Valuation of Commodity-Based Swing Options*, Management science, 50(7), pp. 909-921.
-  A. Løland and O. Lindqvist O. (2008) : *Valuation of Commodity-Based Swing Options : A survey*, Technical report, Norwegian Computing Center.

Evaluation d'actifs de stockage gaz :

-  Davison M., Rasmussen H. and Thompson M. (2009) : *Natural Gas Storage Valuation and Optimization : A Real Options Application*, Naval Research Logistics, 56(3), pp. 226-238.
-  Boogert A. and de Jong C. (2008) : *Gas storage valuation using a Monte Carlo method*, Journal of Derivatives, 15(3), pp. 81-98.
-  Carmona R. and Ludkovski M. (2010) : *Valuation of Energy Storage : An Optimal Switching Approach*, Quantitative Finance, 10(4), pp. 359-374.
-  Chen Z. and Forsyth P. A. (2007) : *A Semi-Lagrangian Approach for Natural Gas Storage Valuation and Optimal Operation*, SIAM Journal on Scientific Computing, 30, pp. 339-368.
-  Warin X. (2010) : *Gas storage hedging*, Preprint.

Autres références :



Bernhart M., Tankov P. and Warin X. (2010) : *A finite dimensional approximation for pricing moving average options*, Preprint.



Bouchard B. (2007) : *Introduction to stochastic control of mixed diffusion processes, viscosity solutions and applications in finance and insurance*, Cours www.ceremade.dauphine.fr/~bouchard/pdf/PolyContSto.pdf.



F. Longstaff and E. Schwartz (2001) : *Valuing American options by simulation : A simple Least Squares approach*, Review of Financial Studies, 1(14), pp. 113-147.



Øksendal B. and Sulem A. (2007) : *Applied stochastic control of jump diffusions*, Universitext, Springer Verlag.

Un modèle de prix à 2 facteurs avec pics

Modèle à 2 facteurs (Gaussien et NIG) pour le gaz

$$\begin{aligned} F(t, T) &= F(t_0, T) \exp \left\{ M(t, T) + e^{-a_S(T-t)} X_t^S + e^{-a_L(T-t)} X_t^L \right\} \quad \forall t_0 \leq t \leq T \\ &= F(t_0, T) \exp \left\{ M(t, T) + \int_{t_0}^t \sigma_S(u) e^{-a_S(T-u)} dL_u + \int_{t_0}^t \sigma_L(u) e^{-a_L(T-u)} dW_u \right\} \end{aligned}$$

- Un facteur Gaussien : $X_t^L := \int_{t_0}^t \sigma_L(u) e^{-a_L(t-u)} dW_u$
- Un facteur non Gaussien : $X_t^S := \int_{t_0}^t \sigma_S(u) e^{-a_S(t-u)} dL_u$
- L , processus de Lévy de type NIG de paramètres $(\alpha, \beta, \delta, \mu)$ i.e. $L_1 \sim NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$
- Terme de dérive $M(t, T)$ tel que $(F(t, T))_t$ soit martingale.

Condition de dérive pour ce modèle

$$M(t, T) = - \int_{t_0}^t \left\{ \sigma_L^2(u) e^{-2a_L(T-u)} \right\} du + \int_{t_0}^t \left\{ -\mu \sigma_S(u) e^{-a_S(T-u)} \right. \\ \left. + \delta \left(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \sigma_S(u) e^{-a_S(T-u)})^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right) \right\} du$$

Modèle de prix spot induit par hypothèse de convergence :

$$S_t = \lim_{T \rightarrow t} F(t, T) \\ = F(t_0, t) \exp \left\{ M(t, t) + \int_{t_0}^t \sigma_S(u) e^{-a_S(t-u)} dL_u + \int_{t_0}^t \sigma_L(u) e^{-a_L(t-u)} dW_u \right\}$$

Contrats Swing

Contrats de fourniture optionnelle en gaz :

- compagnies de distribution voulant couvrir le risque de variation du prix du gaz,
- producteurs imposant contraintes sur la fourniture globale et flexibilité limitée.

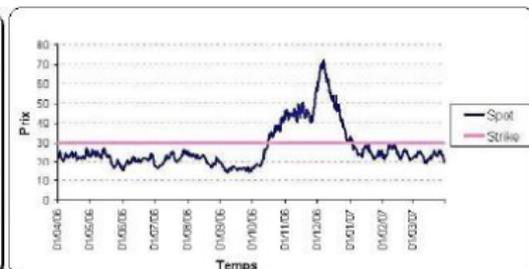
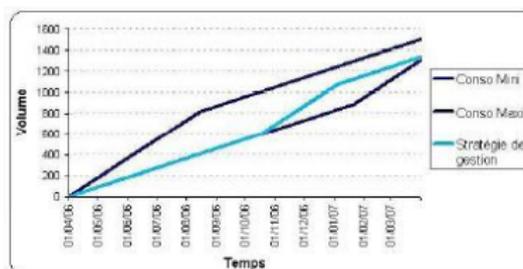
Contrats Swing, encore appelés **contrats de Take-or-Pay** ou **variable base-load** :

- Fourniture en gaz sur une période $[0, T]$:
 - ▶ contrats pluri-annuels, d'octobre à octobre,
 - ▶ tous les jours : dates pré-définies $\{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{N-1}\}$ ($t_N := T$).
- Flexibilité dans le volume d'achat du sous-jacent ("swing up" ou "swing down").
- Contraintes en volume globale : pénalités si non respect (clause de Take or Pay).
- Contrat Swing = **partie future** (base load) + **partie purement Swing**.
- Sous certaines hypothèses, les contrats Swing à volume variable se ramènent à des **options américaines à exercices multiples** : n_{\max} droits de tirage parmi N

Les contrats Swing correspondent à une **classe plus générale d'actifs structurés** sur les marchés de l'énergie :

- Contrats de fourniture à long terme avec contraintes
- Power tolling agreement incluant une optionnalité
- Options d'arrêt de service
- Contrats EJP (Effacement Jour de Pointe) : 22 jours en hiver
- Capacités de stockage (mais soutirage en gaz en sus)
- Actifs hydrauliques (mais apport hydraulique aléatoire)

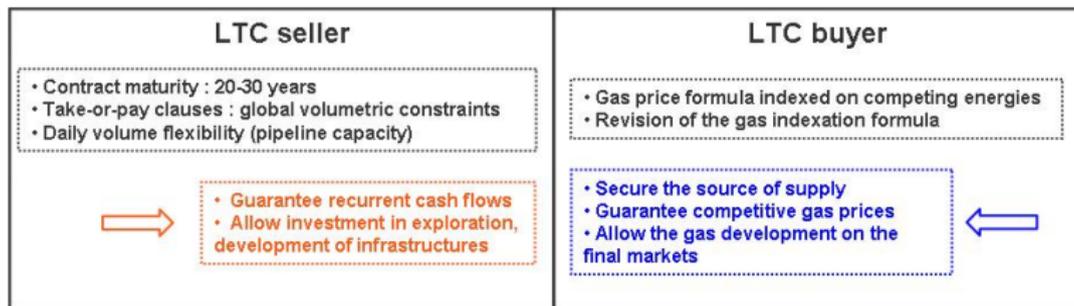
Exemple simple : Un négociant s'engage auprès d'un producteur de gaz sur 1 an à lui acheter tous les jours un volume $\in [q_{\min}, q_{\max}]$ à un prix unitaire fixé \bar{X} et à acquérir un volume total $\in [Q_{\min}, Q_{\max}]$.



Contrat Swing avec strike \bar{X} fixe

Remarque : La stratégie optimale n'est pas nécessairement de **type bang-bang**.

- Le vendeur du contrat Swing (producteur de gaz) prend le **risque prix**.
 - ▶ Le prix du gaz est fixé par une "formule", indexée sur les prix des énergies concurrentes : principe du "Net Back".
- L'acheteur du contrat (fournisseur de gaz) prend le **risque volume**.
 - ▶ Le volume de gaz consommé est soumis à des contraintes/pénalités imposées par le vendeur : clauses de "Take-or-Pay".



On note q_t , le **volume de gaz acheté** à la date t et S_t , le prix du gaz sur le marché spot.

Principales caractéristiques d'un contrat Swing

- Payoff en toute date t (option d'achat) :

$$q_t (S_t - \bar{X}_t) \quad \text{où le **prix d'exercice** } \bar{X}_t \text{ est appelé "prix du contrat".}$$

- Minimal and maximal Daily Contract Quantity (DCQ) :

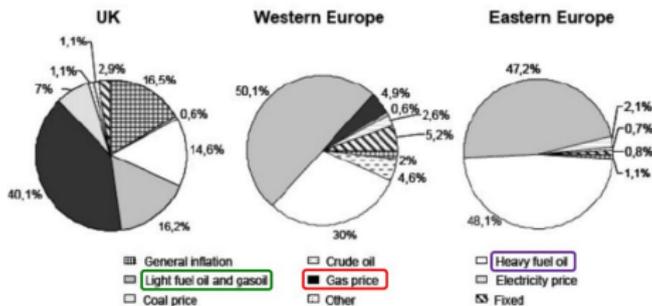
$$\text{contrainte locale sur les quantités : } q_{\min} \leq q_t \leq q_{\max}.$$

- Minimal and maximal Annual Contract Quantity (ACQ) :

$$\text{contrainte sur la fourniture globale } Q_T = \sum_{n=0}^{N-1} q_{t_n} : Q_{\min} \leq Q_T \leq Q_{\max}.$$

Le **prix du gaz** \bar{X} est donné par une formule d'indexation.

- **Principe du Net Back** : mécanisme consistant à valoriser le gaz en relation au prix des énergies concurrentes
- Permet de développer la consommation de gaz en Europe, en maintenant la **compétitivité du prix du gaz** sur le marché final
- Substitution Gaz/Pétrole \Rightarrow **indexation sur produits pétroliers** : gasoil (usage domestique), fuel oil (industrie)
- Révision tous les 3 ans environ (GDF-Suez/Gazprom, Statoil : 2010, 2013)



Indexation in European gas contracts by purchasing region (2007)

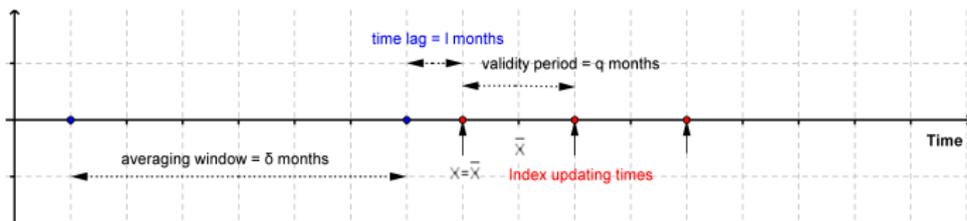
\bar{X} est un **index de prix de diverses matières premières** :

$$\bar{X}_t = K + \sum_{i=1}^d \alpha_i \bar{X}_t^i$$

On parle de contrats Swing **indexés**.

- K est un prix fixe (part fixe de la livraison).
- $S^i, \forall i = 1, \dots, d$ sont les prix des commodities intervenant dans l'index, généralement : gas oil, fuel oil, charbon
- α_i est un point attribué à chaque commodity i (facteur de conversion et de pondération).
- \bar{X}^i correspond à la moyenne du prix S^i sur les δ mois, précédant les l derniers mois précédant la dernière date de mise à jour de l'index :
 - ▶ δ est la **taille de la fenêtre de moyennisation**,
 - ▶ l , le **retard en temps** ou délai,
 - ▶ q , la **période de validité** : \bar{X}^i reste valide pendant q mois.

Exemple : Typiquement, le triplet (δ/lq) vaut en en mois (601), (301), (511).



Mathématiquement,

$$\bar{X}_t = K + \sum_{i=1}^d \alpha_i \bar{X}_t^i,$$

$$\bar{X}_t^i = X_{\varphi_q(t)}^i, \quad X_t^i = \frac{1}{\delta} \int_{t-l-\delta}^{t-l} S_r^i dr, \quad \forall t \geq \delta + l,$$

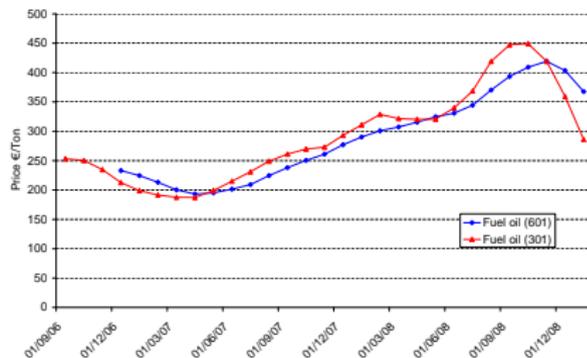
avec $\varphi_q(t) := q \lfloor t/q \rfloor$, dernière date de mise à jour de l'index avant la date t .

On dit que X^i est un **processus de moyenne mobile**.

Exemple : Prix du fuel Juin 2006-Janvier 2009 observés sur le marché ARA (Amsterdam-Rotterdam-Anvers) de prix pétroliers pour l'Europe de l'Ouest :



Prix DaH du fuel



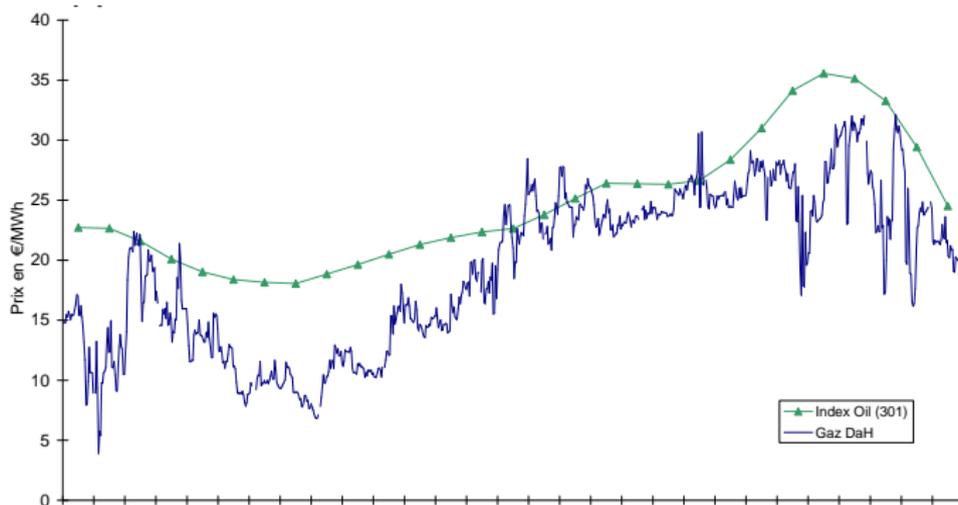
MM de type (601) et (301)

Les moyennes mobiles **lissent les variations des prix** intervenant dans l'index : la volatilité de l'index diminue quand la période de moyennisation δ augmente.

Exemple : Strike \bar{X} indexé sur les prix du fuel S^{fo} et du gas oil S^{go} avec :

$$\bar{X}_t = 2.5 + 0.025\bar{X}_t^{fo} + 0.030\bar{X}_t^{go}.$$

Index de type (301) avec prix pétroliers observés sur le marché ARA et prix du gaz sur le marché Zeebrugge Juin 2006-Janvier 2009.



On suppose que le prix du gaz S et les prix $S^i, i = 1, \dots, d$ sont des processus de Markov défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \leq T}$ la filtration générée par $\{S, S^1, \dots, S^d\}$.

Chaque processus $X^i, i = 1, \dots, d$ admet comme dynamique :

$$dX_t^i = \frac{1}{\delta} \left(S_{t-l}^i - S_{t-l-\delta}^i \right) dt, \quad \forall t \geq \delta + l.$$

\implies Le processus (S^i, X^i) n'est pas Markovien.

Remarque 1 : A temps continu, la dynamique des X^i est de **dimension infinie**.

Remarque 2 : Pour une option asiatique, le payoff dépend d'une moyenne

$$A_t = \frac{1}{\delta} \int_0^t S_u du \quad \text{tel que} \quad dA_t = \frac{1}{t} (S_t - A_t) dt$$

de sorte que (S, A) est Markov.

Notons N_δ (resp. N_l), le nombre de pas de temps de la fenêtre de moyennisation δ (resp. du délai l). Les moyennes mobiles sont calculées comme des moyennes arithmétiques :

$$X_{t_n}^i = \frac{1}{N_\delta} \sum_{k=n-N_l-N_\delta}^{n-N_l-1} S_{t_k}, \quad n \geq N_\delta + N_l.$$

Variables d'état du problème (S, X, Q) avec

$$X_{t_n} := \prod_{i=1}^d \left(S_{t_n-N_l-1}^i, \dots, S_{t_n-N_l-N_\delta}^i \right), \quad n \geq N_\delta + N_l.$$

\implies Le problème est de dimension $2 + d \times (N_\delta + N_l)$.

En pratique :

- Pour simplifier la résolution, l'index \bar{X} est généralement pris **déterministe** i.e. exogène au système \implies état (S, Q) .
- On peut faire une **approximation non-Markovienne** \implies état (S, \bar{X}, Q) . Malgré sa sous-optimalité, cette approximation est acceptable, cf. Bernhart et al. (2010).

Problème de pricing d'un contrat Swing

A la date $t = t_n$, étant donné un prix initial $S_t = s$, une valeur initiale $X_t = \bar{x}$ et un volume initial (conso. initiale) $Q_t = \varrho$, le prix du contrat Swing s'écrit

$$v(t, s, \bar{x}, \varrho) = \sup_{q \in \mathcal{Q}_t} \mathbb{E} \left[\sum_{k=n}^{N-1} e^{-r(t_k-t)} q_{t_k} (S_{t_k} - \bar{X}_{t_k}) \mid \mathcal{F}_t \right],$$

$$Q_T = \varrho + \sum_{k=n}^{N-1} q_{t_k} \in [Q_{\min}, Q_{\max}],$$

$$\mathcal{Q}_t = \left\{ q = (q_{t_k})_{k=n, \dots, N-1} : \begin{array}{l} q_{t_k} \text{ v.a. } \mathcal{F}_{t_k}\text{-mesurable} \\ \text{telle que } q_{\min} \leq q_{t_k} \leq q_{\max} \end{array} \right\}.$$

Remarque : Pénalités à échéance si les contraintes globales ne sont pas fermes :

$$g(Q_T) = -\beta_{\max} (Q_T - Q_{\max})^+ - \beta_{\min} (Q_{\min} - Q_T)^+,$$

et $\beta_{\max} = \beta_{\min} \rightarrow +\infty \Leftrightarrow$ contraintes fermes.

Pour le pricing, on se ramène à un problème d'options Swing normalisé :

Contrat Swing = **partie ferme** (base load) + **partie pûrement Swing**.

Normalisation du contrat \Leftrightarrow Chgt de variable $q = q_{\min} + (q_{\max} - q_{\min}) \tilde{q}$:

- Achat de quantités de gaz $\tilde{q} \in [0, 1]$: commandes admissibles \tilde{Q} ,
- Consommation initiale normalisée $\tilde{\varrho} = \varrho / (q_{\max} - q_{\min})$,
- Fourniture globale $\tilde{Q}_T = \tilde{\varrho} + \sum_{k=n}^{N-1} \tilde{q}_{t_k}$ telle que

$$\tilde{Q}_T \in \left[\tilde{Q}_{\min} := \frac{Q_{\min} - (N - n) q_{\min}}{q_{\max} - q_{\min}}, \tilde{Q}_{\max} := \frac{Q_{\max} - (N - n) q_{\min}}{q_{\max} - q_{\min}} \right].$$

De sorte que en $t = t_n$,

$$v(t, s, \vec{x}, \varrho) = q_{\min} \underbrace{\mathbb{E} \left[\sum_{k=n}^{N-1} (S_{t_k} - \bar{X}_{t_k}) \middle| \mathcal{F}_t \right]}_{= \text{contrat Swap ferme}} + (q_{\max} - q_{\min}) \underbrace{\sup_{\tilde{q} \in \tilde{Q}_t} \mathbb{E} \left[\sum_{k=n}^{N-1} \tilde{q}_{t_k} (S_{t_k} - \bar{X}_{t_k}) \middle| \mathcal{F}_t \right]}_{= \text{Swing normalisé}}.$$

Exemple : Contraintes d'un contrat Swing gazier Octobre 2010-Octobre 2011 avec un volume quotidien de référence = 6000 MWh.

Périodes	max ACQ Q_{\max}	min ACQ Q_{\min}	max DCQ q_{\max}	min DCQ q_{\min}
01/10/10-01/04/11	2 150 000	1 900 000	6000 (100%)	1800 (30%)
01/04/11-01/10/11	2 150 000	1 900 000	6000 (100%)	3600 (60%)

La normalisation donne :

Périodes	N (jours)	Conso. minimale = Nq_{\min}	\bar{Q}_{\max}	\bar{Q}_{\min}
01/10/10-01/04/11	182	327 600	177.25	147.57
01/04/11-01/10/11	183	658 800	174.64	122.42

- **Contrat ferme** (aucune optionnalité) : simple contrat future qui garantit que le vendeur doit délivrer une quantité minimale de gaz aux dates t_k , $k < N$.
- \Rightarrow Pricing du **contrat Swing normalisé**.

Pricing du contrat Swing normalisé :

$$\tilde{v}(t, s, \vec{x}, \tilde{\varrho}) = \sup_{\tilde{q} \in \tilde{\mathcal{Q}}_t} \mathbb{E} \left[\sum_{k=n}^{N-1} e^{-r(t_k-t)} \tilde{q}_{t_k} (S_{t_k} - \bar{X}_{t_k}) \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Notation : Pour alléger, on renomme \tilde{v} en v , \tilde{q} en q , etc.

Deux possibilités :

- 1 Discrétiser l'espace des commandes admissibles i.e.

$$q_t \in \{0, \Delta q, \dots, 1 - \Delta q, 1\}$$

et donc des consommations cumulées admissibles (cf. résolution du pb. de stockage). Résoudre le problème sur cette grille \Rightarrow plus coûteux numériquement.

- 2 Utiliser les résultats de Bardou et al. (2007) : sous certaines hypothèses, la stratégie optimale est de type "bang-bang" i.e.

$$q_t^* \in \{0, 1\}.$$

1 Première approche : Résolution avec **discrétisation des commandes**.

À la date $t < T$, à tout point dans la grille des consommations cumulées $\varrho \in \mathcal{A}$ est associé un ensemble de commandes admissibles $\mathcal{A}(t, \varrho) \subset [0, 1]$.

En faisant l'**approximation non-Markovienne** consistant à considérer un état (S, \bar{X}, Q) , le PPD s'écrit sur la grille en temps $\{t_0, t_1, \dots, t_{N-1}, T\}$:

$$\begin{cases} v(T, s, x, \varrho) &= 0 \\ v(t_n, s, x, \varrho) &= \max_{q \in \mathcal{A}(t_n, \varrho)} \{ q(s - x) \\ &\quad + e^{-r\Delta t_{n+1}} \mathbb{E} [v(t_{n+1}, S_{t_{n+1}}, \bar{X}_{t_{n+1}}, \varrho + q | \mathcal{F}_{t_n})] \} \\ q^*(t_n, s, x, \varrho) &= \arg \max_{q \in \mathcal{A}(t_n, \varrho)} \{ \text{idem} \} \end{cases}$$

où $\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ et $\mathbb{E}[\cdot | \mathcal{F}_{t_n}] \approx \mathbb{E}[S_{t_n} = s, \bar{X}_{t_n} = x, Q_{t_n} = \varrho]$.

Méthodes de résolution :

- Monte-Carlo ou arbres : Jaillet et al. (2004), Barrera-Esteve et al. (2006), etc.
- Approche par quantification : Bardou et al. (2009).

2 Deuxième approche : Avec **propriété bang-bang de la stratégie optimale**.

⇒ On se ramène alors au pricing d'**options américaines multi-exercice**.

Propriété bang-bang de la stratégie optimale du problème de Swing

Considérons le problème de Swing normalisé en 0 (avec $Q_0 = 0$). On note son prix v_0 . On rappelle que $N \in \mathbb{N}^*$ est le nombre des dates d'exercices possibles. Si

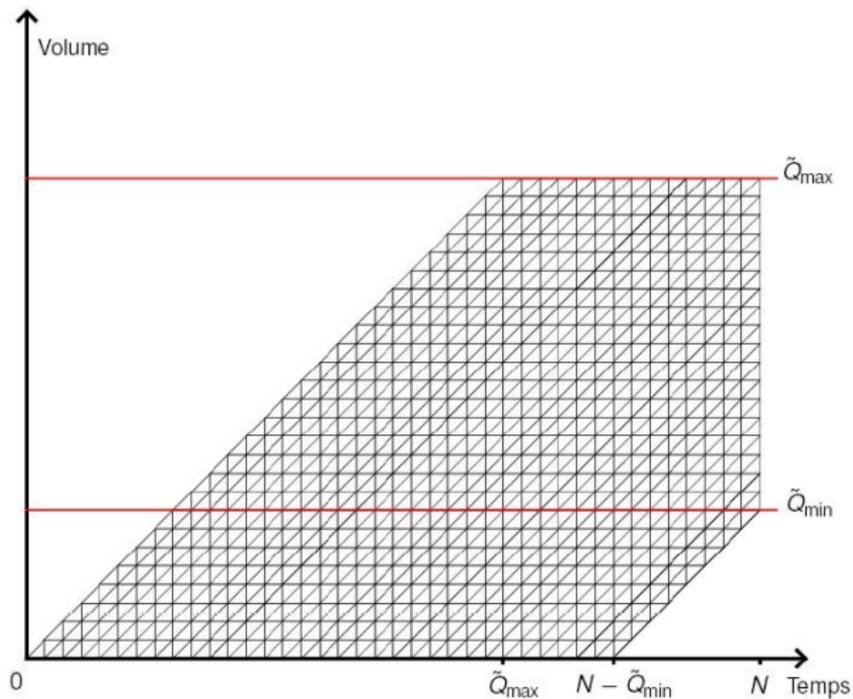
$$(Q_{\min}, Q_{\max}) \in \mathbb{N}^2 \quad \text{et} \quad 0 \leq Q_{\min} \leq Q_{\max} \leq N,$$

alors il existe une stratégie optimale $q^* := (q_{t_k}^*)_{k=0, \dots, N-1}$ de type bang-bang i.e.

$$q_{t_k}^* \in \{0, 1\}, \quad \forall k = 0, \dots, N-1.$$

- Si $(Q_{\min}, Q_{\max}) = (0, 0)$, alors $v_0 = 0$.
- Si $(Q_{\min}, Q_{\max}) = (N, N)$, alors $v_0 = \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{N-1} (S_{t_k} - \bar{X}_{t_k}) \right]$.
- Si $(Q_{\min}, Q_{\max}) = (0, N)$, alors $v_0 = \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{N-1} (S_{t_k} - \bar{X}_{t_k})^+ \right]$.

En pratique, $(Q_{\min}, Q_{\max}) \in \mathbb{R}^2, 0 < Q_{\min} \leq Q_{\max} < N$: cf. exemple donné plus haut.



Ensemble des consommations cumulées atteignables

- Pour le pricing du contrat Swing, on se restreint aux stratégies bang-bang :

$$q_t \in \{0, 1\}.$$

- Comme v est **concave et affine par morceaux** en les contraintes (Q_{\min}, Q_{\max}) , cf. Bardou et al. (2007), cela permet de calculer v pour toute valeur des contraintes dans \mathbb{R}^2 .

Le PPD écrit précédemment pour $q \in [0, 1]$ s'écrit maintenant

$$\left\{ \begin{array}{l} v(T, s, x, \varrho) = 0 \\ v(t_n, s, x, \varrho) = \max_{q \in \{0,1\}} \{ q(s-x) \\ \quad + e^{-r\Delta t_{n+1}} \mathbb{E} [v(t_{n+1}, S_{t_{n+1}}, \bar{X}_{t_{n+1}}, \varrho + q | \mathcal{F}_{t_n})] \} \\ = \max \{ (s-x)^+ + e^{-r\Delta t_{n+1}} \mathbb{E} [v(t_{n+1}, S_{t_{n+1}}, \bar{X}_{t_{n+1}}, \varrho + 1 | \mathcal{F}_{t_n})] ; \\ \quad + e^{-r\Delta t_{n+1}} \mathbb{E} [v(t_{n+1}, S_{t_{n+1}}, \bar{X}_{t_{n+1}}, \varrho) | \mathcal{F}_{t_n}] \} \end{array} \right.$$

où $\mathbb{E}[\cdot | \mathcal{F}_{t_n}] \approx \mathbb{E} [| S_{t_n} = s, \bar{X}_{t_n} = x, Q_{t_n} = \varrho]$.

Variable de volume $Q_{t_n} \Leftrightarrow$ Nombre de droits d'exercice utilisés jusqu'à la date t_n .

- Posons $n_{\min} = Q_{\min}$ et $n_{\max} = Q_{\max}$
- On doit optimiser le placement d'au moins n_{\min} et au max. n_{\max} dates d'exercice parmi les N possibles.
- \Rightarrow Problème d'**option américaine à multi-exercice** ou option Swing standard.

Le problème de Swing normalisé en 0 se réécrit :

$$v_0 = \sup_{(\tau_k)_{k \geq 1} \in \mathcal{T}^{(n_{\min}, n_{\max})}} \mathbb{E} \left[\sum_{k \geq 1} e^{-r\tau_k} (S_{\tau_k} - \bar{X}_{\tau_k})^+ \right]$$

$$\mathcal{T}^{(n_{\min}, n_{\max})} = \left\{ (\tau_k)_{k \geq 1} : \begin{array}{l} \tau_k \text{ est un } \mathbb{F}\text{-temps d'arrêt} \in \{t_0, t_1, \dots, t_{N-1}\} \\ \tau_k < \tau_{k+1}, \forall k \geq 1 \\ n_{\min} \leq \#\{k \geq 1, \tau_k < T\} \leq n_{\max} \end{array} \right\}.$$

\hookrightarrow Une nouvelle variable va intervenir (remplaçant la conso. cumulée Q) : il s'agit du nombre de droits d'exercice restant à utiliser.

Une **option Swing standard** donne le droit (et non l'obligation) d'acheter ou de vendre au maximum n_{\max} fois avant une date T (maturité de l'option) un sous-jacent S à un prix d'exercice spécifié.

Propriétés d'une option Swing standard

- 1 Si $n_{\max} = 1$ (un seul droit d'exercice) :
 - ▶ A temps continu \Rightarrow Option Swing = Option américaine
 - ▶ A temps discret \Rightarrow Option Swing = Option bermudéenne
et Valeur option bermudéenne < option US.

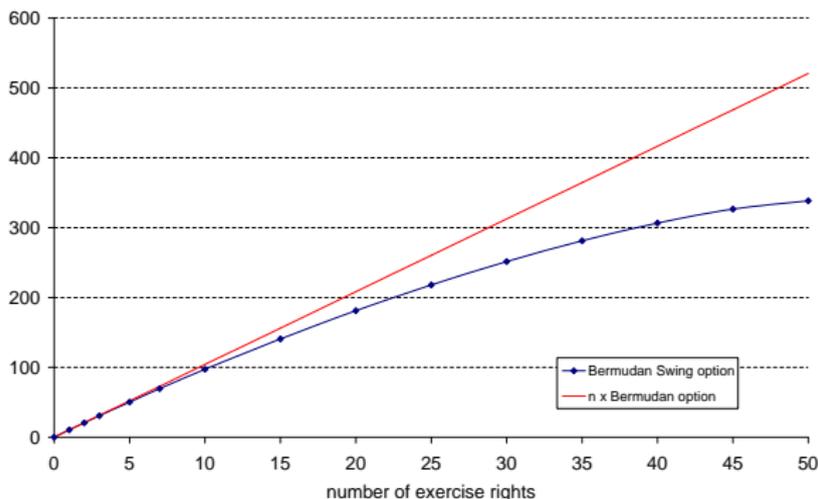
- 2 Borne supérieure dans le cas de $n_{\max} \geq 1$ droits d'exercice :

$$\text{Valeur option Swing} \leq n_{\max} \text{ Options US identiques}$$

- 3 Borne inférieure dans le cas de $n_{\max} \geq 1$ droits d'exercice, à temps discret :

$$\text{Valeur option Swing} \geq \max_{\mathcal{N} : n_{\max}} \sum_{t_n \in \mathcal{N}} \text{Options EU d'échéance } t_n$$

Exemple : Dans le modèle de BS, $\sigma = 0.30$ et $r = 0.05$ avec \bar{X} déterministe.



Prix d'une option Swing fonction du nombre d'exercices n_{\max}

La valeur de l'option Swing à n_{\max} droits d'exercice (option d'achat) s'écrit en t :

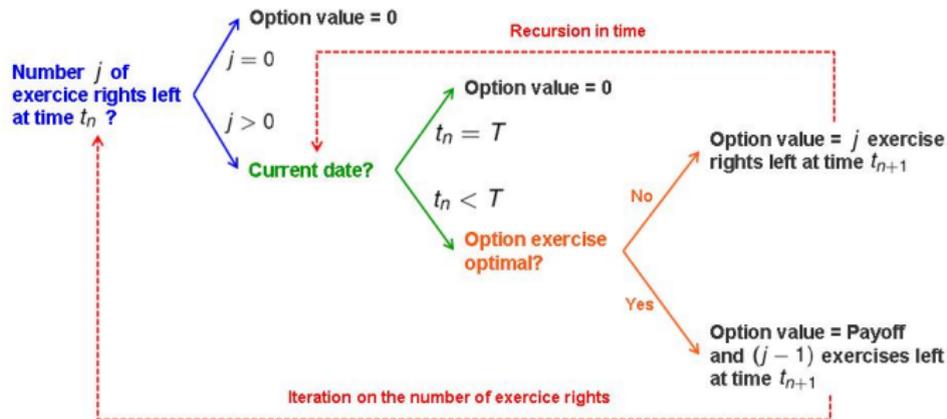
$$v^{(n_{\max})}(t, s, \bar{x}) = \sup_{(\tau_k)_{k \geq 1}} \mathbb{E} \left[\sum_{k \geq 1} e^{-r(\tau_k - t)} (S_{\tau_k} - \bar{X}_{\tau_k})^+ \mid \mathcal{F}_t \right]$$

PPD à temps discret :

- Récursion backward en temps : $n = N, N - 1, \dots, N_\delta + N_l$
- Itération forward sur le nombre de droits d'exercice $j = 0, \dots, n_{\max}$

$$\begin{cases} v^{(0)}(t_n, s, x) = 0, \quad \forall (n, s, x) \\ v^{(j)}(T, s, x) = 0 \\ v^{(j)}(t_n, s, x) = \max \{ \text{appliquer son } j^{\text{e}} \text{ exercice en } t_n ; \text{ ne pas exercer en } t_n \} \\ \quad = \max \{ (s - x)^+ + e^{-r\Delta t_{n+1}} \mathbb{E} [v^{(j-1)}(t_{n+1}, S_{t_{n+1}}, \bar{X}_{t_{n+1}}) \mid \mathcal{F}_{t_n}] ; \\ \quad \quad + e^{-r\Delta t_{n+1}} \mathbb{E} [v^{(j)}(t_{n+1}, S_{t_{n+1}}, \bar{X}_{t_{n+1}}) \mid \mathcal{F}_{t_n}] \} \end{cases}$$

avec $\mathbb{E} [\cdot \mid \mathcal{F}_{t_n}] \approx \mathbb{E} [\cdot \mid S_{t_n} = s, \bar{X}_{t_n} = x]$.



PPD à temps discret pour les options Swing

⇒ Différentes méthodes numériques possibles :

- Résolution par arbres ⇒ Forêt d'arbres, cf. Jaillet et al. (2004)
- Méthode Monte Carlo, cf. Carmona et Touzi (2008), Barrera-Esteve et al. (2006)
- Méthode par quantification, cf. Bardou et al. (2009)

Contrats de stockage gaz

Pourquoi faire du stockage ?

1 Raisons physiques et économiques

- ▶ Réponse à une demande en gaz très variable (été/hiver) et inélastique
- ▶ Capacité d'approvisionnement limitée par les gazoducs
- ▶ Stockages proches des sites de consommation : accessibilité en cas de forte demande
- ▶ Réduction de la dépendance des fournisseurs aux producteurs

2 Raisons réglementaires

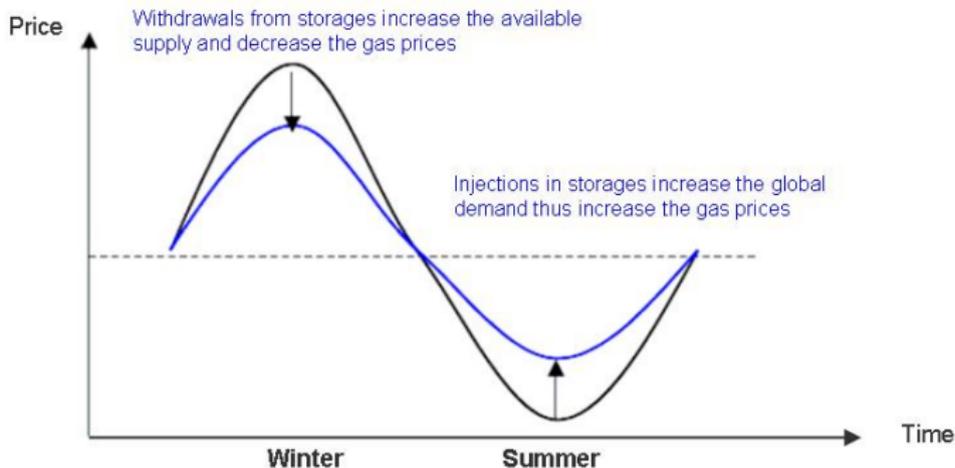
- ▶ Obligation pour les compagnies de distribution d'avoir des capacités de stockage pour sécuriser la fourniture en période de forte demande

3 Raisons financières

- ▶ Tirer profit des arbitrages possibles entre été/hiver ou même week-end/jour de semaine
- ▶ Exploiter les opportunités de marché : injecter du gaz dans le stockage quand il est moins cher sur le marché spot et en soutirer dans les périodes où il est plus cher

Le stockage a un rôle stratégique pour les fournisseurs :

- Les compagnies de fourniture stockent un volume supplémentaire de gaz (issu des importations).
- Ce stock buffer permet de couvrir une partie du risque prix (forte demande non prévue).

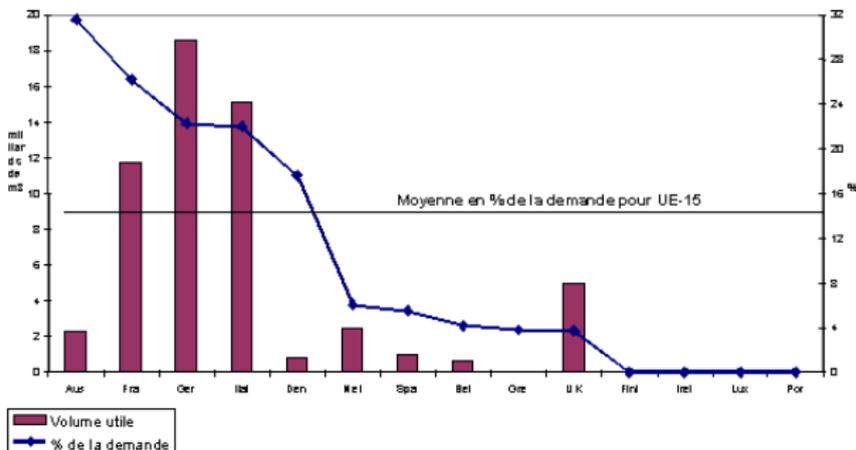


Effet du stockage sur le spread été-hiver

Le stockage de gaz est largement utilisé en Europe :

- L'Autriche, la France, l'Allemagne et l'Italie (non producteurs) détiennent plus de 22 % de leur demande annuelle sous forme de stocks (2007).
- Le Danemark, les Pays-Bas et le Royaume-Uni (pays producteurs) utilisent la capacité de "swing" (production limitée l'été et maximisée l'hiver).

Les stockages gaziers en Europe



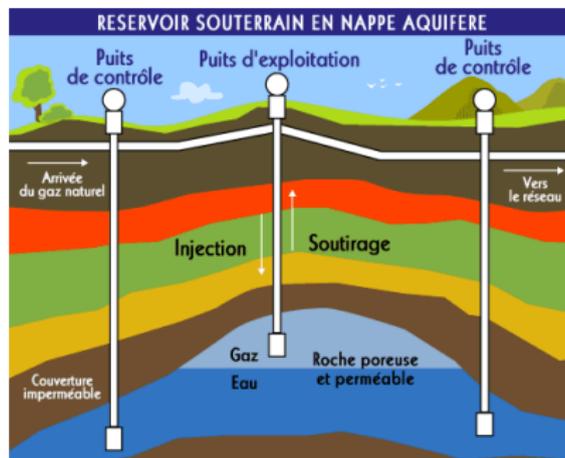
Un stockage physique est caractérisé par :

- ▶ son volume utile V_{\max} : nécessité d'un volume de gaz "coussin"
- ▶ ses débits d'injection et de soutirage
- ▶ ses coûts d'injection et de soutirage (traitement du gaz, etc.)

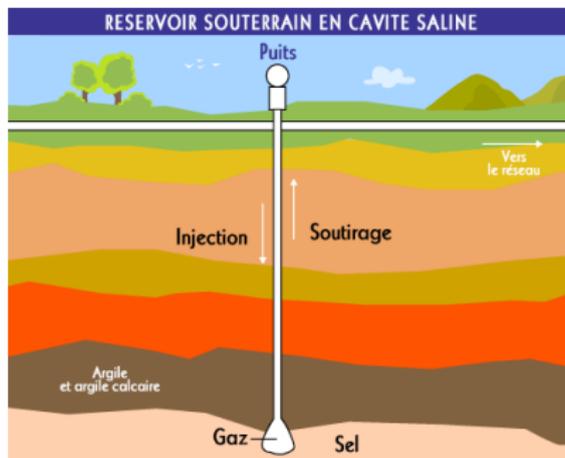
Principaux types de stockage :

- **Nappes aquifères** : Gros volumes mais peu manœuvrants
↔ Réponse à la demande hivernale (arbitrage saisonnier été vs. hiver)
⇒ **Actif long/saisonnier** ou Base load storage
- **Champs déplétés** : anciens gisements d'hydrocarbures déplétés
Même type de contraintes opérationnelles que les nappes aquifères
- **Cavités salines** : Fortes capacités de soutirage/injection mais volumes restreints
↔ Arbitrage sur des périodes très courtes (trading intraweek)
⇒ **Actif court** ou Peak load storage

Remarque : **Cuves de GNL** (Gaz Naturel Liquéfié) aux terminaux méthaniers : pas de contraintes physiques, débits très rapide mais très coûteux.



- entre 400 et 1500 m de profondeur, structure géologique : roche poreuse et perméable imprégnée d'eau (susceptible de contenir le gaz) et roche-couverture imperméable
- faible coût à l'investissement
- quantité de gaz coussin de l'ordre de la moitié du volume total
- volumes importants mais peu flexibles



- entre 1000 et 1500 m de profondeur
- cavités artificielles créées par forage dans une roche sédimentaire constituée principalement de sel gemme puis lessivage (dissolution à l'eau douce)
- important capital d'investissement
- faible quantité de gaz coussin
- petits stockages mais très réactifs

En France, le stockage est largement utilisé :

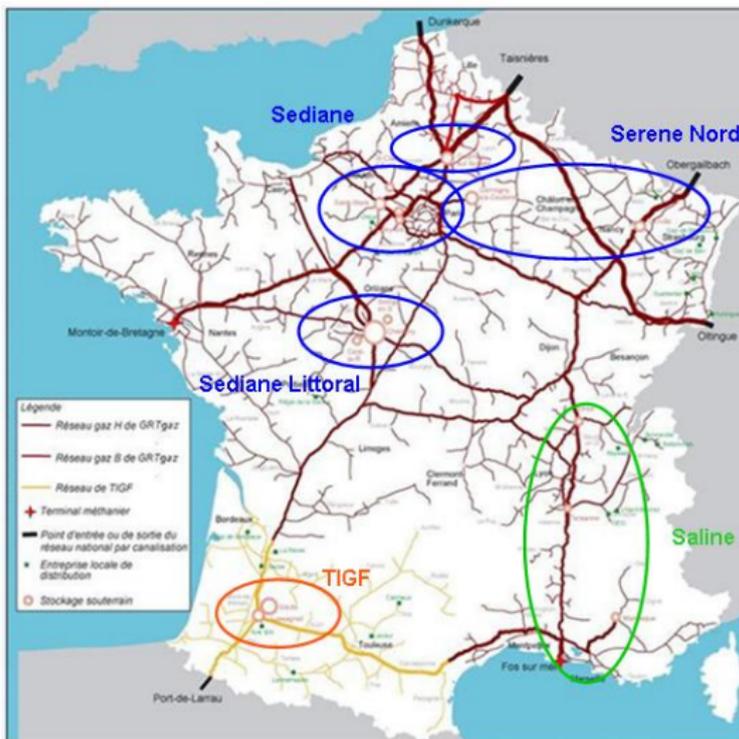
- Stockage souterrains : 12 aquifères et 3 cavités salines : 13 à Storengy \ GDF-Suez et 2 à TIGF Total
- 3 terminaux méthaniers (Enlengy \ GDF-Suez)
- GDF-Suez et EDF possèdent aussi des capacités de stockage en Allemagne, Belgique, UK, etc
- Volume utile : 11.7 Mdm³ soit 132 TWh (~ 26 % de la conso en 2007)

Gas stock level in France 2007-2010 (TWh)

	31/03/2007	31/03/2008	01/11/2008	31/03/2009	01/11/2009	31/03/2010	01/09/2010
Storengy	26,9	38,8	110,4	20,7	111,2	26,9	90,1
TIGF	7,4	11,3	27,1	7,1	28,6	10,1	28,1
Total	34,3	50,1	137,5	27,8	139,8	37	118,1

Before
winter

Before
summer



Capacités de stockage en France en 2011

On se donne un horizon de temps T . On suppose que le prix du gaz S est un processus de Markov défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \leq T}$ la filtration générée par S .

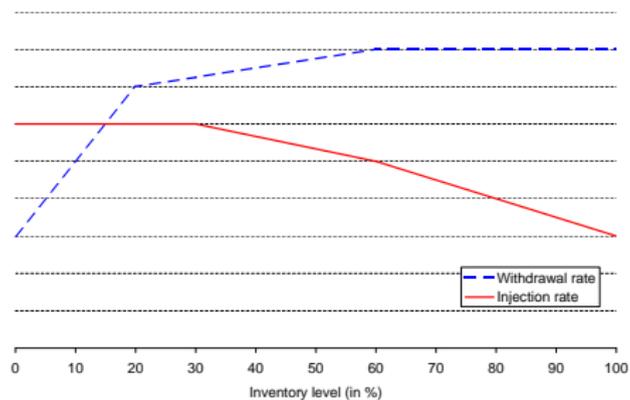
Evaluation d'un stockage gaz \Rightarrow Problème de **contrôle stochastique avec contraintes**.

Contraintes du stockage physique :

- $V_{\max} > 0$, **volume utile** de la cavité
- \underline{c} et \bar{c} , **niveaux de stock minimal et maximal**, pouvant dépendre du temps
- Contraintes de débits : q_{inj} et q_{sout} , **capacités d'injection et de soutirage** dépendant du niveau dans le stock (cf. pression dans la cavité)

Remarque : On se place dans un cadre de modélisation où une stratégie de gestion u de l'actif de stockage est de type "bang-bang", i.e. il est optimal de prendre une des 3 décisions : injecter, soutirer ou ne rien faire.

Variables d'état : **prix du gaz** S et **niveau dans le stock** C^u (supposés **décorrélés**).



Capacités d'injection et de soutirage q_{inj} et q_{sout} fonction du niveau de stock

Commande u : **Stratégie de gestion de l'actif** (dite de Switching)

- u , régime de fonctionnement de l'actif à valeurs dans $\mathcal{I} = \{+1, 0, -1\}$:

$$u_t = \begin{cases} +1 & \text{si en } t, \text{ régime d'injection} \\ 0 & \text{si en } t, \text{ régime de repos} \\ -1 & \text{si en } t, \text{ régime de soutirage} \end{cases}$$

$u := (\tau_k, u_{\tau_k})_{k \geq 0}$ est un processus càdlàg¹ \mathbb{F} -adapté :

- ▶ $(\tau_k)_{k \geq 0}$ est une suite croissante de \mathbb{F} -temps d'arrêt ($\tau_0 = 0$)
 - ▶ $\forall k \geq 0, u_{\tau_k}$, v.a. \mathcal{F}_{τ_k} -mesurable à valeur dans \mathcal{I}
- q , quantité de gaz injecté ou soutiré :

$$q(C_t^u, u_t) = \begin{cases} +q_{\text{inj}}(C_t^u) > 0 & \text{si } u_t = +1 \\ 0 & \text{si } u_t = 0 \\ -q_{\text{sout}}(C_t^u) < 0 & \text{si } u_t = -1 \end{cases}$$

\implies **Niveau de stock** tel que :

$$dC_t^u = q(C_t^u, u_t)dt, \quad \underline{c}_t \leq C_t^u \leq \bar{c}_t.$$

¹ continu à droite limité à gauche

Gains générés par la détention de l'actif de stockage :

- Un gain courant en $t \in [0, T]$:

$$f(t, S_t, C_t^u, u_t) = \begin{cases} -q_{\text{inj}}(C_t^u) (S_t + k_{\text{inj}}(C_t^u)) & \text{si } u_t = +1 \\ 0 & \text{si } u_t = 0 \\ +q_{\text{sout}}(C_t^u) (S_t - k_{\text{sout}}(C_t^u)) & \text{si } u_t = -1 \end{cases}$$

où $k_{\text{inj}} > 0$ et $k_{\text{sout}} > 0$, coûts supplémentaires d'injection et de soutirage par unité de gaz injecté ou soutiré :

- ▶ coûts liés au fonctionnement des compresseurs,
- ▶ coûts de traitement du gaz.
- Un gain à échéance typiquement tel que

$$g(S_T, C_T^u) = -\alpha_T S_T C_T^u,$$

où $\alpha_T \geq 0$, valeur donnée par unité de gaz restant dans l'actif.

- Des coûts d'inversion : $\kappa(i, j)$, coût pour passer du régime i au régime j :

$$\kappa(i, i) = 0, \quad \kappa(i, j) > 0, \forall i \neq j.$$

- Etat du système dynamique : (S, C^u) .
- Stratégie de gestion de l'actif : $u = (\tau_k, u_{\tau_k})_{k \geq 0} \in \mathcal{U}_{[0, T]}^i$ si $\tau_0 = 0, u_0 = i$.
- Profit espéré en 0, si $\mathbb{E}[\cdot] := \mathbb{E}[\cdot | S_0 = s, C_0^u = c, u_0 = i]$:

$$v(0, s, c, i; u) = \mathbb{E} \left[\int_0^T f(t, S_t, C_t^u, u_t) dt - \sum_{\substack{k \geq 1 \\ \tau_k \leq T}} \kappa(u_{\tau_k}, u_{\tau_k}) + g(S_T, C_T^u) \right],$$

Problème de pricing d'un actif de stockage gaz

$$v(0, s, c, i) = \sup_{u \in \mathcal{U}_{[0, T]}^i} v(0, s, c, i; u)$$

Sous l'ensemble de contraintes décrit précédemment.

Pricing d'un actif de stockage \Leftrightarrow **Problème d'optimal switching**

- Problème d'exercice optimal multiple
- Avec valeur à donner à l'exercice (choix du régime) et respect des contraintes

Méthode de résolution numérique présentée :

- Calcul rétrograde en temps des valeurs de Bellman et des stratégies optimales
- **Discrétisation de l'ensemble des niveaux de stock admissibles**
- **Approche Monte-Carlo** : cf. Longstaff and Schwartz (2001)
- Barrera-Esteve et al. (2006), Carmona and Ludkovski (2010), Warin (2010)

Autres techniques de résolution envisageables :

- 1 Résolution de l'EDP : Chen and Forsyth (2007)
- 2 Résolution du système d'Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades (EDSRs) réfléchies associé
- 3 Méthode d'arbre : Barrera-Esteve et al. (2006)

On résout le PPD sur une grille de dates $\pi = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = T\}$ avec $\Delta t_{n+1} := t_{n+1} - t_n, \forall n < N$.

Pour tout (s, c, i) :

- 1 Valeur terminale : $v(T, s, c, i) = g(s, c)$
- 2 Calcul rétrograde des valeurs de Bellman : $\forall n = N - 1, \dots, 0$:

$$v(t_n, s, c, i) = \max \left\{ \begin{array}{l} \text{Rester dans le même régime } i \text{ sur } [t_n, t_{n+1}] ; \\ \text{Switcher en } t_n \text{ dans un régime } j \text{ avec un coût } \kappa(i, j) \end{array} \right\}$$

$$= \max \left\{ \begin{array}{l} f(t_n, s, c, i) \Delta t_{n+1} + \mathbb{E} \left[v(t_{n+1}, S_{t_{n+1}}, C_{t_{n+1}}^i, i) | \mathcal{F}_{t_n} \right] ; \\ \max_{j \neq i} \left\{ f(t_n, s, c, j) \Delta t_{n+1} - \kappa(i, j) + \mathbb{E} \left[v(t_{n+1}, S_{t_{n+1}}, C_{t_{n+1}}^j, j) | \mathcal{F}_{t_n} \right] \right\} \end{array} \right\}$$

où $\mathbb{E}[\cdot | \mathcal{F}_{t_n}] = \mathbb{E}[\cdot | S_{t_n} = s, C_{t_n} = c, u_{t_n} = i]$ et niveau de stock en t_{n+1} :

$$C_{t_{n+1}}^j = c + q(c, j) \Delta t_{n+1} = \begin{cases} c + q_{\text{inj}}(c) \Delta t_{n+1} & \text{si } j = +1 \\ c & \text{si } j = 0 \\ c - q_{\text{sout}}(c) \Delta t_{n+1} & \text{si } j = -1 \end{cases}$$

tel que $C_{t_{n+1}}^j \in [\underline{c}_{t_{n+1}}, \bar{c}_{t_{n+1}}]$.

- Discrétisation de l'ensemble des **niveaux de stocks admissibles** :

$$\forall t, \mathcal{C}_t = \{\underline{c}_t, \underline{c}_t + \Delta c, \dots, \underline{c}_t + K\Delta c = \bar{c}_t\}$$

avec un pas noté Δc et $K = (\bar{c}_t - \underline{c}_t) / \Delta c$

- Calcul des valeurs de Bellman en chaque point de la **grille des niveaux de stock**.
- Approximation des **espérances conditionnelles** :

$$\mathbb{E} \left[v(t_{n+1}, S_{t_{n+1}}, C_{t_{n+1}}^j, j) | \mathcal{F}_{t_n} \right] = \mathbb{E} \left[V_{t_{n+1}} | S_{t_n} \right]$$

par méthode de **moindres carrés Monte Carlo**, cf. Longstaff and Schwartz (2001) : projection de la v.a. $V_{t_{n+1}} \in L^2$ sur le sous-espace vectoriel des v.a. mesurables par rapport à S_{t_n} .

Calcul des espérances conditionnelles par **least squares Monte-Carlo** :

$$\mathbb{E} [V_{t_{n+1}} | S_{t_n}] = \Psi(S_{t_n}) \approx \sum_{b=1}^B \alpha_b(t_n) \psi_b(S_{t_n}) = \alpha \cdot \psi(S_{t_n}).$$

- Approximation par une projection sur un ensemble fini de fonctions de base, avec minimisation de l'erreur quadratique engendrée.
- On se donne une base de fonctions de l'espace L^2 : (ψ_1, \dots, ψ_B) .
- Le vecteur de coefficients $\alpha \in \mathbb{R}^B$ minimise la distance $\|V_{t_{n+1}} - \alpha \cdot \psi(S_{t_n})\|$ au sens des moindres carrés :

$$\alpha = \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}^B} \mathbb{E} \left[\|V_{t_{n+1}} - \alpha \cdot \psi(S_{t_n})\|^2 \right].$$

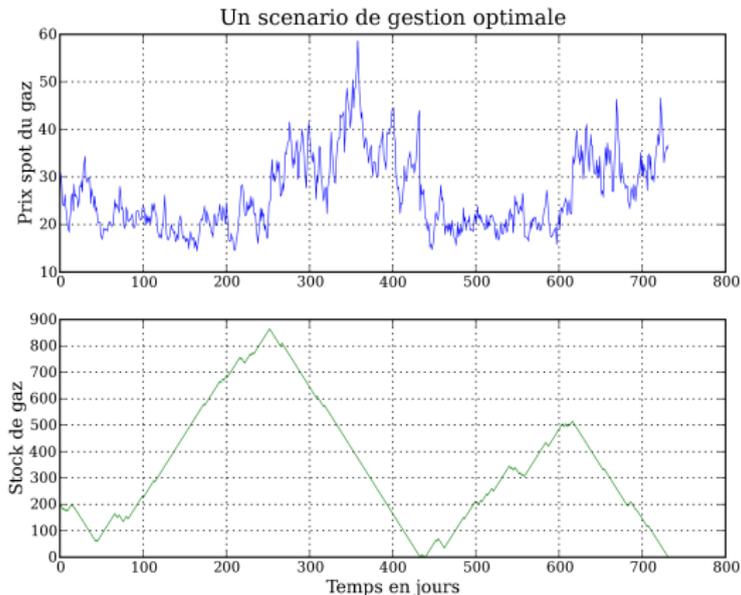
- Avec M réalisations i.i.d. du couple de v.a. $(S_{t_n}, V_{t_{n+1}})$, α est obtenu selon :

$$\alpha = \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}^B} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left[\|V_{t_{n+1}}^{(m)} - \alpha \cdot \psi(S_{t_n}^{(m)})\|^2 \right].$$

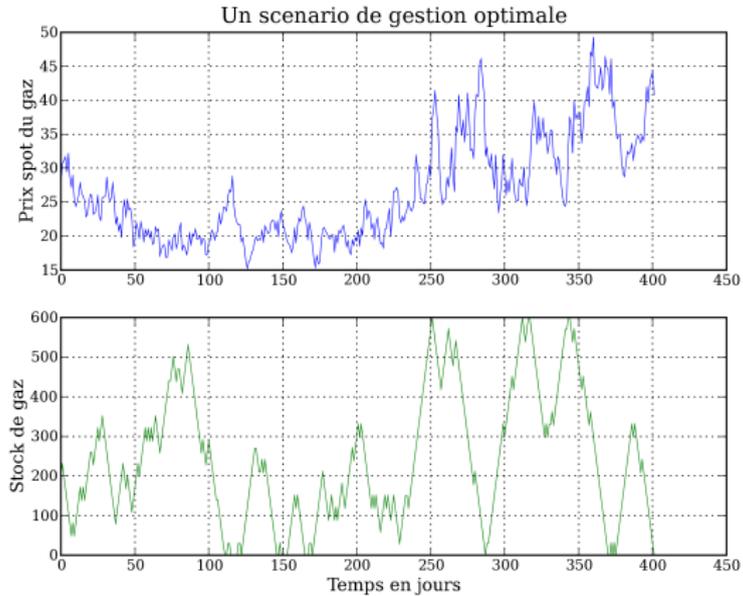
Résultats numériques pour 2 actifs de stockage gaz type à comportements opposés :

	Actif long	Actif court
Capacité de l'actif de stockage V_{\max}	900	600
Niveau de stock maximal Q_{\max}	900	600
Niveau de stock minimal Q_{\min}	0	0
Capacité maximale d'injection q_{inj}	5	30
Constante de temps de remplissage $R = \frac{Q_{\max}}{q_{\text{inj}}}$ (en jours)	$R_1 = 180$	$R_2 = 20$
Capacité maximale de soutirage q_{sout}	5	30
Constante de temps de vidange $R = \frac{Q_{\max}}{q_{\text{sout}}}$ (en jours)	$R_1 = 180$	$R_2 = 20$

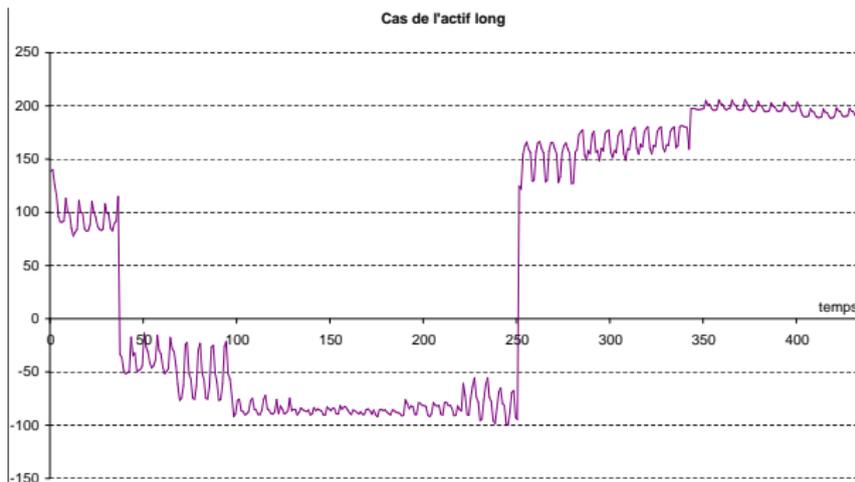
Cas de l'actif long (type aquifère ou champ déplété)



Cas de l'actif court (type cavité saline)

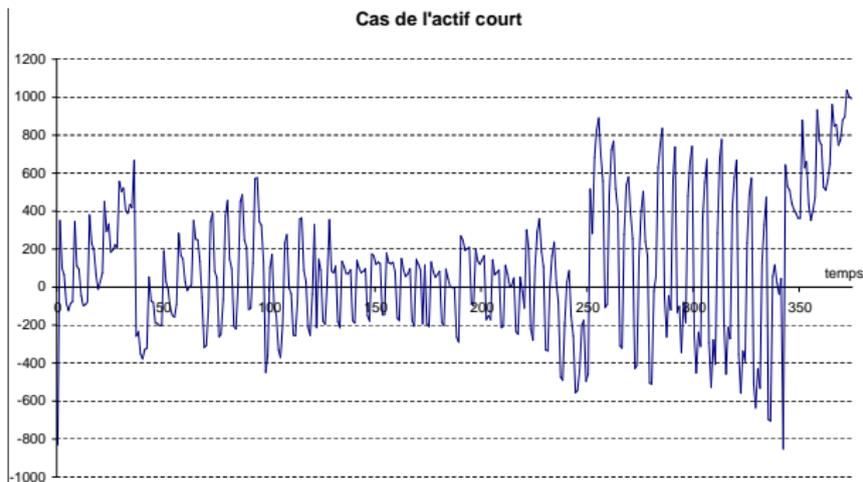


Profil de gains moyens journaliers



Arbitrage été/hiver

Profil de gains moyens journaliers



Arbitrage week-end/jour de semaine

Conclusion

- 1 Les problèmes de valorisation de contrats gaziers (options réelles) se ramènent à des problèmes de contrôle stochastique plus ou moins complexes.
- 2 Ils incluent en général des contraintes non triviales, qui doivent être prises en compte dans la modélisation.
- 3 Les méthodes numériques de résolution envisageables sont classiques :
 - ▶ méthodes d'EDP,
 - ▶ méthodes d'arbre,
 - ▶ méthodes de Monte-Carlo.
- 4 La modélisation/calibration des prix du gaz (et autres commodities : pétrole, etc.) joue un rôle majeur.

Problématiques soulevées par les contrats gaziers :

- Valorisation face au marché, génération de scénarii de gestion optimale.
- Analyse de sensibilités, couverture en portefeuille.