Modèles de prix non gaussiens pour les marchés de l'énergie

Cours de l'école des Ponts

Février 2016

Contexte : modélisation des prix de l'électricité

Principales caractéristiques du prix spot de l'électricité $(S_t)_t$

1. **Saisonnalité** multi-échelle
   - Annuelle, hebdomadaire, journalière
   - Reliée à la saisonnalité de la demande, des activités socio-économiques et à la météorologie
2. **Retour à la moyenne** : prix tendant à revenir vers des tendances moyennes
   - Réponse de l'offre à la demande
   - Tendance court terme : équilibre offre/demande, couplage des marchés
   - Tendance long terme : investissements, conditions économiques de long-terme
3. **Forte volatilité**
   - Volatilité inversement dépendante du niveau d'offre
   - Prix et volatilités corrélés positivement

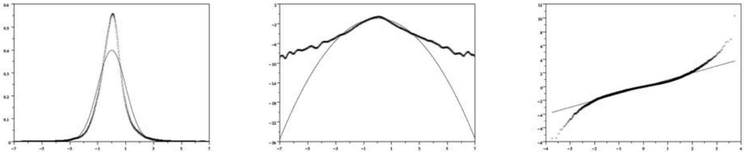
Contexte : modélisation des prix de l'électricité

Principales caractéristiques du prix spot de l'électricité $(S_t)_t$ (cont.)

4. Effets de calendrier : vacances, jours fériés
5. Présence d'importants **pics de prix**
   - Pic : Mouvement à la hausse suivi d'un retour rapide au même niveau
   - Caractère non stockable de l'électricité
   - Discontinuité des coûts de production
6. Evènements atypiques : prix négatifs ou nuls
7. Corrélation aux autres matières premières énergétiques (gaz, pétrôle, charbon)

Pourquoi utiliser des **modèles non gaussiens** ?

- La distribution des résidus extraits de prix électriques (après désaisonnalisation et log-transformation) est non Gaussienne : présence de pics de prix.
- Si les prix spot désaisonnalisés sont l'exponentielle d'un processus d'OU, on obtient par exemple :



German electricity prices (LPX 2001): Residuals density (left), log-density (middle) and normal QQ-plot (right)

- La distribution empirique des résidus extraits est fortement leptokurtique :
  - Plus concentrée autour de zero
  - Masse plus faible au niveau des valeurs intermédiaires
  - Queues épaisses

Distribution leptokurtique

- **Kurtosis** : coefficient d'aplatissement, correspondant à une mesure de l'aplatissement ou de la "pointicité", de la distribution d'une v.a. réelle.
- **Excès de kurtosis** ou Kurtosis normalisé d'une v.a. de moyenne μ et d'écart type σ :

$$\gamma_2 = \frac{\mu^4}{\sigma^4} - 3 \quad \text{avec} \quad \mu_4 := \mathbb{E}\left[(X-\mu)^4\right]$$

- *Mésokurtique* : $\gamma_2 = 0$, cas de la loi Normale avec un moment d'ordre 4 normalisé égal à 3.
- *Leptokurtique* : $\gamma_2 > 0$, distribution est plutôt pointue en sa moyenne, queues de distribution plus longues et épaisses, e.g. Cauchy, Student, Laplace, Poisson
- *Platikurtique* : $\gamma_2 < 0$, faible pointe autour de la moyenne et queues plus fines, e.g. Bernoulli de paramètre $1/2$, Uniforme

Principales approches non gaussiennes recensées dans la littérature

1. **Modèles structurels ou d'équilibre**, cf. [Bar02], [ACNT09], [ACL11]
   - **Idée** : Le prix spot est obtenu par confrontation d'un niveau de demande et d'une fonction d'offre
   - Demande : décrite par un processus stochastique (Gaussien)
   - Fonction d'offre : souvent supposée déterministe, les arrêts de centrales sont mieux décrits par des processus aléatoires (e.g. Poisson composé)
2. **Modèles markoviens avec sauts**, cf. [GR06]
   - **Idée** : Les fluctuations aléatoires du signal de prix sont dues à des fluctuations standards (Brownien), à des fluctuations exceptionnelles (processus à sauts avec amplitudes et fréquences aléatoires).
   - Typiquement, le log-prix spot désaisonnalisé est modélisé comme la somme de deux processus X et Y tels que :

     $$dX_t = -aX_t dt + \sigma_c dW_t^1 + dN_t \ , \quad Y_t = \sigma_L W_t^2$$

     avec N, processus de Poisson composé.
   - Difficulté pour estimer les paramètres de saut (fréquence et amplitude)
   - Les sauts sont bien représentés mais les pics de prix sont mal représentés.

Principales approches non gaussiennes recensées dans la littérature

3. **Modèles à changement de régime**, cf. [Wer05]
   - **Idée** : La dynamique du signal de prix évolue selon 2 modèles : un modèle standard (régime de base) et un modèle de crise (régime à "pics").
   - Typiquement, 2 modèles de retour à la moyenne (processus d'OU) avec des paramètres de volatilités différents (un faible et un fort).
   - La transition d'un régime à l'autre (switching) peut être gouvernée par un seuil déterministe sur le niveau de prix, ou par un processus aléatoire (e.g. chaîne de Markov à deux états non-observables).
   - Loi de probabilité de la transition difficile à calibrer

4. **Modèles à loi leptokurtique**, cf. [BKM06], [Oud03]
   - **Idée** : Modèles de retour à la moyenne (type OU) dans lequel le mouvement Brownien (distribution Gaussienne) est remplacé par un processus de Lévy mais dont la distribution est leptokurtique.
   - Typiquement, le log-prix spot désaisonnalisé est modélisé comme somme de 2 processus d'Ornstein-Uhlenbeck : le premier est Gaussien, le second est dirigé par un processus de Lévy.
   - Nous allons nous intéresser à un modèle factoriel de Lévy de type NIG.

Modèle à un facteur NIG pour l'électricité

$$F(t, T) = F(t_0, T) \exp\left\{M(t_0, t, T) + e^{-a(T-t)} X_t\right\} \quad \forall t_0 \leq t \leq T$$

- Un facteur non Gaussien : $X_t := \int_{t_0}^{t} \sigma(u) e^{-a(t-u)} dL_u$
- Volatilité σ, retour à la moyenne a
- L, processus de Lévy de type NIG de paramètres $(\alpha, \beta, \delta, \mu)$, c'est-à-dire que son premier accroissement $L_1 \sim NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$.
- Terme de dérive :

$$M(t_0, t, T) = \int_{t_0}^{t} m(u, T) du$$

Modèle de prix spot et de **prix futures** induits :

$$\forall t \geq t_0, \quad S_t := F(t, t) = F(t_0, t) \exp\left\{M(t_0, t, t) + X_t\right\},$$

$$F(t, T, T + \theta) = \frac{1}{\theta} \sum_{i=0}^{\theta - 1} F(t, T + i).$$

Modèle à un facteur NIG pour l'électricité

1. Processus d'OU-NIG : Le processus X est un **processus d'Ornstein-Uhlenbeck** dirigé par un processus de Lévy L vérifiant :

$$dX_t = -aX_t dt + \sigma(t) dL_t, X_{t_0} = 0.$$

2. EDS : Dans le modèle précédant, la dynamique des prix à terme s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{dF(t,T)}{F(t^-,T)} =& m(t,T)dt + \sigma(t)e^{-a(T-t)}dL_t \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \left(e^{\sigma(t)e^{-a(T-t)}x} - 1 - \sigma(t)e^{-a(T-t)}x \right) \mu(dx,dt)\end{aligned}$$

où μ est la mesure aléatoire des sauts de L.
3. Condition de dérive : Les processus $(F(t,T))_{t\leq T}$ sont rendus martingales par un choix du terme de dérive tel que :

$$m(t,T) = -\mu\sigma(t)e^{-a(T-t)} + \delta\left(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \sigma(t)e^{-a(T-t)})^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right)$$

<u>Preuve</u> : **2.** Itô-Lévy **3.** Transformation d'Essher

Rappels sur la loi Normale Inverse Gaussienne

- Famille des *lois hyperboliques généralisées*, se déclinant autour de 5 paramètres
- $\alpha > 0$ détermine la forme de la densité.
- β tel que $0 \leq |\beta| < \alpha$ détermine le degré d'asymétrie.
  Si $\beta = 0$, la distribution est symétrique, si $\beta > 0$, elle est bombée à droite.
- μ est le paramètre de position.
- δ est le paramètre d'échelle.
- λ détermine l'épaisseur des queues de distribution.
- $\lambda = -\frac{1}{2} \rightarrow$ **Distribution** $NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$

Propriétés de la loi $NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$

1. **Densité** :

$$f_{NIG}(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) \sim \frac{\alpha}{\pi} \exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(x - \mu)\right) \frac{K_1(\alpha\delta\sqrt{1 + (x - \mu)^2/\delta^2})}{\sqrt{1 + (x - \mu)^2/\delta^2}},$$

où K_1 désigne la fonction de Bessel du troisième type d'ordre 1.

Propriétés de la loi $NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$ (cont.)

2. Distribution **leptokurtique** : queues de distribution telles que

$$f_{NIG}(x) = \begin{cases} |x|^{-3/2}\, e^{(-\alpha+\beta)x} & \text{quand } x \to +\infty, \\ |x|^{-3/2}\, e^{(\alpha+\beta)x} & \text{quand } x \to -\infty. \end{cases}$$

3. **Mélange en moyenne et variance** :

$$\begin{aligned} & X \sim NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu) \\ \Leftrightarrow \quad & X = \mu + \beta Y + \sqrt{Y} N \text{ avec } N \sim \mathcal{N}(0,1) \;\perp\; Y \sim IG(\delta, \gamma := \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) \end{aligned}$$

4. **Fonction génératrice** des moments :

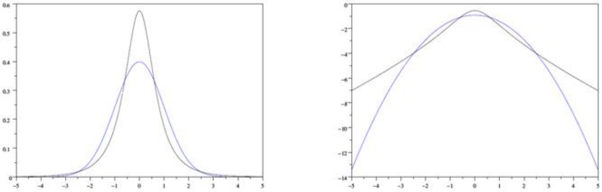
$$L_{NIG}(u) = \mathbb{E}\left[e^{uX}\right] = e^{\mu u + \delta(\gamma - \gamma_u)}$$

avec $\gamma := \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ et $\gamma_u := \sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2}$.

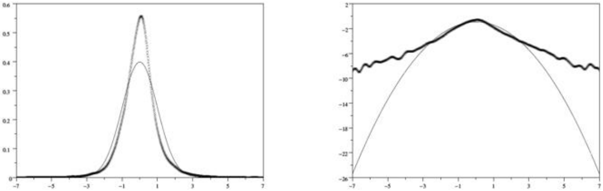
5. **Moyenne et variance** :

$$\mathbb{E}[X] = \mu + \frac{\delta\beta}{\gamma} \text{ et } \operatorname{var}(X) = \frac{\delta\alpha^2}{\gamma^3}.$$

Comparaison entre les lois Gaussienne et NIG



NIG (black) and Gaussian (blue) distribution: Density (left), log-density (right)



German electricity prices (LPX 2001): Residuals density (left), log-density (right)

Propriétés de la loi $NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$ (cont.)

6. Stabilité par **transformation affine** (lois hyperboliques généralisées)

$$\begin{aligned} & X \sim NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu) \\ \rightarrow \quad & Y = aX + b \sim NIG(\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{a}, a\delta, a\mu + b) \end{aligned}$$

7. Stabilité par **convolution** (idem loi Gaussienne)

$$NIG(\alpha, \beta, \delta_1, \mu_1) * NIG(\alpha, \beta, \delta_2, \mu_2) = NIG(\alpha, \beta, \delta_1 + \delta_2, \mu_1 + \mu_2)$$

c'est-à-dire : $X_1 \sim NIG(\alpha, \beta, \delta_1, \mu_1)$ et $X_2 \sim NIG(\alpha, \beta, \delta_2, \mu_2)$

$$\rightarrow \quad X_1 + X_2 \sim NIG(\alpha, \beta, \delta_1 + \delta_2, \mu_1 + \mu_2)$$

8. **Infinie divisibilité** : on peut définir un processus de Lévy L tel que

$$L_1 \sim NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu) \quad \text{et} \quad L_t \sim NIG(\alpha, \beta, \delta t, \mu t).$$

$\Longrightarrow$ La loi d'un accroissement $(L_{t+\Delta t} - L_t)$ se déduit directement de la loi de L_1, quelque soit le pas de temps Δt considéré.

Interprétation du modèle NIG par rapport à d'autres approches

- **Discontinuité** : $(L_t)_{t\geq 0}$ est un processus de saut pur qui présente une infinité de petits sauts sur tout intervalle de temps fini, ce qui est cohérent avec la nature du prix spot $S_t = F(t_0, t) \exp\left\{ M(t_0, t, t) + \int_{t_0}^{t} \sigma(u) e^{-a(t-u)} dL_u \right\}$.
- **Temps réel, temps virtuel** : Le processus de Lévy NIG peut s'obtenir par subordination et s'écrire

$$L_t = \mu t + \beta \tau(t) + B_{\tau(t)}$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard et $(\tau(t))_{t\geq 0}$ un processus de Lévy tel que $\tau(1) \sim IG(\delta, \gamma := \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})$ permet de représenter un temps virtuel caractérisant les périodes d'agitation et de calme sur le marché.

- **Volatilité stochastique** En discrétisant entre t et $t+1$, on obtient

$$L_{t+1} - L_t = \mu + \beta V_t + V_t \varepsilon_t, \quad \text{où} \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1) \text{ et } V_t = \tau(t+1) - \tau(t)$$

$V_t \sim IG(\delta, \gamma)$ correspondant à une volatilité stochastique indépendante de ε_t.

Estimation des paramètres d'un processus OU-NIG

- On considère X un **processus d'Ornstein-Uhlenbeck** dirigé par un **processus de Lévy** L tel que $\forall t \geq 0, X_t = \int_0^t \sigma e^{-a(t-s)} dL_s$.
- On observe X à des instants discrets espacés de Δt : $(X_k := X_{t_k})_{0 \leq k \leq n}$.
- Les **résidus** $\varepsilon_k = X_{k+1} - e^{-a\Delta t} X_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma e^{-a(t_{k+1}-s)} dL_s$ sont **i.i.d.**
- On peut déduire la fonction caractéristique de ε_k en fonction de celle de L_1.

$$\forall v : [0,t] \mapsto \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}\left[\exp\left\{\int_0^t iv(s) dL_s\right\}\right] = \exp\left\{\int_0^t \Psi(v(s)) ds\right\}$$

$$\text{avec } \Psi(u) := \log \mathbb{E}\left[e^{iuL_1}\right],$$

ce qui implique, $\forall u \in \mathbb{R}$:

$$\Psi_{\varepsilon_k}(u) = \log \mathbb{E}\left[e^{iu\varepsilon_k}\right] = \log \mathbb{E}\left[\exp\left\{iu \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma e^{-a(t_{k+1}-s)} dL_s\right\}\right]$$

$$= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Psi\left(u\sigma e^{-a(t_{k+1}-s)}\right) ds = \int_0^{\Delta t} \Psi\left(u\sigma e^{-a(\Delta t - s)}\right) ds.$$

Estimation des paramètres d'un processus OU-NIG (cont.)

- SPDG, on suppose $\sigma := 1$ et laisse libres les quatres paramètres de la loi NIG.
- La méthode consiste à maximiser la log-vraisemblance de l'échantillon évaluée aux points observés i.e. $\max_\theta L(\theta) := \log f(X_0, \dots, X_n; \theta)$, où f est la densité jointe des observations et $\theta := (a, \alpha, \beta, \delta, \mu)$.
- La densité jointe de l'échantillon s'écrit comme un produit de densités :

$$f(X_0, \dots, X_n; \theta) = \prod_{k=0}^{n-1} f(X_{k+1} \,|\, X_k; \theta) = \prod_{k=0}^{n-1} f_\varepsilon(X_{k+1} - e^{-a\Delta t} X_k; \theta),$$

  où f_ε est la densité des résidus $\varepsilon_k = X_{k+1} - e^{-a\Delta t} X_k$ commune pour tout k.
- Pour maximiser la log-vraisemblance de l'échantillon en $(a, \alpha, \beta, \delta, \mu)$:

$$L(\theta) := \sum_{k=1}^{n} \log f_\varepsilon(X_{k+1} - e^{-a\Delta t} X_k; a, \alpha, \beta, \delta, \mu),$$

  on peut utiliser une approximation numérique de f_ε avec $f_\varepsilon = TF^{-1}\left(e^{\Psi_\varepsilon}\right)$ où TF^{-1}, transformée de Fourier inverse.
- A la limite, si Δt est suffisamment petit, on peut approcher f_ε par $f_{L_{\Delta t}}$.

Estimation des paramètres d'un processus OU-NIG en deux temps

- Pour des raisons de robustesse et de réduction de l'espace d'optimisation, au lieu d'estimer globalement tous les paramètres $(a, \alpha, \beta, \delta, \mu)$, on peut préférer procéder en deux étapes :
  1. **Méthode des moindres carrés** pour l'estimation de a,
  2. **Maximum de vraisemblance** pour l'estimation de $(\alpha, \beta, \delta, \mu)$.
- **Moindres carrés** : Estimateur $\hat{a} = -\frac{1}{\Delta t}\log(\hat{\tilde{a}})$ où $\hat{\tilde{a}}$ est solution de :

$$\min_{\tilde{a}} \sum_{k=1}^{n} |X_{k+1} - \tilde{a}X_k|^2 .$$

- **Maximum de vraisemblance pour un échantillon NIG** : On estime les paramètres NIG $\theta = (\alpha, \beta, \delta, \mu)$ maximisant

$$L(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \log f_{NIG}(\hat{\varepsilon}_k; \theta) , \quad \text{avec} \quad \hat{\varepsilon}_k = X_{k+1} - \hat{\tilde{a}}X_k .$$

Estimation des paramètres d'un processus OU-NIG en deux temps (cont.)

- On veut estimer $\theta = (\alpha, \beta, \delta, \mu)$ au vu de n observations i.i.d. $(x_1, \dots, x_n) \sim NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$.
- La méthode consiste à maximiser la log-vraisemblance de l'échantillon :

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \sum_{i=1}^{n} \log f_{NIG}(x_i; \theta) \\ &= n\left[-\log \pi + \log \alpha + \delta\gamma \sum_{i=1}^{n} \beta\delta t_i - \log s_i \log K_1(\alpha\delta s_i)\right] \end{aligned}$$

$$\text{où} \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\,, \quad t_i = \frac{x_i - \mu}{\delta} \quad \text{et} \quad s_i = \sqrt{1 + t_i^2}\,.$$

- Dans la pratique on optimise par rapport aux paramètres $(\gamma, \beta, \delta, \mu)$ et on utilise le changement de variable $\tilde{\gamma} = \log \gamma$ et $\tilde{\delta} = \log \delta$ pour prendre en compte directement les contraintes de positivité de γ et δ.

Estimation des paramètres d'un processus OU-NIG en deux temps (cont.)

- Pour tout $x > 0$, on pose $R_1(x) := \dfrac{K_2(x)}{K_1(x)}$ où K_2 désigne la fonction de Bessel du troisième type d'ordre 2.
- On peut montrer que :

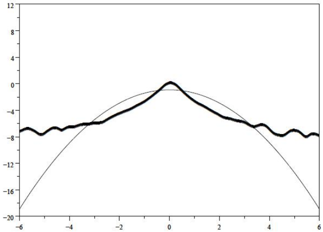
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L(\theta)}{\partial \gamma} &= \frac{2n\gamma}{\alpha^2} + n\delta - \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma\delta}{\alpha} s_i R_1(\alpha\delta s_i) \ , \\
\frac{\partial L(\theta)}{\partial \delta} &= n\gamma + \frac{n}{\delta} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha}{s_i} R_1(\alpha\delta s_i) \ , \\
\frac{\partial L(\theta)}{\partial \beta} &= 2n\frac{\beta}{\alpha^2} + \sum_{i=1}^{n} \delta t_i - \frac{\beta\delta}{\alpha} s_i R_1(\alpha\delta s_i) \ , \\
\frac{\partial L(\theta)}{\partial \mu} &= -n\beta + \sum_{i=1}^{n} \alpha \frac{t_i}{s_i} R_1(\alpha\delta s_i) \ .
\end{aligned}
$$

Estimation des paramètres d'un processus OU-NIG en deux temps (cont.)

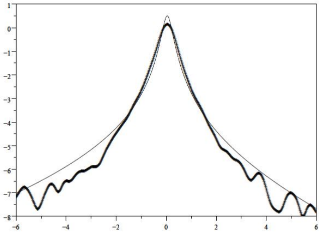
- Simplification possible : **loi NIG centrée réduite**, i.e. telle que

$$\mathbb{E}\left[L_1\right] = \mu + \frac{\delta\beta}{\gamma} = 0 \text{ et } \operatorname{var}(L_1) = \frac{\delta\alpha^2}{\gamma^3} = 1,$$

  $\Longrightarrow$ Seulement deux paramètres libres (α, β), avec $\delta = \frac{\gamma^3}{\alpha^2}$ et $\mu = -\frac{\beta\gamma^2}{\alpha^2}$.
- Typiquement, paramètres estimés : $\alpha \approx 0.5 - 0.8$ et $\beta \approx \mu \approx 0$.
- La fréquence des sauts augmente quand α tend vers 0.
- Meilleure représentation des queues de distribution par le modèle NIG :



Log-densité Gaussienne



Log-densité NIG

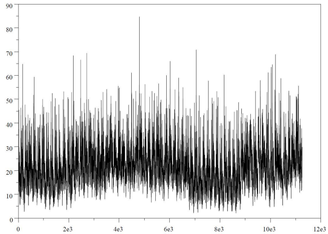
Simulation d'une variable aléatoire NIG

- Simulation de 2 v.a. indépendantes Gaussienne et Inverse Gaussienne :

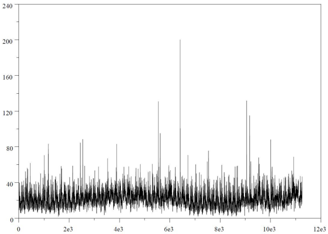
$$X = \mu + \beta Y + \sqrt{Y} N \text{ avec } N \sim \mathcal{N}(0,1) \perp Y \sim IG(\delta, \gamma := \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}).$$

- Simulation d'une v.a. Inverse Gaussienne $Y \sim IG(\delta, \gamma)$: $(\gamma Y - \delta)^2 / Y \sim \chi^2_{(1)}$ où $\chi^2_{(1)}$, loi du chi 2 à un degré de liberté (carré de la Gaussienne centrée réduite).
- Algorithme de simulation de Y :
  1. Générer $M \sim \mathcal{N}(0,1)$ et poser $V = M^2$.
  2. Poser Y_1 et Y_2, les deux solutions de l'équation du second degré $V = (\gamma Y - \delta)^2 / Y$: $Y_1 = \delta/\gamma + V/2\gamma^2 - \sqrt{V\delta/\gamma^3 + (V/2\gamma^2)^2}$ et $Y_2 = (\delta/\gamma)^2 / Y_1$.
  3. Générer $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ une v.a. uniformément dans $[0,1]$.
  4. Si $U < \delta/(\delta + \gamma Y_1)$, poser $Y = Y_1$, sinon poser $Y = Y_2$.

Meilleure représentation des pics de prix par le modèle NIG



Prix spot simulé avec un bruit Gaussien



Prix spot simulé avec un bruit NIG

Conclusions

Approches non-Gaussiennes pour la modèlisation des prix de l'électricité

- Nécessaires pour capter les pics de prix électriques (importants et fréquents)
- Différents types de modèles : modèles d'équilibre (offre-demande), modèles à saut, modèles à changement de régime, modèles à loi leptokutique
- Approche du modèle factoriel de Lévy de type NIG :
  - Distribution NIG : propriétés utiles pour la simulation et l'implémentation
  - Calibration relativement aisée du modèle d'OU-NIG avec les méthodes des moindres carrés et du maximum de vraisemblance
  - Représentation des queues de distribution des résidus des prix électriques

Utilisation de ce modèle factoriel NIG

- Valorisation d'options très en dehors de la monnaie
- Valorisation en non Gaussien :
  1. Valeur vue comme coût de la couverture : cadre de marché incomplet
  2. Valorisation risque neutre : pas d'unicité du changement de mesure de probabilité martingale

Références

- Aïd, Campi and Langrené (2011) : A structural risk-neutral model for pricing and hedging power derivatives
- Aïd, Campi, Nguyen Huu and Touzi (2009) : A structural risk-neutral model of electricity prices
- Barlow (2002) : A diffusion model for electricity prices
- Benth, Benth and Koekebakker (2008) : Stochastic modelling of electricity and related markets
- Benth, Kallsen and Meyer-Brandis (2006) : A non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck process for electricity spot price modeling and derivatives pricing
- Geman and Roncoroni (2006) : Understanding the fine structure of electricity prices
- Meyer-Brandis and Tankov (2007) : Multi jump-diffusion models for electricity prices
- Weron (2005) : Heavy tails and electricity prices