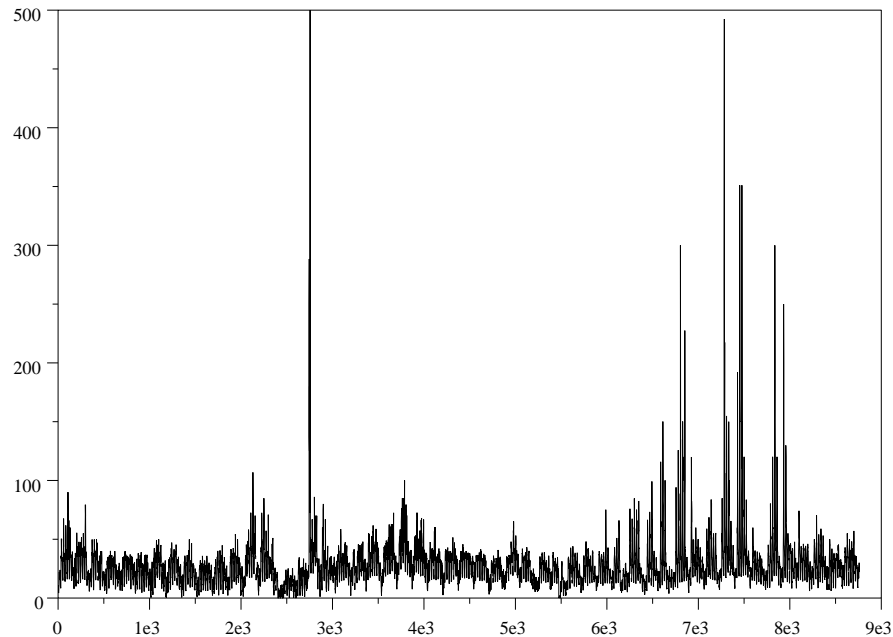


Au delà des modèles gaussiens pour la valorisation de produits dérivés électriques

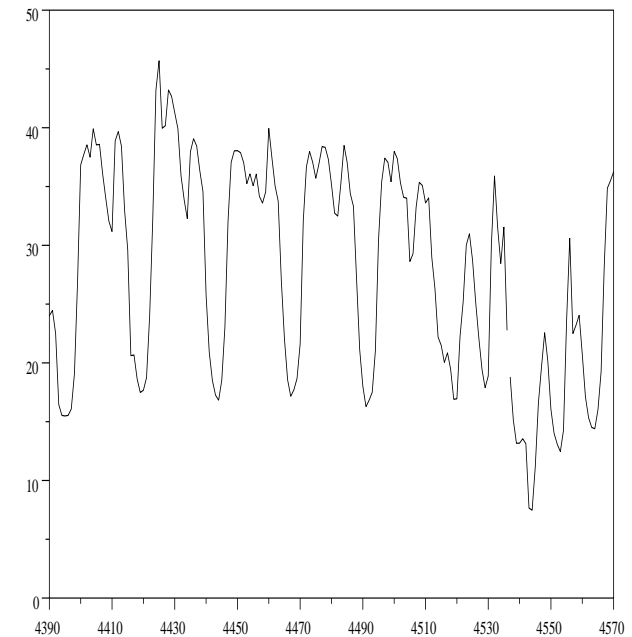
- 1. Caractéristiques des prix de l'électricité**
- 2. Prétraitement des données de prix à terme**
- 3. Modèle factoriel Gaussien**
- 4. Quelques modèles avancés**
- 5. Modèle factoriel de Lévy de type Normal Inverse Gaussien (NIG)**
- 6. Calage des paramètres et simulation du modèle factoriel NIG**
- 7. Valorisation et changement de probabilité : rappels**
- 8. Changements de probabilité martingales pour le modèle factoriel NIG**

Exemple de chronique de prix spot

► Données de prix spot EEX heure par heure $(S_t)_{t \geq 0} \in \mathbb{R}^+$



Du 15/09/2002 à 00h00 au 14/09/2003 à 23h00



Zoom sur une semaine

Caractéristiques du prix spot

- ▶ **Périodicité multi-échelles**
 - Cycle annuel
 - Cycle hebdomadaire
 - Cycle journalier
 - ▶ **Retour à la moyenne**
 - Réponse de l'offre à la demande
 - ▶ **Présence d'importants pics de prix**
 - Caractère non stockable de l'électricité
 - Discontinuité des coûts de production
- ⇒ **Pas de couverture possible sur le spot**

Exemple de données de prix à terme

Platts Allemand Base (Euros/MWh) le 20 février 2004

	Base Bid	Ask	Mid
March	28,25	28,40	28,325
April	27,90	28,15	28,025
May	26,10	26,40	26,25
June	29,20	29,40	29,30
July	28,50	29,00	28,75
August	28,40	28,80	28,60
Q2 2004	27,75	28,00	27,875
Q3 2004	28,50	29,00	28,75
Q4 2004	32,90	33,10	33,00
Q1 2005	34,50	35,00	34,75
Year 2005	32,30	32,40	32,35
Year 2006	33,70	33,90	33,80
Year 2007	34,60	35,10	34,85

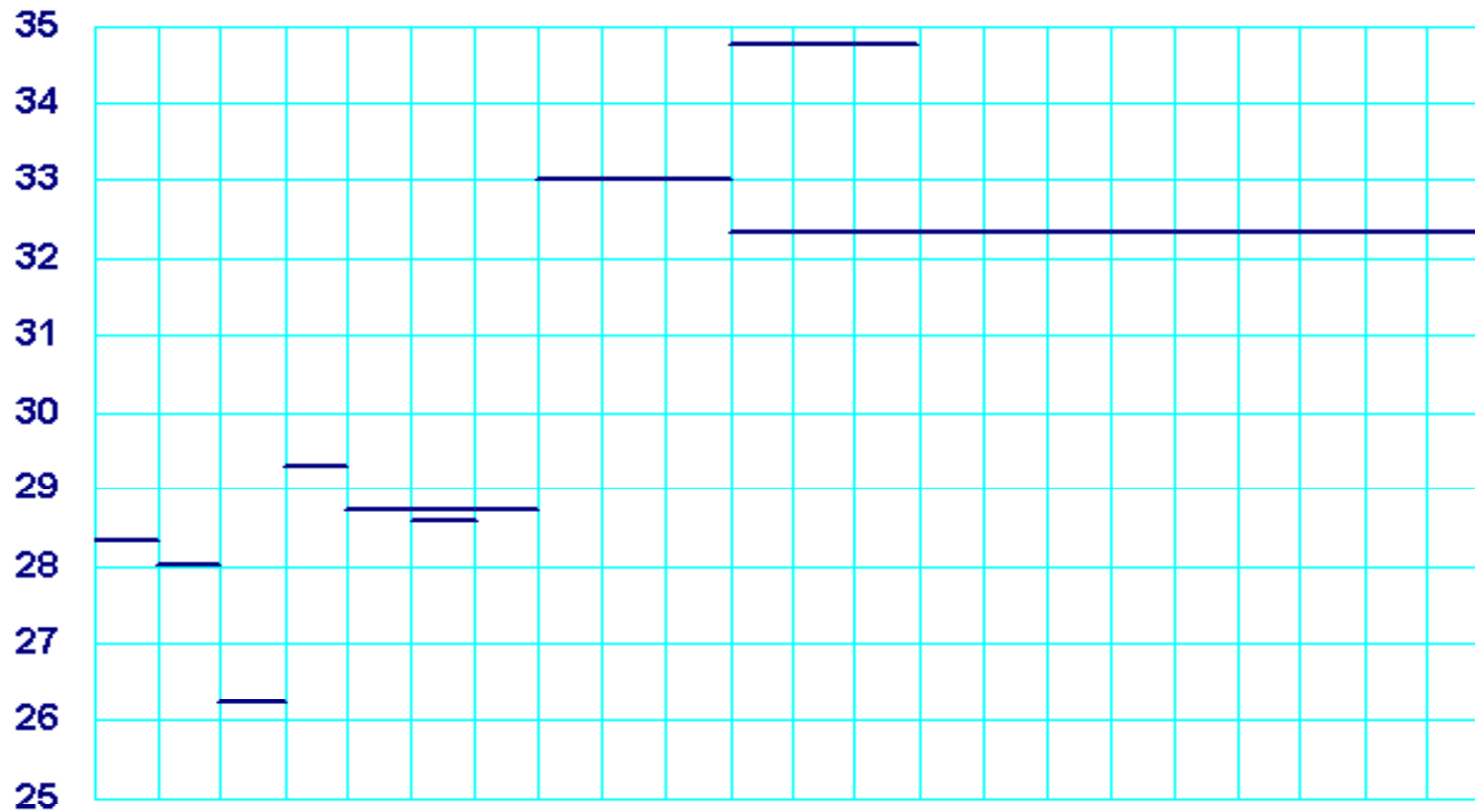
$F(t, T, \theta)$ est le prix d'un MWh coté à l'instant t et livré entre T et $T + \theta$:

- t = date de cotation
- T = date de début de livraison
- θ = Durée de livraison ou granularité

A chaque instant, sont cotés sur le marché à terme plusieurs prix à terme correspondant à différentes périodes de livraison $[T_i, T_i + \theta_i]$. Dans la suite, on note $T^* = \sup\{T_i + \theta_i\}$.

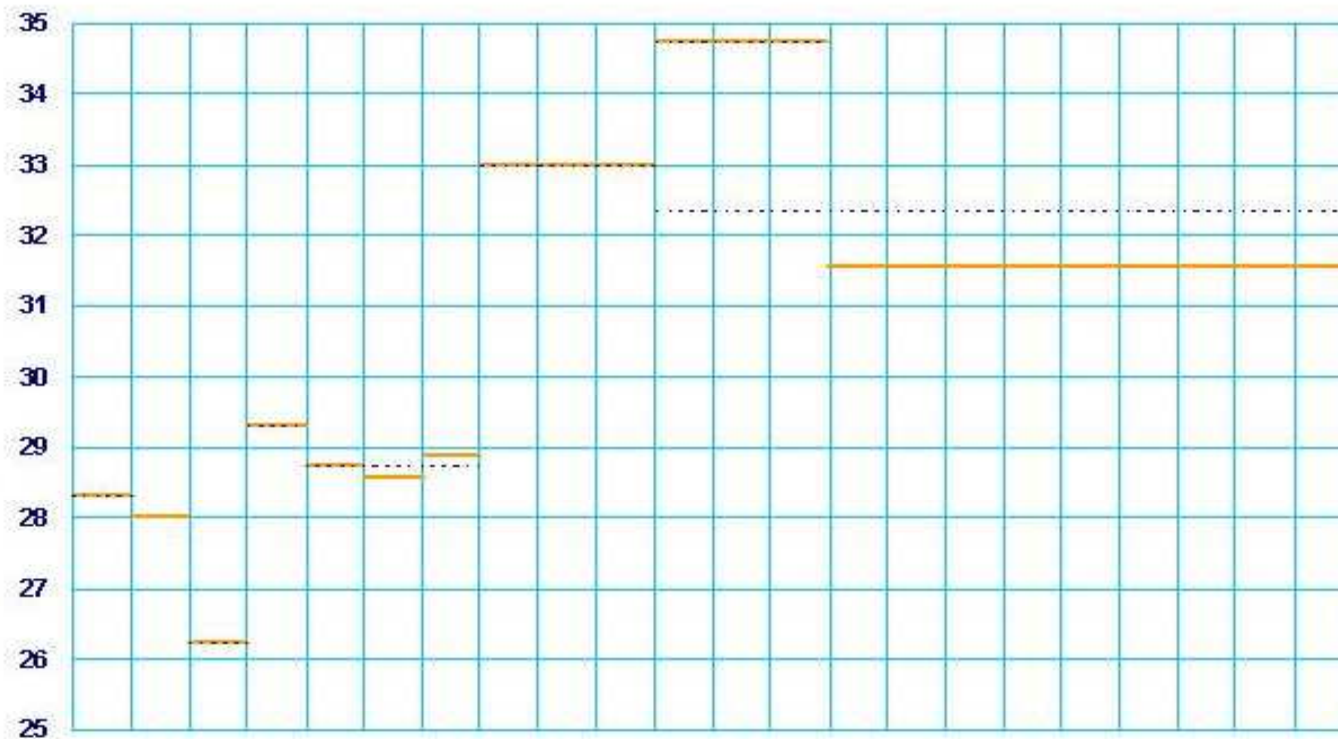
Courbe de prix à terme

- Représentation des données de prix à terme $F(t, T, \theta)$ pour t fixé



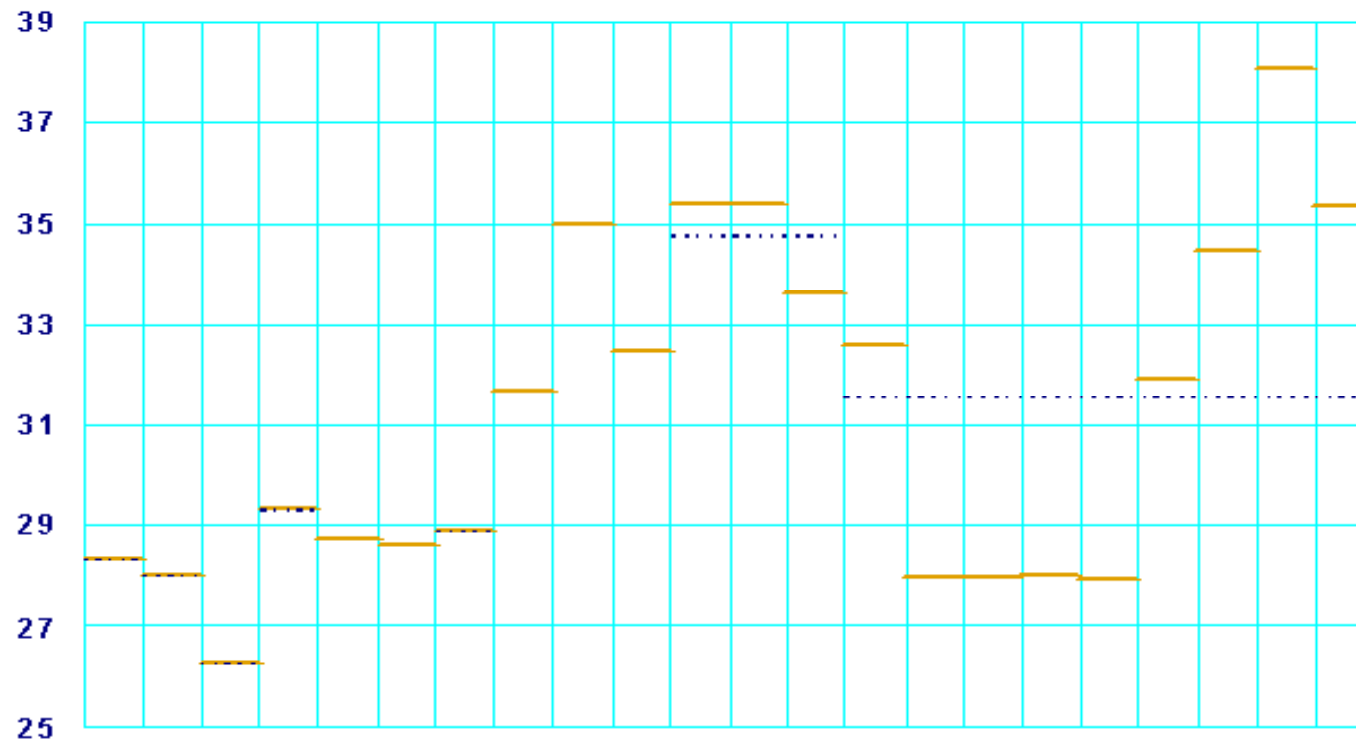
Gestion des recouvrements

► Suppression des recouvrements par Absence d'Opportunité d'Arbitrage



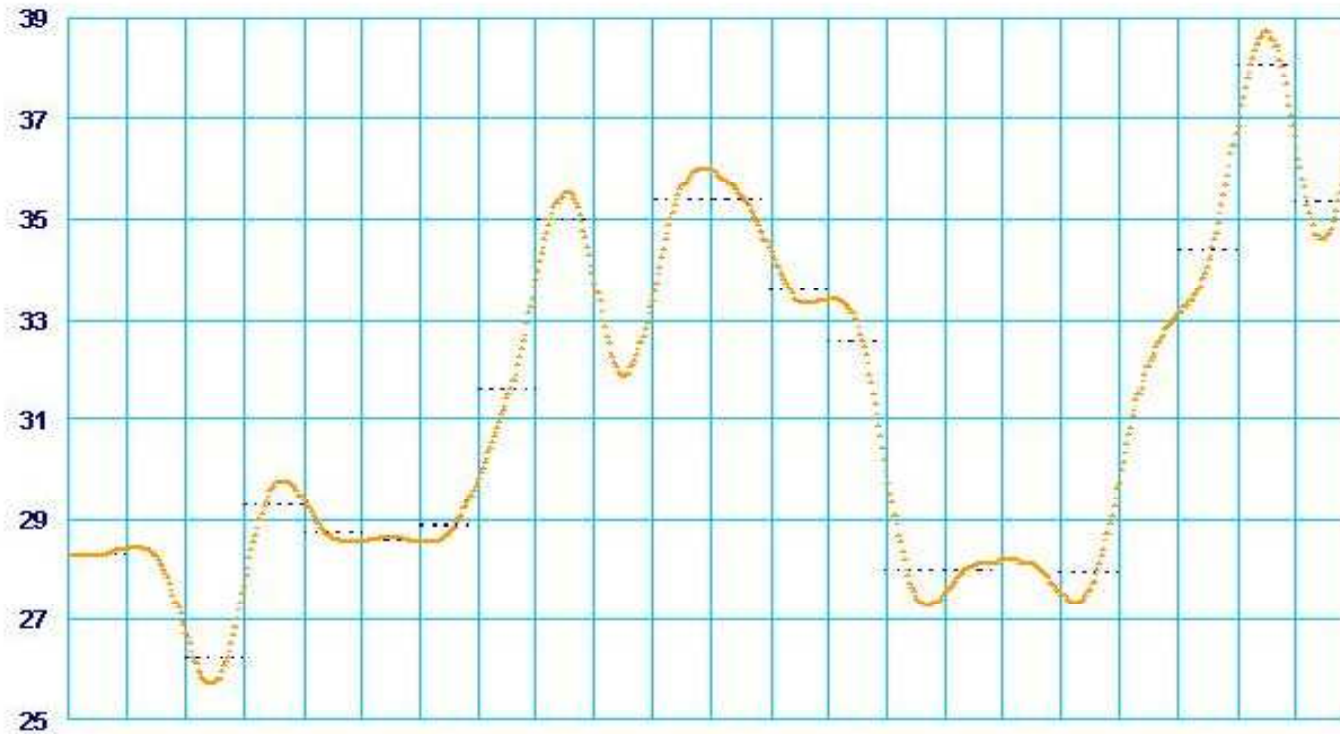
Saisonnalisation de la courbe des prix à terme

► Multiplication des produits par saisonnalisation



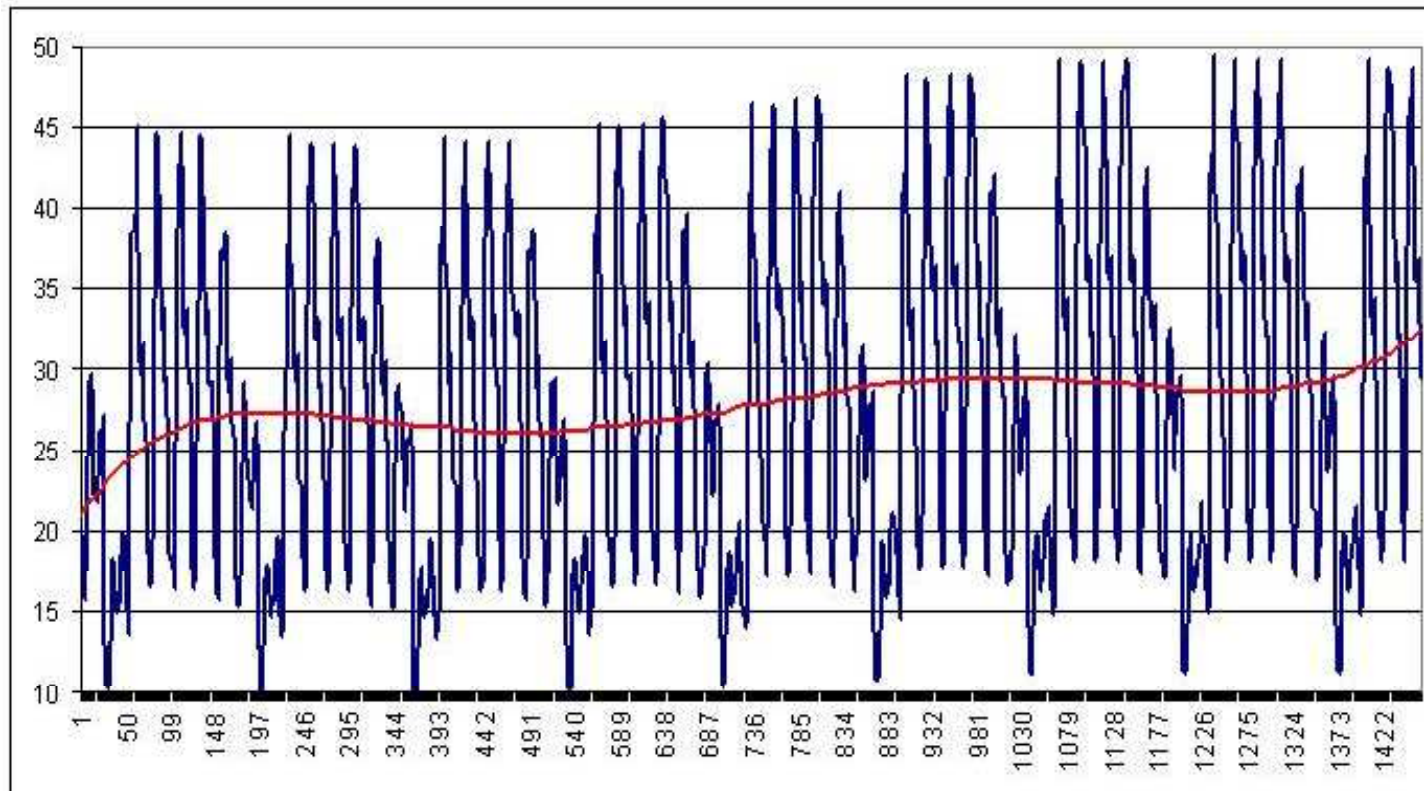
Lissage de la courbe de prix à terme

► Lissage polynomial



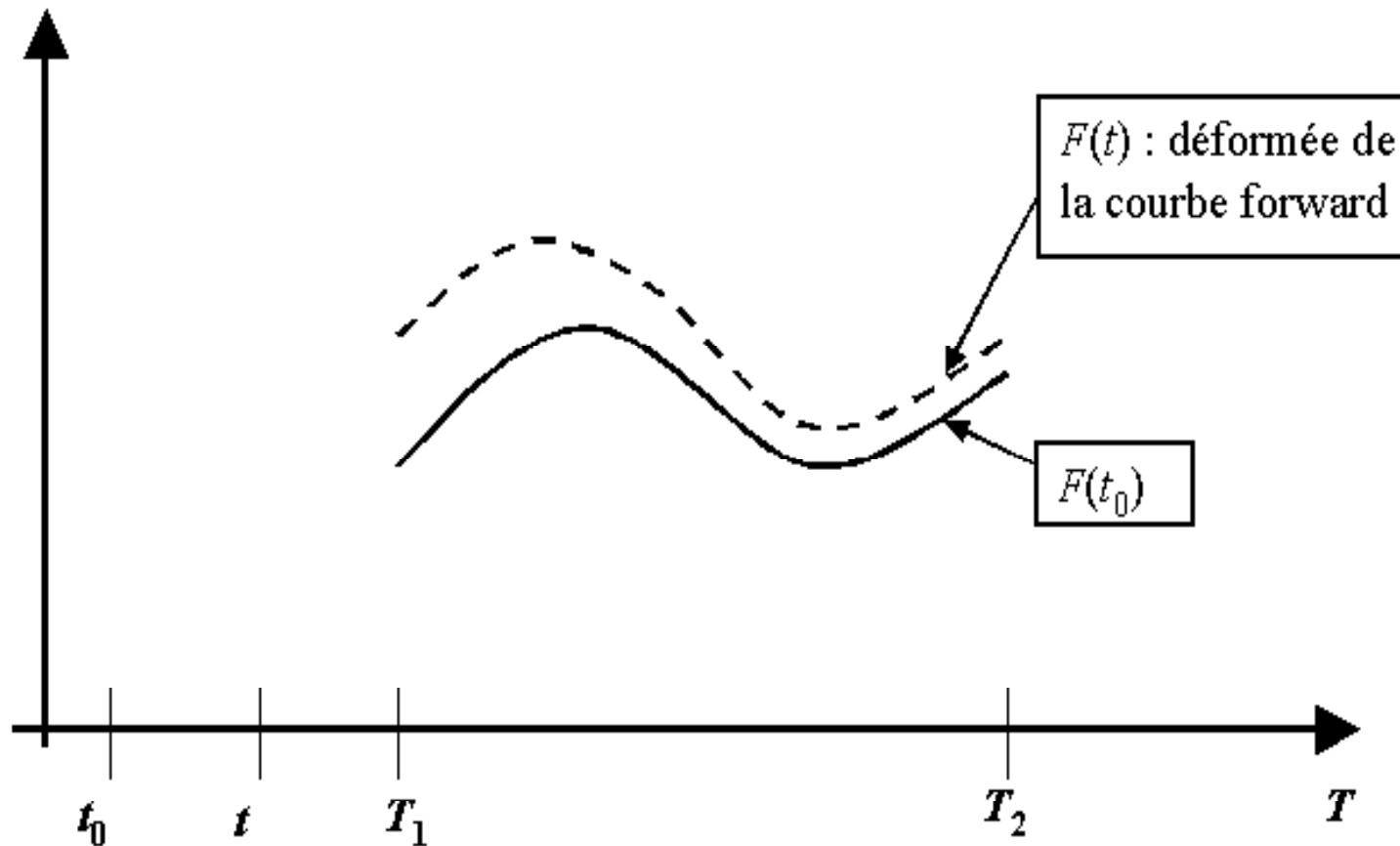
Courbe de prix à terme reconstruite

► Exemple de reconstruction au niveau horaire



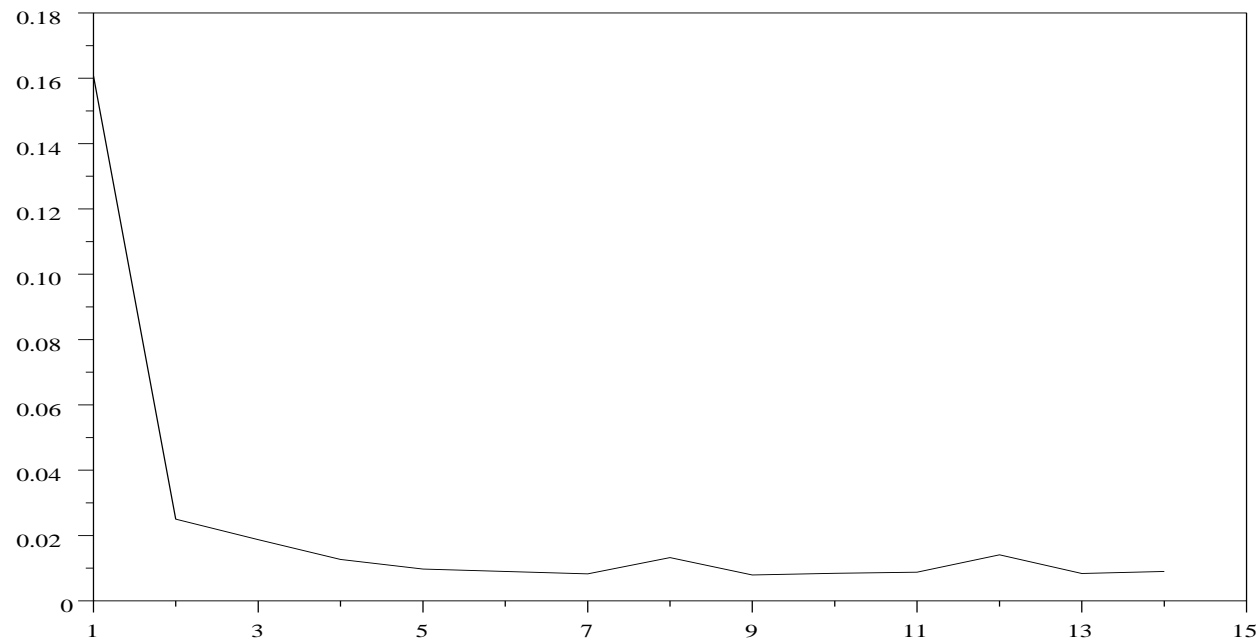
Evolution de la courbe de prix à terme dans le temps

- Comment évolue la courbe entre les instants t_0 et $t > t_0$?



Structure de volatilité exponentielle observée

- Volatilité des rendements $\Delta \log F(t, T, \theta)$ en fonction de l'échéance $T - t$



Calcul empirique à partir des données Platts du 01/01/2001 au 15/07/2002

Difficultés spécifiques à l'électricité

► Modélisation jointe court-terme / long-terme

- En statique : représenter conjointement à un instant t_0 donné $(S_{t_0}, F(t_0, T_1), \dots, F(t_0, T_n))$ pour les application au calcul de risque.
- En dynamique : représenter la "convergence prix à terme / prix spot"
 $F(t, T) \xrightarrow{t \rightarrow T} S_T$ pour la couverture.

Incomplétude et difficulté de modélisation liée aux pics de prix sur le court-terme.

► Prise en compte de la granularité des produits à terme Les produits de granularité plus fine apparaissent à l'approche de la livraison.

Incomplétude du fait de l'illiquidité voire de l'inexistence du sous-jacent.

► Complexité des produits dérivés

- Options de type swing.
- Options "à la courbe de charge" dépendant d'un aléa de volume.

Description du modèle factoriel

- Lien entre prix à terme observés et prix à terme horaires

$$F(t, T, \theta) = \frac{1}{\theta} \sum_{i=0}^{\theta-1} F(t, T + i)$$

[Heath-Jarrow-Morton-1987], [Clewlow-Strickland-2000], [Lucia-Schwartz-2002]

- **Modèle à deux facteurs horaire** $(F(t, T))_{0 \leq t \leq T} \in \mathbb{R}^+$

$$F(t, T) = F(0, T) \exp\{M(t, T) + e^{-a(T-t)} X_t + Y_t\} \quad \text{avec}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} X_t & = \int_0^t \sigma_c e^{-a(t-s)} dW_s^1 \quad \text{facteur court terme} \\ Y_t & = \sigma_L W_t^2 \quad \text{facteur long terme} \\ M(t, T) & = \int_0^t m(s, T) ds \quad \text{dérive .} \end{array} \right.$$

Modélisation des prix SPOT électriques

► **Modèle de prix spot induit** : on pose $S_t = F(t, t)$ ce qui implique

$$S_t = D_t e^{X_t + Y_t} \quad \text{avec} \quad dX_t = -aX_t dt + \sigma_c dW_t^1 \quad \text{et} \quad Y_t = \sigma_L W_t^2$$

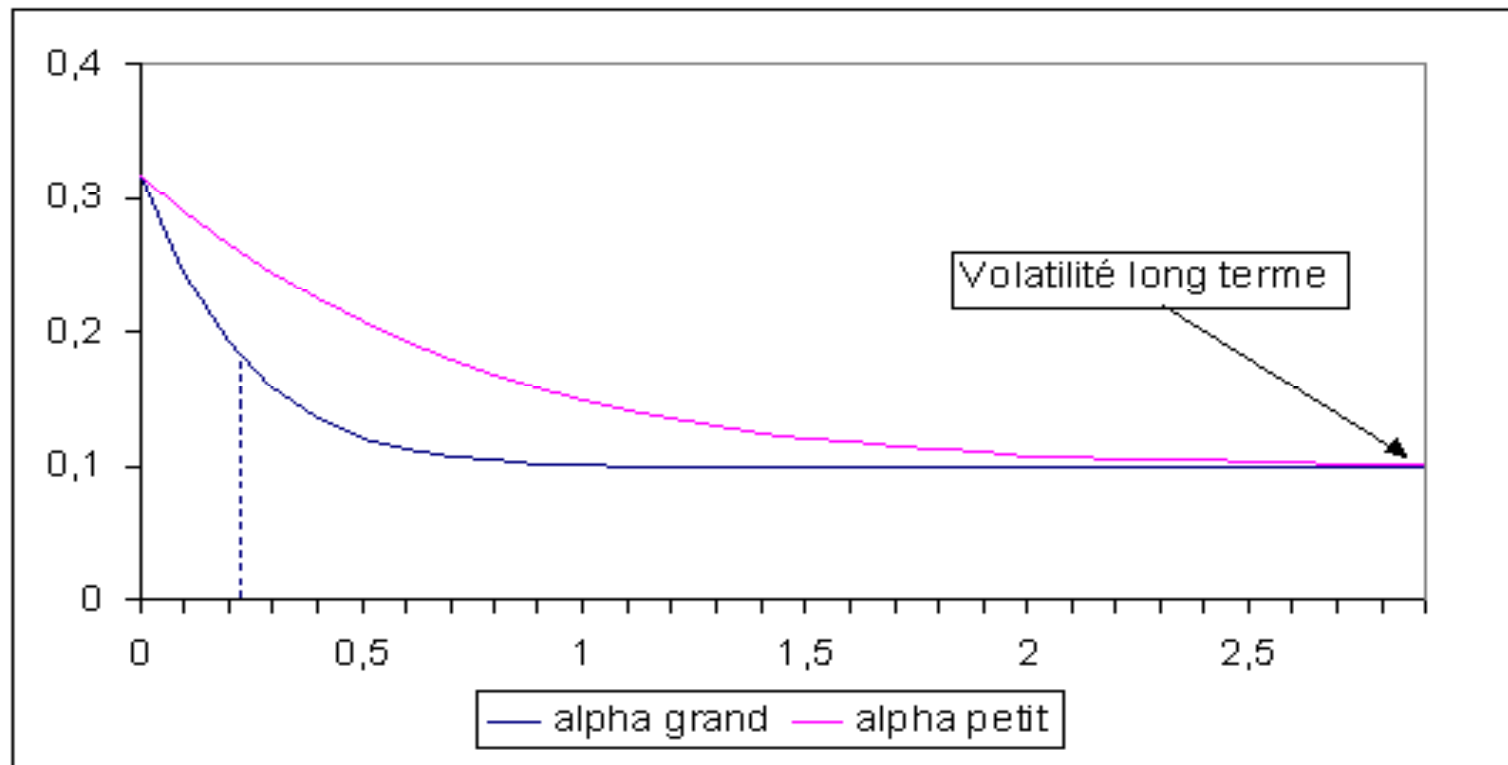
- D_t : **saisonnalité (logarithmique) de S_t**

$$D_t = \mathbb{E}[\log S_t] = F(0, t) \exp\{M(t, t)\}$$

- a : **vitesse de retour à la moyenne**
- σ_c : **volatilité court-terme**
- σ_L : **volatilité long-terme**
- (W^1, W^2) : **Brownien** bi-dimensionnel éventuellement corrélé.

Structure de volatilité exponentielle modèle

- Volatilité des rendements $d \log F(t, T, \theta)$ en fonction de l'échéance induite par le modèle à deux facteurs $\sigma(T - t) = \sqrt{\sigma_c^2 e^{-2a(T-t)} + \sigma_L^2}$



Modèle de diffusion avec sauts

► **Modèle de prix spot : Partie gaussienne + Sauts**

$$S_t = D_t e^{X_t + Y_t} \quad \text{avec} \quad dX_t = -aX_t dt + \sigma_c dW_t^1 + dN_t, \quad Y_t = \sigma_L W_t^2 \quad \text{et}$$

N_t : processus de **Poisson composé**

- Difficulté pour estimer les paramètres de saut (fréquence et amplitude)
- Les sauts sont bien représentés mais les pics de prix sont mal représentés

Modèle à volatilité stochastique

► **Extension du modèle [Hobson-Rogers98] dans [Collet-Duwig-Oudjane-2006]**

$$S_t = D_t e^{X_t} \quad \text{avec} \quad dX_t = -aX_t dt + \sigma(P_t) dW_t \quad \text{et} \quad Y_t \sigma_L W_t \quad \text{et}$$

$$P_t = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u} (X_t - X_{t-u})^2 du \quad \text{avec} \quad \lambda > 0 \quad \text{et}$$

$$\sigma(P_t) = \sqrt{\omega + \alpha P_t} \quad \text{avec} \quad \omega \geq 0, \alpha \geq 0 \quad \text{et} \quad \alpha + \omega > 0$$

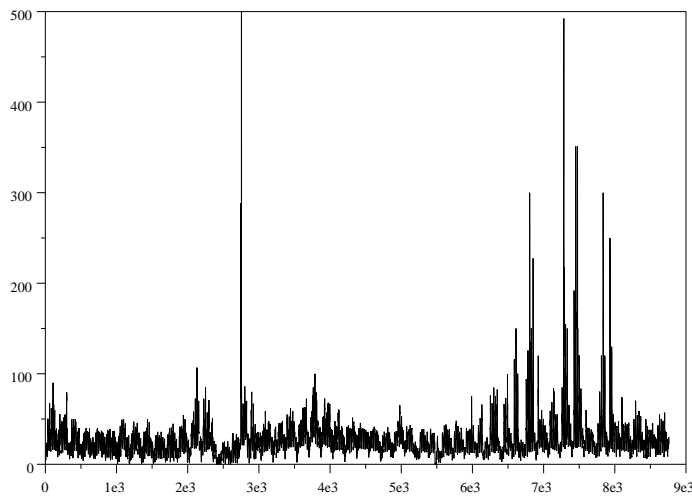
- **Modèle de marché complet [Hobson-Rogers98]. Version temps discret du modèle est proche d'un modèle GARCH (incomplet) [Jeantheau04]**

- **Estimation des paramètres correcte**

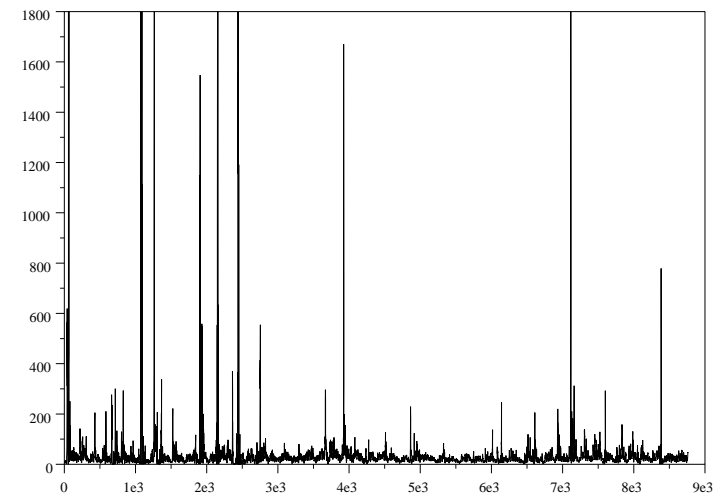
- **Représentation des prix médiocre**

Simulation de prix spot avec le modèle de type H&R

► Comparaison d'une trajectoire simulée avec la chronique observée



Prix spot **EEX**



Prix spot simulé suivant type **H&R**

Modèle de Barlow

► **Modèle fondé sur la confrontation de l'offre et de la demande [Barlow2002] :**

$u_t(S_t) = d_t(S_t)$ avec u_t : fonction d'offre et d_t : fonction de demande



Confrontation offre / demande (Alberta Power Pool 12/11/99 13h00)

Modèle de Barlow

- La demande D_t est supposée inélastique au prix :

$$d_t(S_t) = D_t \quad \forall S_t \quad \text{avec } D_t : \text{ modélisée par un Ornstein-Uhlenbeck}$$

- La fonction d'offre est supposée constante :

$$u_t(x) = g(x) = a_0 + b_0 x^\alpha$$

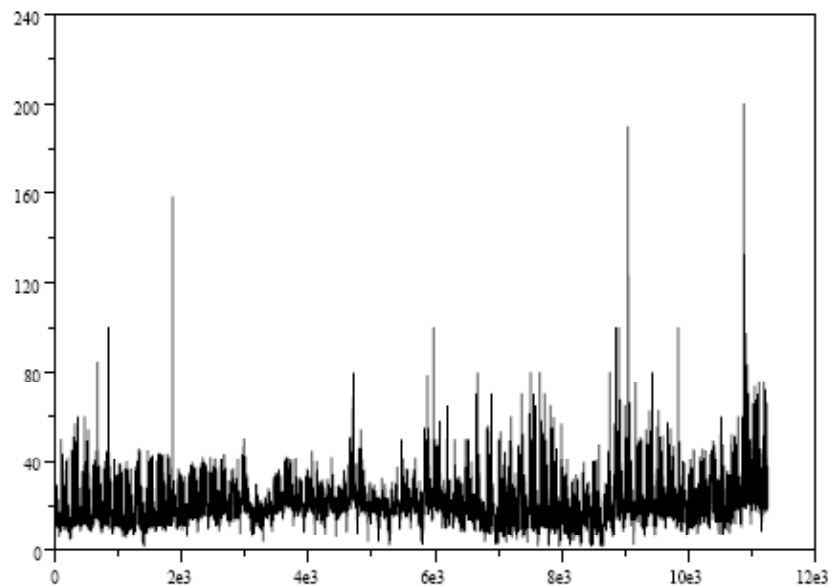
En inversant $D_t = g(S_t)$ et en imposant une contrainte de prix maximum $\varepsilon_0^{1/\alpha}$

$$S_t = \begin{cases} \left(\frac{a_0 - D_t}{b_0} \right)^{1/\alpha} = (1 + \alpha X_t)^{1/\alpha} & \text{pour } D_t < a_0 - \varepsilon_0 b_0 \\ \varepsilon_0^{1/\alpha} & \text{pour } D_t \geq a_0 - \varepsilon_0 b_0 \end{cases}$$

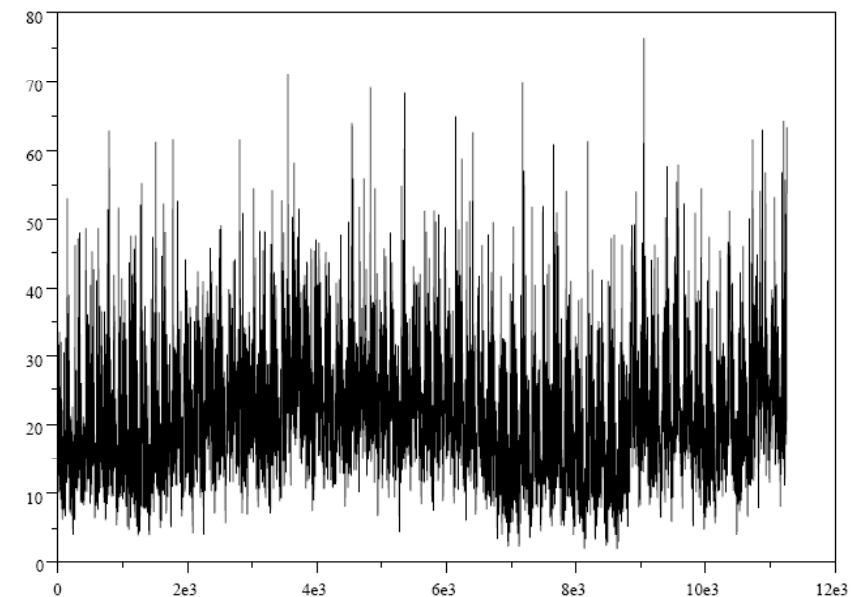
avec $X_t = OU(a, m', \sigma)$ si $D_t = OU(a, m, \sigma)$

Simulation de prix spot avec le modèle de Barlow

► Comparaison d'une trajectoire simulée avec la chronique observée



Prix spot **EEX**



Prix spot simulé suivant **Barlow**

Modèle à 1 facteur Normal inverse Gaussien (NIG)

[Benth2003], [Oudjane2003]

► **Modèle de prix spot / prix à terme**

$$S_t = F(t, t) \quad \text{et} \quad F(t, T, \theta) = \frac{1}{\theta} \sum_{i=0}^{\theta-1} F(t, T + i)$$

► **Modèle à 1 facteur horaire** $(F(t, T))_{0 \leq t \leq T} \in \mathbb{R}^+$

$$F(t, T) = F(0, T) \exp\{M(t, T) + e^{-a(T-t)} X_t\}, \text{ avec}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_t = \int_0^t \sigma(s, t) dL_s \quad \text{avec} \quad \sigma(s, t) = \sigma e^{-a(t-s)} \\ L : \quad \text{Processus de Lévy (de type NIG)} \\ M(t, T) = \int_0^T m(s, T) ds . \end{array} \right.$$

Processus de Lévy (1)

► **Motivation** Représenter les **pics de prix** pour la valorisation d'options très en dehors de la monnaie

► **Définition** Soit $L = (L_t)_{t \geq 0}$ un processus adapté sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ tel que $L_0 = 0$, L est un processus de Lévy si

1. **Accroissements indépendants** : $L_t - L_s \perp \mathcal{F}_s$ pour tout $0 \leq s < t$.

2. **Accroissements stationnaires** : $L_t - L_s \stackrel{\mathcal{L}}{=} L_{t-s}$ pour tout $0 \leq s < t$.

3. **Continuité en probabilité** : $\mathbb{P}(|L_t - L_s| > \varepsilon) \xrightarrow{t \rightarrow s} 0 \forall s \in \mathbb{R}^+, \forall \varepsilon > 0$.

► **Formule de Lévy Khintchine** Pour tout t , $\mathcal{L}(L_t)$ est indéfiniment divisible et déterminée par la **fonction caractéristique** de L_1 dont le logarithme s'écrit

$$\Psi_1(u) = \log \mathbb{E}[\exp(iuL_1)] = iub - \frac{c}{2}u^2 + \int (e^{iux} - 1 - iux)F(dx), \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

où $b \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ et F est la **mesure de Lévy** définie sur \mathbb{R} et intégrant $x^2 \wedge 1$.

Processus de Lévy (2)

► **La log-transformée de Laplace associée au processus de Lévy L est définie s'il existe $k > 0$, tel que $\int_{|x|>1} e^{k|x|} F(dx) < \infty$, par**

$$\Phi(u) = \log \mathbb{E}[e^{uL_1}] = ub + \frac{1}{2}u^2c + \int (e^{ux} - 1 - uxI_{|x|\leq 1})F(dx),$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$, tel que $|u| \leq k$.

► **Représentation dérive+Brownien+sauts on a l'égalité p.s.**

$$L_t = bt + \sqrt{c}W_t + \int_0^t \int_{|x|\leq 1} x[\mu(ds, dx) - dsF(dx)] + \int_0^t \int_{|x|>1} x\mu(ds, dx), \text{ où}$$

- W désigne le mouvement Brownien standard de \mathbb{R} ,
- $\mu = \mu(\omega; ds, dx)$ est la mesure aléatoire de saut de L à valeurs dans \mathbb{R} ,
i.e. pour tout $\omega \in \Omega$, $t > 0$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R} - \{0\})$,

$$\mu(\omega; (0, t] \times A) = \sum_{0 < s \leq t} I(\Delta L_s(\omega) \in A).$$

Propriétés de la loi $\text{NIG}(\alpha, \beta, \delta, \mu)$ (1)

- **Mélange en moyenne et variance** $\alpha > 0$, $0 \leq |\beta| < \alpha$, $\delta > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$

$$X = \mu + \beta Y + \sqrt{Y} N, \quad \text{où } N \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad \perp \quad Y \sim \mathbf{IG}(\delta, \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}).$$

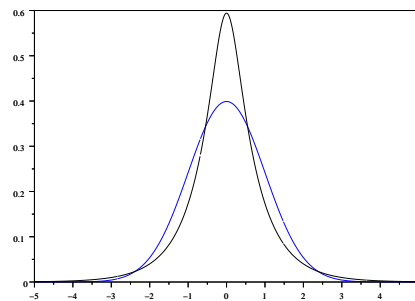
- **Densité**

$$f_{\text{NIG}}(x) = \frac{\alpha}{\pi} \exp\left(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(x - \mu)\right) \frac{K_1\left(\alpha \delta \sqrt{1 + (x - \mu)^2 / \delta^2}\right)}{\sqrt{1 + (x - \mu)^2 / \delta^2}} \quad \text{où } K_1$$

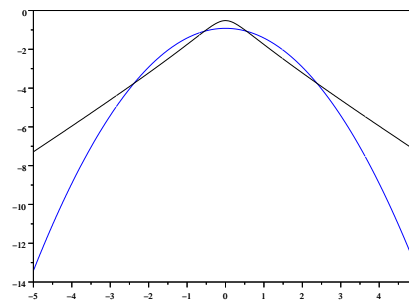
désigne la fonction de Bessel du troisième type d'indice 1.

- **Moyenne et variance** $\mathbb{E}X = \mu + \frac{\delta\beta}{\gamma}$, $\text{Var}X = \frac{\delta\alpha^2}{\gamma^3}$.

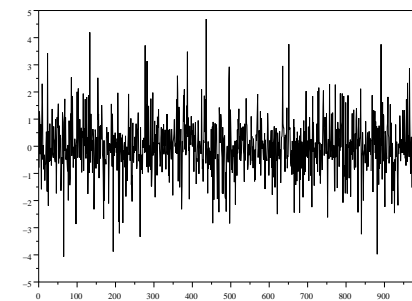
- **Comparaison entre les lois gaussienne (en bleu) et NIG (en noir)**



Densités



Log-densité



Résidus simulés suivant NIG

Propriétés de la loi NIG($\alpha, \beta, \delta, \mu$) (2)

► **Stabilité par convolution**

$$NIG(\alpha, \beta, \delta_1, \mu_1) * NIG(\alpha, \beta, \delta_2, \mu_2) = NIG(\alpha, \beta, \delta_1 + \delta_2, \mu_1 + \mu_2) .$$

► **Le logarithme de la transformée de Laplace a pour expression :**

$$\Phi(u) = \log(\mathbb{E}[e^{uX}]) = u\mu + \delta \left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2} \right) \quad \forall |\beta + u| < \alpha$$

► **Indéfiniment divisible** On peut alors définir un processus de Lévy L tel que

$$L_1 \sim NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu), \quad \text{et} \quad L_t \sim NIG(\alpha, \beta, \delta t, \mu t) .$$

► **La mesure de Lévy** associée au processus de Lévy L tel que

$L_1 \sim \mathbf{NIG}(\alpha, \beta, \delta, \mu)$ a pour expression :

$$F(dx) = e^{\beta x} \frac{\delta \alpha}{\pi |x|} K_1(\alpha |x|) dx, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} .$$

Interprétation du modèle NIG

► **Discontinuité** $(L_t)_{t \geq 0}$ est un processus de saut pur qui présente une infinité de petits sauts sur tout intervalle de temps fini : cohérent avec la nature du prix spot $S_t = D_t \exp\left(\int_0^t e^{-a(t-s)} dL_s\right)$.

► **Temps réel, temps virtuel** Le processus de Lévy NIG peut s'obtenir par subordination et s'écrire

$$L_t = \mu t + \beta \tau(t) + B_{\tau(t)},$$

où $(B_t)_{t \geq 0}$ est le mouvement Brownien standard et $(\tau(t))_{t \geq 0}$ un processus de Lévy tel que $\tau(1) \sim IG(\lambda, \delta, \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})$ permettant de représenter un temps virtuel caractérisant les périodes d'agitation et de calme sur le marché.

► **Volatilité stochastique** En discrétisant entre t et $t + 1$, on obtient

$$L_{t+1} - L_t = \mu + \beta V_t + V_t \varepsilon_t, \quad \text{où } \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{et} \quad V_t = \tau(t+1) - \tau(t).$$

$V_t \sim IG(\delta, \gamma)$ correspond à une volatilité stochastique indépendante de ε_t .

Estimation des paramètres d'un processus OU-NIG (1)

- ▶ On considère X un processus d'Ornstein-Uhlenbeck dirigé par un processus de Lévy L tel que pour tout $t \geq 0$, $X_t = \int_0^t \sigma e^{-a(t-s)} dL_s$.
- ▶ On observe X à des instants discrets espacés de Δt : $(X_{t_k})_{0 \leq k \leq n}$. Les variables $\varepsilon_k = X_{t_{k+1}} - e^{-a\Delta t} X_{t_k} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma e^{-a(t_{k+1}-s)} dL_s$ sont i.i.d.
- ▶ On déduit la fonction caractéristique de ε_k en fonction de celle de L_1 . En effet, pour toute fonction $v : [0, t] \mapsto \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E} \left[\exp \left\{ \int_0^t iv(s) dL_s \right\} \right] = \exp \left\{ \int_0^t \Psi(iv(s)) ds \right\}, \quad \text{où } \Psi(u) = \log \mathbb{E}[e^{iuL_1}],$$

On obtient ainsi pour tout $v \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \Psi_{\varepsilon_k}(v) &= \log \mathbb{E}[e^{iv\varepsilon_k}] = \log \mathbb{E} \left[\exp \left(iv \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma e^{-a(t_{k+1}-s)} dL_s \right) \right] \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Psi(ive^{-a(t_{k+1}-s)}) ds = \int_0^{\Delta t} \Psi(ive^{-a(\Delta t-s)}) ds. \end{aligned}$$

Estimation des paramètres d'un processus OU-NIG (2)

► La méthode consiste à maximiser la log-vraisemblance de l'échantillon évaluée aux points observés i.e. $\max_{\theta} L(\theta) = \log f(X_0, \dots, X_n; \theta)$, où f est la densité jointe des observations et $\theta = (a, \alpha, \beta, \delta, \mu)$, (on peut supposer $\sigma = 1$ et laisser libres les quatre paramètres de la loi NIG).

► La densité jointe de l'échantillon peut s'écrire comme un produit

$$f(X_0, \dots, X_n; \theta) = \prod_{k=0}^{n-1} f(X_{k+1} | X_k; \theta) = \prod_{k=0}^{n-1} f_{\varepsilon}(X_{k+1} - e^{-a\Delta t} X_k; \theta),$$

où f_{ε} est la densité de $\varepsilon_k = X_{k+1} - e^{-a\Delta t} X_k$ commune pour tout k .

► Pour maximiser la log-vraisemblance de l'échantillon en $a, \alpha, \beta, \delta, \mu$ $L(\theta) = \sum_{k=1}^n \log f_{\varepsilon}(X_{k+1} - e^{-a\Delta t} X_k; a, \alpha, \beta, \delta, \mu)$, on utilise une approximation numérique de f_{ε}

$$f_{\varepsilon} = TF^{-1}(e^{\Psi_{\varepsilon}}).$$

A la limite, si Δt est jugé suffisamment petit, on peut approcher f_{ε} par $f_{L\Delta t}$.

Rappels sur le maximum de vraisemblance

► La méthode consiste à maximiser la log-vraisemblance de l'échantillon

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i; \theta), \text{ où } f \text{ est la densité de } x_i \text{ paramétrée par } \theta.$$

Le maximum de vraisemblance est non biaisé, asymptotiquement efficace (il atteint la borne de Cramer-Rao) et gaussien i.e.

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \rightarrow \mathcal{N}(0, \mathcal{J}^{-1}), \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Plus généralement, si g est une fonction continuellement dérivable de θ , on a

$$\sqrt{n}(g(\hat{\theta}) - g(\theta)) \rightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \mathcal{J}^{-1} \frac{\partial g'(\theta)}{\partial \theta'}\right), \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Par définition, la matrice de Fisher est donnée par

$$\mathcal{J} = \mathbb{E}\left(\frac{\partial l(X; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial l(X; \theta)}{\partial \theta'}\right),$$

► **Calcul de la matrice de Fisher** On montre l'égalité suivante

$$\mathbb{E}\left(\frac{\partial l(X; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial l(X; \theta)}{\partial \theta'}\right) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 l(X; \theta)}{\partial \theta \partial \theta'}\right],$$

où $l(X; \theta)$ est la vraisemblance associée à une seule observation X et prise en en la vraie valeur θ du paramètre. Pour estimer la matrice de Fisher à partir des observations, on calcule la moyenne empirique de la matrice hessienne (si les dérivées sont facilement calculables) ou bien la moyenne empirique des produits du gradient et de son transposé en une valeur estimée de θ notée $\hat{\theta}$:

$$\hat{J} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 l(X_i; \hat{\theta})}{\partial \theta \partial \theta'} \quad \text{ou bien} \quad \hat{J} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial l(x_i; \hat{\theta})}{\partial \theta} \frac{\partial l(x_i; \hat{\theta})}{\partial \theta'}.$$

Cette matrice est calculée sans coût supplémentaire par l'algorithme d'optimisation. Les termes diagonaux de la matrice inverse \hat{J}^{-1} donnent une estimation de la variance et donc des intervalles de confiance.

Estimation des paramètres en deux temps

► Pour des raisons de robustesse et de réduction de l'espace d'optimisation au lieu d'estimer globalement tous les paramètres comme proposé précédemment, on peut préférer procéder en deux étapes :

- Moindres carrés pour l'estimation de a
- Maximum de vraisemblance pour l'estimation de $(\alpha, \beta, \delta, \mu)$.

► Par moindres carrés on estime $\hat{a} = -\frac{1}{\Delta t} \log(\hat{\tilde{a}})$ où $\hat{\tilde{a}}$ est solution de

$$\min_{\tilde{a}, m} \sum_{k=1}^n (X_{t_{k+1}} - \tilde{a}X_{t_k} - m)^2 .$$

► Par maximum de vraisemblance On estime $\theta = (\alpha, \beta, \delta, \mu)$ en maximisant :

$$L(\theta) = \sum_{k=1}^n \log f_{NIG}(\hat{\varepsilon}_k; \theta) , \quad \text{avec} \quad \hat{\varepsilon}_k = X_{t_{k+1}} - \hat{\tilde{a}}X_{t_k} - \hat{m} .$$

Estimation des paramètres d'une v.a. NIG

► On veut estimer $\theta = (\alpha, \beta, \delta, \mu)$ au vu de n observations i.i.d.

$(x_1, \dots, x_n) \sim \mathbf{NIG}(\alpha, \beta, \delta, \mu)$.

► La méthode consiste à maximiser la log-vraisemblance de l'échantillon

$$\begin{aligned}
 L(\theta) &= \sum_{i=1}^n \log f_{NIG}(x_i; \theta) \\
 &= n \left[-\log \pi + \log \alpha + \delta \gamma \sum_{i=1}^n \beta \delta t_i - \log s_i \log K_1(\alpha \delta s_i) \right],
 \end{aligned}$$

$$\text{où } \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, \quad t_i = \frac{x_i - \mu}{\delta} \quad \text{et} \quad s_i = \sqrt{1 + t_i^2}.$$

Dans la pratique, on optimise par rapport aux paramètres $(\gamma, \beta, \delta, \mu)$ et on utilise le changement de variable $\tilde{\gamma} = \log \gamma$ et $\tilde{\delta} = \log \delta$ pour prendre en compte directement les contraintes de positivité de γ et δ .

Le gradient de la log-vraisemblance s'écrit

► Pour tout $x > 0$, on pose $R_1(x) = \frac{K_2(x)}{K_1(x)}$ où K_2 désigne la fonction de Bessel du troisième type d'indice deux.

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = \frac{2n\gamma}{\alpha^2} + n\delta - \sum_{i=1}^n \frac{\gamma\delta}{\alpha} s_i R_1(\alpha\delta s_i),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \delta} = n\gamma + \frac{n}{\delta} - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha}{s_i} R_1(\alpha\delta s_i),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = 2n \frac{\beta}{\alpha^2} + \sum_{i=1}^n \delta t_i - \frac{\beta\delta}{\alpha} s_i R_1(\alpha\delta s_i),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = -n\beta + \sum_{i=1}^n \alpha \frac{t_i}{s_i} R_1(\alpha\delta s_i).$$

Choix de l'initialisation

► **Méthode des moments** Si $X \sim NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$ on peut calculer les moments de X par dérivation de la transformée de Laplace $u \mapsto \mathbb{E}[e^{uX}]$

$$\mu_1 = \mu + \delta\beta\gamma^{-1}, \quad \mu_2 = \delta\alpha^2\gamma^{-3}, \quad \mu_3 = 3\delta\beta\alpha^2\gamma^{-5}, \quad \mu_4 = 3\delta\alpha^2(\alpha^2 + 4\beta^2)\gamma^{-7}.$$

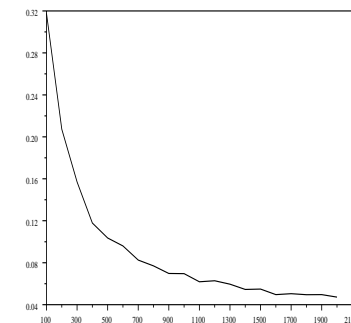
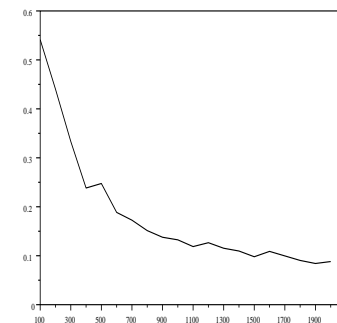
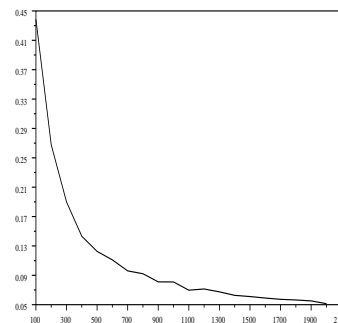
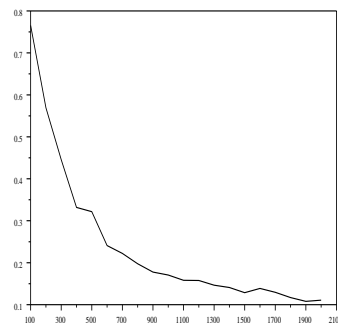
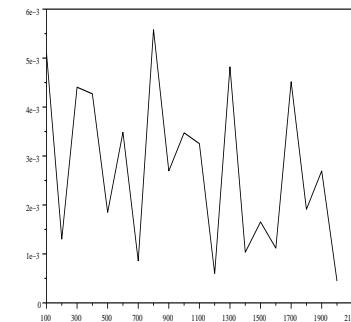
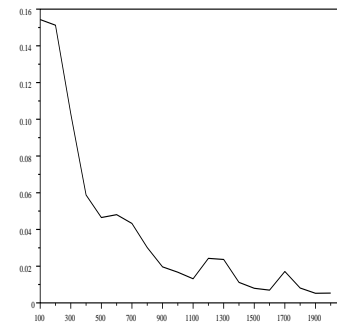
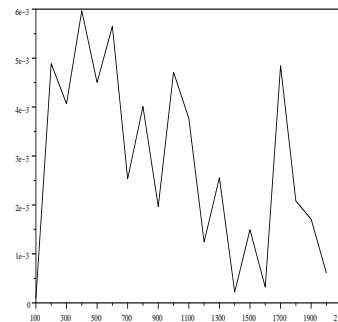
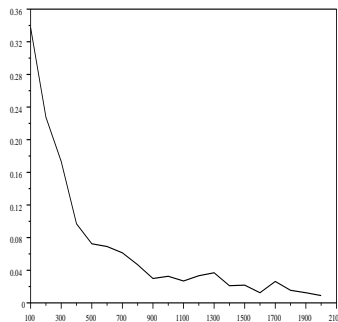
► **Par identification des moments théoriques aux moments empiriques** (calculés à partir de l'échantillon) on obtient une première approximation des paramètres qui serviront de condition initiale à l'algorithme d'optimisation :

$$\beta_{\text{init}} = \frac{1}{\frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\mu}_3} - \frac{5}{3} \frac{\hat{\mu}_3}{\hat{\mu}_2}} \quad \gamma_{\text{init}} = \sqrt{3\beta_{\text{init}} \frac{\hat{\mu}_2}{\hat{\mu}_3}} \quad \alpha_{\text{init}} = \sqrt{\beta_{\text{init}}^2 + \gamma_{\text{init}}^2},$$

$$\delta_{\text{init}} = \frac{\hat{\mu}_2}{\alpha_{\text{init}}^2} \gamma_{\text{init}}^3 \quad \mu_{\text{init}} = \hat{\mu}_1 - \frac{\delta_{\text{init}} \beta_{\text{init}}}{\gamma_{\text{init}}}.$$

Performance de l'estimation (en simulations)

► On fait varier le nombre d'observations $n = 100, n = 200, \dots, n = 2000$ simulées suivant une loi $\text{NIG}(\alpha = 0.8, \beta = 0)$ centrée et réduite. Pour chaque n , on répète la procédure simulation-estimation 500 fois.



Biais/STD α

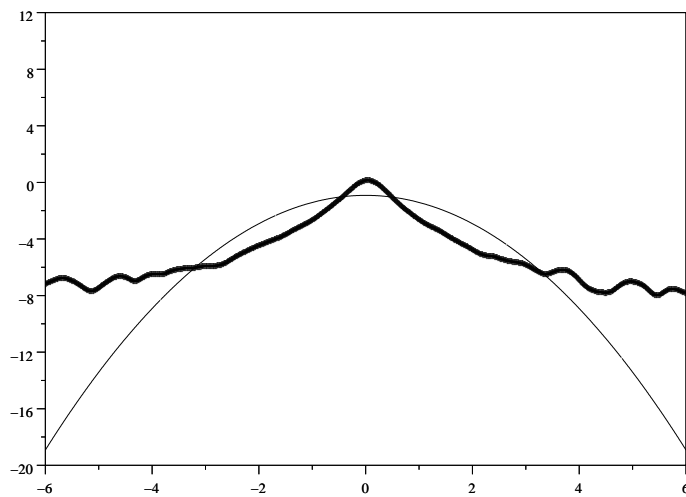
Biais/STD β

Biais/STD δ

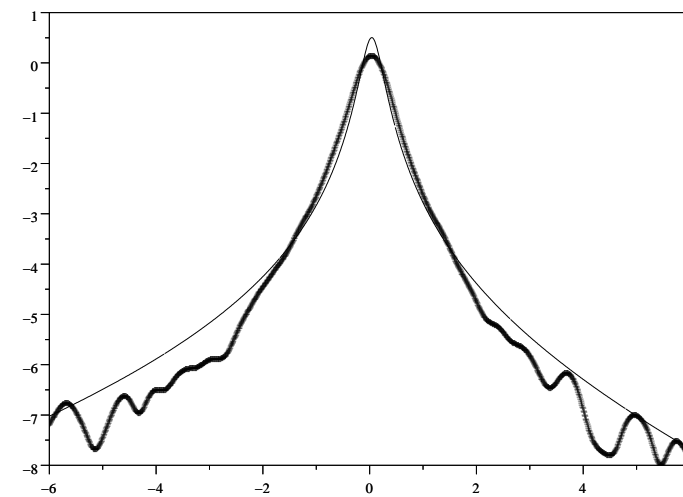
Biais/STD μ

Calage des résidus

- Meilleure représentation des queues de distribution par le modèle NIG



Log-densité **gaussienne**



Log-densité **NIG**

Simulation d'une v.a. NIG X

► **Simulation de v.a. indépendantes Gaussienne et Inverse Gaussienne**

$$X = \mu + \beta Y + \sqrt{Y} N, \quad \text{où } N \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad \perp \quad Y \sim \mathbf{IG}(\delta, \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}).$$

► **Simulation d'une v.a. Inverse Gaussienne $Y \sim \mathbf{IG}(\delta, \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})$**

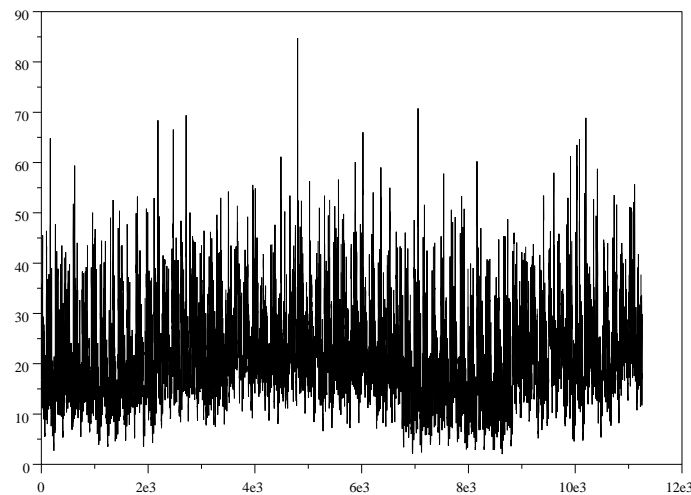
Par définition $(\gamma Y - \delta)^2 / Y \sim \chi_{(1)}^2$ (carré de la gaussienne centrée réduite).

L'algorithme de simulation de Y est alors le suivant

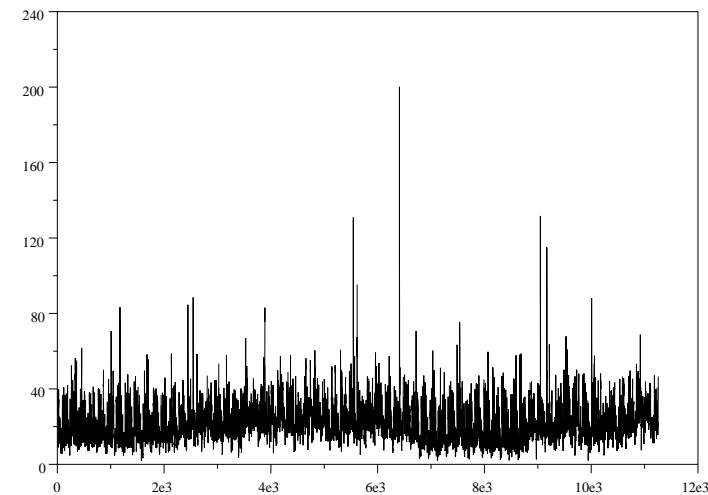
- 1. Générer $M \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et poser $V = M^2$.**
- 2. Poser $Y_1 = \delta/\gamma + V/2\gamma^2 - \sqrt{V\delta/\gamma^3 + (V/2\gamma^2)^2}$, et $Y_2 = (\delta/\gamma)^2/Z_1$,
(les deux solutions de l'équation du second degré $V = (\gamma Y - \delta)^2/Y$).**
- 3. Générer $U \sim U([0, 1])$ une v.a. uniformément dans $[0, 1]$.**
- 4. Si $U < \delta/(\delta + \gamma Y_1)$, poser $Y = Y_1$, sinon poser $Y = Y_2$.**

Simulation de prix gaussien vs NIG

- Meilleure représentation des pics de prix par le modèle factoriel NIG



Prix spot simulé avec bruit **gaussien**



Prix spot simulé avec bruit **NIG**

Notions de "valeurs marché" pour une option

► Valeur comme coût de la couverture

- **Marché complet** : on peut répliquer toute option par un portefeuille de couverture autofinancé rebalancé continuellement. Dans ce cas, on définit la valeur de l'option comme le coût de réplication de cette option à l'aide d'instruments cotés sur le marché i.e. la valeur initiale du portefeuille de couverture.

- **Marché incomplet** : Pour un critère de risque donné (variance, quantile, fonction d'utilité) on cherche le portefeuille de couverture qui minimise la distance (au sens du critère) au flux final de l'option ("pay-off").

► Valeur comme prix n'autorisant pas l'arbitrage

- Pas de notion de couverture.
- Valeur liée à l'existence d'une probabilité martingale ...

Contexte et objectif

► Contexte général

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ espace probabilisé filtré sur $[0, T]$ $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$
- H une variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable à valeurs réelles
- Taux d'intérêt $r = 0$ (pour simplifier l'exposé)

► Modèle de prix du sous-jacent Black-Scholes

- $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$ avec $\mathcal{F}_t = \sigma(S_u \mid 0 \leq u \leq t)$
- où W est un Brownien standard

► Objectif

Valoriser à chaque instant $t \in [0, T]$ l'option rapportant la valeur H à la date T

Règle de valorisation = prix de couverture

► Portefeuille de couverture autofinancé V

- Portefeuille autofinancé

$$V_t = V_0 + \int_0^t \phi_u dS_u \quad \text{pour tout } t \in [0, T]$$

- Portefeuille de couverture

$$V_T = H$$

- ϕ : Stratégie de couverture

► Définition de $\Pi_t(H)$, la valeur de l'option à l'instant t ,

$$\Pi_t(H) = V_t$$

Changement de probabilité

► **Changement de probabilité (Théorème de Girsanov)**

- On définit le processus \tilde{W} tel que

$$\tilde{W}_t = \frac{\mu}{\sigma}t + W_t \quad \text{pour tout } t \in [0, T]$$

- Il existe une unique probabilité \tilde{P} équivalente à P sur $[0, T]$ telle que \tilde{W} est un **Brownien standard sous \tilde{P}**

► S est une martingale sous \tilde{P} car

$$dS_t = S_t \sigma d\tilde{W}_t$$

Théorème de représentation

► Théorème de représentation

- Soit H une v.a. \mathcal{F}_T -mesurable de variance finie sous \tilde{P} ,
il existe un unique processus adapté ψ tel que

$$H = \tilde{\mathbb{E}}[H] + \int_0^T \psi_u d\tilde{W}_u$$

► Application à la recherche du portefeuille de couverture

- On choisit $V_t = V_0 + \int_0^t \phi_u dS_u$ avec $\begin{cases} V_0 = \tilde{\mathbb{E}}[H] \\ \phi_u = \frac{\psi_u}{\sigma S_u} \end{cases}$
- On vérifie que $V_T = H$

Lien entre règle de valorisation et espérance

► Valeur de l'option à l'instant 0

- Prix de l'option à l'instant 0 = valeur initiale du portefeuille de couverture

$$\Pi_0(H) = V_0 = \tilde{\mathbb{E}}[H]$$

► Valeur de l'option à l'instant t = valeur en t du portefeuille de couverture

- V est une martingale sous \tilde{P} donc

$$V_t = \tilde{\mathbb{E}}[V_T | \mathcal{F}_t]$$

⇒ **Formule de valorisation risque neutre**

$$\Pi_t(H) = \tilde{\mathbb{E}}[H | \mathcal{F}_t]$$

Règle de valorisation sans arbitrage

► Contexte général

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t)$ espace mesurable filtré sur $[0, T]$ $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$
- H une variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable à valeurs réelles
- Taux d'intérêt r
- Sous-jacent S tel que $\mathcal{F}_t = \sigma(S_u \mid 0 \leq u \leq t)$
- Objectif : valoriser à chaque instant $t \in [0, T]$ l'option rapportant la valeur H à la date T

► Propriétés souhaitées pour la règle de valorisation Π_t

- **Non anticipativité** $\Pi_t(H)$ \mathcal{F}_t -mesurable
- **Positivité** $H \geq 0 \Rightarrow \Pi_t(H) \geq 0$
- **Linéarité** $\Pi_t(\sum_i H_i) = \sum_i \Pi_t(H_i)$

Lien entre règle de valorisation et espérance

► Soit Π une règle de valorisation, on définit la fonction $\tilde{P} : \mathcal{F}_T \mapsto \mathbb{R}$ telle que

$$\tilde{P}(A) = \frac{\Pi_0(\mathbf{1}_A)}{\Pi_0(1)} = e^{rT} \Pi_0(\mathbf{1}_A) \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{F}_T$$

► \tilde{P} est une mesure de probabilité

- $1 \geq \tilde{P}(A) \geq 0$ (linéarité + positivité)
- $\tilde{P}(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} \tilde{P}(A_i)$ si $A_k \cap A_l = \emptyset$ (linéarité)

► Formule de valorisation “risque neutre”

- Si $H = \sum_{i \in I} c_i \mathbf{1}_{A_i}$ alors $\Pi_0(H) = e^{-rT} \sum_{i \in I} c_i \tilde{P}(A_i)$
 - + Propriété de continuité $\Pi_0(\lim_{n \rightarrow \infty} H_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_0(H_n)$
- $\Rightarrow \Pi_0(H) = e^{-rT} \tilde{\mathbb{E}}[H]$

Cohérence temporelle

► **Propriété de cohérence temporelle**

$$\Pi_0(H) = \Pi_0(e^{r(T-t)} \Pi_t(H))$$

► **Règle de valorisation à l'instant t et espérance conditionnelle**

$$\Pi_t(H) = e^{-r(T-t)} \tilde{\mathbb{E}}[H | \mathcal{F}_t]$$

AOA et probabilité martingale équivalente

► Absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA)

(Impossibilité de gagner de l'argent sans risque)

► Probabilité équivalente

- $\Pi_0(\mathbf{1}_A) = e^{-rT} \tilde{\mathbb{E}}[\mathbf{1}_A] = e^{-rT} \tilde{P}(A)$

+AOA $\Rightarrow \tilde{P}(A) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{F}$

\tilde{P} équivalente à P

► Probabilité martingale

- $\Pi_t(S_T) = S_t$ et $\Pi_t(S_T) = e^{-r(T-t)} \tilde{\mathbb{E}}[S_T | \mathcal{F}_t]$

\Rightarrow Le sous-jacent réactualisé est une martingale sous \tilde{P}

$$\tilde{\mathbb{E}}[e^{-rT} S_T | \mathcal{F}_t] = e^{-rt} S_t$$

Résultat général

► Il y a une relation bijective entre les règles de valorisation Π_t qui respectent les propriétés suivantes :

- **Non anticipativité** $\Pi_t(H)$ \mathcal{F}_t -mesurable
- **Positivité** $H \geq 0 \Rightarrow \Pi_t(H) \geq 0$
- **Linéarité** $\Pi_t(\sum_i H_i) = \sum_i \Pi_t(H_i)$
- **Cohérence temporelle** $\Pi_0(H) = \Pi_0(\Pi_t(H))$
- **AOA** Absence d'Opportunité d'Arbitrage
- **Continuité** $\Pi_0(\lim_{n \rightarrow \infty} H_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_0(H_n)$

et les probabilités martingales \tilde{P} équivalentes à P et Π_t s'écrit

$$\Pi_t(H) = e^{-r(T-t)} \tilde{\mathbb{E}}[H | \mathcal{F}_t]$$

Retour sur le modèle à 1 facteur Lévy

► **Modèle de prix spot / prix à terme**

$$S_t = F(t, t) \quad \text{et} \quad F(t, T, \theta) = \frac{1}{\theta} \sum_{i=0}^{\theta-1} F(t, T + i)$$

► **Modèle à 1 facteur horaire** $(F(t, T))_{t \geq 0} \in \mathbb{R}^+$ pour $T \geq t$

$$\left\{ \begin{array}{l} F(t, T) = F(0, T) \exp\{M(t, T) + e^{-a(T-t)} X_t\} \\ X_t = \int_0^t \sigma(s, t) dL_s \quad \text{avec} \quad \sigma(s, t) = \sigma e^{-a(t-s)} \\ M(t, T) = \int_0^t m(s, T) ds \end{array} \right.$$

où L est un processus de Lévy de caractéristiques (b, c, F) .

Valorisation en non gaussien

- ▶ **Valorisation liée à la couverture** : il y a en général incomplétude du marché i.e. on ne peut pas toujours couvrir une option \Rightarrow on définit le prix par minimisation d'un critère de risque ... **Mesurer l'impact du choix du critère de risque.**
- ▶ **Valorisation risque neutre** : il n'y a en général pas unicité du changement de probabilité martingale \Rightarrow on peut choisir une probabilité martingale avec un critère arbitraire (facilite les calculs, minimise une "distance" (ex : entropie) à la probabilité objectif ...) **Sens du prix résultant ????**

Probabilité martingale en non gaussien : références

- ▶ Jacod, J. and Schiryaev, A. N., *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer Verlag, 2003, Heidelberg, 2nd edition
- ▶ R. Cont and P. Tankov, *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman and Hall 2004 Dans le cadre de modèles de type exponentiel de Lévy.
- ▶ S. Raible. *Lévy Processes in Finance: Theory, Numerics and Empirical Facts* Phd thesis, Université de Freiburg, 2000 Utilisation des processus de Lévy NIG pour les modèles de taux. Etude de l'existence et de l'unicité de la probabilité martingale
- ▶ E. Eberlein, J. Jacod and S. Raible. *Lévy term structure models: no-arbitrage and completeness*. Publication de l'Université de Freiburg, 2003 Toujours pour un modèle de taux : conditions d'existence et preuve de l'unicité de la probabilité martingale lorsque l'ensemble des maturités des produits à terme disponibles est dense dans $[0, T^*]$

En réutilisant ici les idées et le formalisme de ce dernier papier ...

Caractéristiques d'un changement de probabilité

- ▶ On introduit la mesure m sur $\Omega \times [0, T^*]$ définie par $m(d\omega, dt) = P(d\omega) dt$
- ▶ Soit β processus prévisible réel et Y fonction prévisible > 0 vérifiant certaines conditions d'intégrabilités
- ▶ Soit la relation d'équivalence \sim telle que $(\beta, Y) \sim (\beta', Y')$ si

$$Q(\Delta\beta_t, \Delta Y_t) = 0 \quad m - \text{p.p. sur } \Omega \times [0, T^*] \quad \text{avec}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\beta_t = \beta'_t - \beta_t \quad \text{p.s.} \\ \Delta Y_t(x) = Y'_t(x) - Y_t(x) \quad \text{p.s.} \\ Q(v, f) = cv^2 + \int |f(x)|F(dx) \quad \text{pour tout } f \text{ mesurable et } v \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

- ▶ On note \mathcal{Y} l'ensemble des classes d'équivalence des couples (β, Y)

Théorème de Girsanov

L processus de Lévy sous P de caractéristiques (b, c, F) - $\tilde{P} \stackrel{\text{loc}}{\sim} P$ sur $[0, T^*]$

► L semimartingale sous \tilde{P} de caractéristiques $(\tilde{b}_t, \tilde{c}_t, \tilde{F}_t)$

► Il existe $(\beta, Y) \in \mathcal{Y}$ tel que presque sûrement

- $\tilde{b}_t = b + c\beta_t + \int_{|x| \leq 1} x(Y_t(x) - 1)F(dx)$

- $\tilde{c}_t = c$

- $\tilde{F}_t(dx) = Y_t(x)F(dx)$

► La densité de \tilde{P} par rapport à P est donnée par

$$Z_t = Z_0 \mathcal{E}(M)_t \quad \text{avec} \quad M_t = \int_0^t \beta_s dL_s^c + \int_0^t \int (Y_s(x) - 1) d(\mu - \nu) \quad \text{avec ,}$$

μ la mesure aléatoire des sauts de L et $\nu = F dt$ est le compensateur associé.

$\Rightarrow (\beta, Y)$ détermine complètement le changement de probabilité.

Existence du changement de probabilité martingale

► Résultat d'existence d'une probabilité martingale locale

Soient $\tilde{P} \stackrel{\text{loc}}{\sim} P$ sur $[0, T^*]$ et $(\beta, Y) \in \mathcal{Y}$ le couple de \mathcal{Y} associé

$(F(t, T))$ est une martingale locale sous \tilde{P} ssi les conditions suivantes sont vérifiées :

- **Condition de majoration** presque sûre

$$\int_0^T \int_{x>1} e^{\sigma(t,T)x} Y_t(x) F_t(dx) dt < \infty$$

- **Condition de dérive** m -presque partout

$$m(t, T) = -\tilde{\phi}_t(\sigma(t, T)), \quad m - \text{p.p. dans } \Omega \times [0, T],$$

où pour tout u tel que $|u| \leq \sup\{\sigma(t, T) \mid T \geq t \text{ et } T \in \mathcal{T}\}$,

$$\tilde{\phi}_t(u) = u\tilde{b}_t + \frac{1}{2}u^2\tilde{c}_t + \int_{\mathbb{R}} [e^{ux} - 1 - uxI_{|x|\leq 1}] \tilde{F}_t(dx) \quad p.s..$$

Transformation du paramètre α

Soit $\tilde{P}^\theta \stackrel{\text{loc}}{\sim} P$ sur $[0, T^*]$ défini par le couple $(\beta, Y) \in \mathcal{Y}$ donné par

$$\beta_t = 0, \quad \text{et} \quad Y(\omega, t, x) = \frac{\theta(t)K_1(\theta(t)|x|)}{\alpha K_1(\alpha|x|)} \quad p.s. \quad \text{pour tout } (t, x) \in [0, T^*] \times \mathbb{R}.$$

► On montre que la densité du changement de probabilité Z^θ s'écrit

$$Z_t^\theta = \mathcal{E} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} (Y_s(x) - 1) d(\mu - \nu) \right) \quad \text{pour tout } t \in [0, T^*].$$

► $(F(t, T))_t$ est une martingale sous \tilde{P}^θ ssi, pour tout $t \in [0, T]$

- **Condition de majoration** $|\sigma(t, T) + \beta| < \theta(t)$
- **Condition de dérive** $m(t, T) = D(\sigma(t, T), \alpha, \beta, \delta, \mu, \theta(t))$

► Dans le cas où θ est constant par morceaux $\theta(s) = \theta_k > |\beta|$ pour $s \in [k, k+1)$, alors sous \tilde{P}^θ , L est un PAI et $\Delta L_k \sim NIG(\tilde{\alpha}_k = \theta_k, \beta, \delta, \mu)$.

Transformation du paramètre β : transformée d'Esscher

► Soit $\tilde{P}^\theta \stackrel{\text{loc}}{\sim} P$ sur $[0, T^*]$ défini par le couple $(\beta, Y) \in \mathcal{Y}$ donné par

$$\beta_t = 0, \quad \text{et} \quad Y(\omega, t, x) = e^{\theta(t)x} \quad p.s. \quad \text{pour tout } (t, x) \in [0, T^*] \times \mathbb{R}.$$

► On montre que la densité du changement de probabilité Z^θ s'écrit pour tout $t \in [0, T^*]$ par

$$Z_t^\theta = \exp \left\{ \int_0^t \theta(s) dL_s - \int_0^t \Phi(\theta(s)) ds \right\}.$$

► On peut procéder par une autre approche et définir le changement de probabilité directement par la forme de la densité (et non en partant du couple (β, Y)). Par exemple, on peut se placer directement dans le cadre de la transformée d'Esscher ...

Transformation d'Esscher

► L un processus de Lévy de mesure de Lévy F et tel que sa log-transformé de Laplace $\Phi : u \mapsto \log(\mathbb{E}[e^{uL_1}])$ existe autour de zéro.

► $\theta : [0, T^*] \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable telle que $\int_{|x|>1} \exp[\sup_s |\theta(s)| |x|] F(dx) < \infty$.

► On appelle transformation d'Esscher le changement de probabilité paramétré par θ passant de P à \tilde{P}^θ avec la densité $Z_t^\theta = \frac{d\tilde{P}_t^\theta}{dP_t}$ de la forme :

$$Z_t^\theta = \exp \left\{ \int_0^t \theta(s) dL_s - \int_0^t \Phi(\theta(s)) ds \right\} \quad \forall t \in [0, T^*].$$

► En particulier si L est un Lévy de type NIG tel que $L_1 \sim NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$

$$\Phi(u) = u\mu + \delta \left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2} \right) \quad \forall |\beta + u| < \alpha,$$

et la fonction θ doit vérifier la condition suivante :

$$|\theta(t)| < \alpha \quad \text{et} \quad |\theta(t) + \beta| < \alpha \quad \forall t \in [0, T^*]$$

Caractère martingale de $(Z_t^\theta)_{0 \leq t \leq T^*}$

► Si $(G_t)_{0 \leq t \leq T^*}$ est un PAI alors $e^{G_t} / \mathbb{E}[e^{G_t}]$ est une martingale

On remarque que $\mathbb{E}[e^{G_t} | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[e^{G_t - G_s} e^{G_s} | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[e^{G_t - G_s}] e^{G_s}$.

Par conséquent $\mathbb{E} \left[\frac{e^{G_t}}{\mathbb{E}[e^{G_t}]} \mid \mathcal{F}_s \right] = \frac{\mathbb{E}[e^{G_t} | \mathcal{F}_s]}{\mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{G_t} | \mathcal{F}_s]]} = \frac{e^{G_s}}{\mathbb{E}[e^{G_s}]}$.

► Soit $u : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée telle que $\Phi(u(s))$ est bien définie pour tout $s \in [0, t]$ alors

$$\mathbb{E} \left[\exp \left\{ \int_0^t u(s) dL_s \right\} \right] = \exp \left\{ \int_0^t \Phi(u(s)) ds \right\} \quad \text{où} \quad \Phi(u) = \log \mathbb{E}[e^{uL_1}],$$

► Les 2 propriétés précédentes appliquées à $Z_t^\theta = e^{G_t^\theta} / \mathbb{E}[e^{G_t^\theta}]$ avec

$$G_t^\theta = \int_0^t \theta(s) dL_s, \quad \text{pour tout } t \in [0, T]$$

induisent le caractère martingale de $(Z_t^\theta)_{0 \leq t \leq T^*}$.

Condition d'existence d'une probabilité risque neutre

► $\tilde{P}^\theta \sim P$ sur $[0, T^*]$ de densité Z^θ

► Supposons que θ vérifie pour tout $T \in [0, T^*]$ et pour tout $t \in [0, T]$:

$$|\theta(t) + \sigma(t, T) + \beta| < \alpha$$

► Alors les processus $(F(t, T))_{t \in [0, T]}$ sont des martingales sous \tilde{P}^θ , pour toute maturité $T \in [0, T^*]$, si et seulement si la condition de dérive suivante est vérifiée :

$$m(t, T) = \Phi(\theta(t)) - \Phi(\sigma(t, T) + \theta(t)) .$$

Loi de L sous la nouvelle probabilité

► **Objectif : identifier les caractéristiques de la semimartingale L sous \tilde{P}^θ**

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_t(u) &= \log \left[\tilde{\mathbb{E}} \left[\exp(uL_t) \right] \right] = \log \left[\mathbb{E} \left[\exp(uL_t) Z_t^\theta \right] \right] \\ &= \log \left[\mathbb{E} \left[\exp(uL_t) \exp\left(\int_0^t \theta(s) dL_s \right) \exp\left(- \int_0^t \Phi(\theta(s)) ds \right) \right] \right]\end{aligned}$$

On obtient finalement, $\tilde{\Phi}_t(u) = \int_0^t [\Phi(\theta(s) + u) - \Phi(\theta(s))] ds .$

On rappelle que $\Phi(u) = ub + \frac{u^2}{2}c + \int (e^{ux} - 1 - uxI_{|x|\leq 1})F(dx) .$

► **On en déduit les nouvelles caractéristiques de L sous \tilde{P}^θ :**

$$\begin{cases} \tilde{b}_t &= b + c\theta(t) + \int_{|x|\leq 1} x(\tilde{F}_t(dx) - F(dx)) \\ \tilde{c} &= c \\ \tilde{F}_s(dx) &= e^{\theta(s)x} F(dx), \forall x \in \mathbb{R} . \end{cases}$$

Etude sous la nouvelle probabilité

- **Transformation de la mesure des sauts** à chaque instant $t \in [0, T^*]$ F se transforme en \tilde{F} tel que

$$\tilde{F}_t(dx) = e^{\theta(t)} F(dx) = e^{(\beta + \theta(t))x} \frac{\delta \alpha}{\pi |x|} K_1(\alpha |x|) dx \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} .$$

- **Si la fonction θ est constante par morceaux** sur chaque heure :

$$\forall t \in [t_n, t_{n+1}[\quad \theta(t) = \theta_n$$

- **Alors le changement de probabilité se traduit sur la mesure de Lévy par une translation du paramètre d'asymétrie :**

$$\beta \quad \longrightarrow \quad \beta + \theta_n$$

- **Conclusion** : on montre que sous \tilde{P}^θ

$$L_{t_{n+1}} - L_{t_n} \sim NIG(\alpha, \beta + \theta_n, \delta, \mu)$$

Calage des paramètres du modèle

► **Calage des paramètres historiques à partir des données de prix spot**

$$S_T = F(T, T) = F(0, T) \exp\{M(T, T) + X_T\}, \text{ avec } X_T = \int_0^T e^{-a(T-s)} dL_s.$$

- **Les paramètres (a, σ) sont calés par moindres carrés**
- **Les paramètres $(\alpha, \beta, \delta, \mu)$ NIG sont calés par maximum de vraisemblance**

► **Calage de la condition de dérive i.e. du changement de probabilité à partir de la courbe de prix à terme initiale reconstruite $(F(0, T))_{T \in [0, T^*]}$ et de la saisonnalité $(D_T)_{T \in [0, T^*]}$ estimée sur le spot**

$$\begin{aligned} M(T, T) &= -\log \left(\frac{F(0, T)}{D_T} \right) \quad \text{car } D_T = \mathbb{E}[\log S_T] \\ &= \int_0^T m(s, T) ds = \int_0^T [\Phi(\theta(s)) - \Phi(\sigma(s, T) + \theta(s))] ds. \end{aligned}$$

Transformation des paramètres α et β

Soit L un processus de Lévy de type NIG sous P

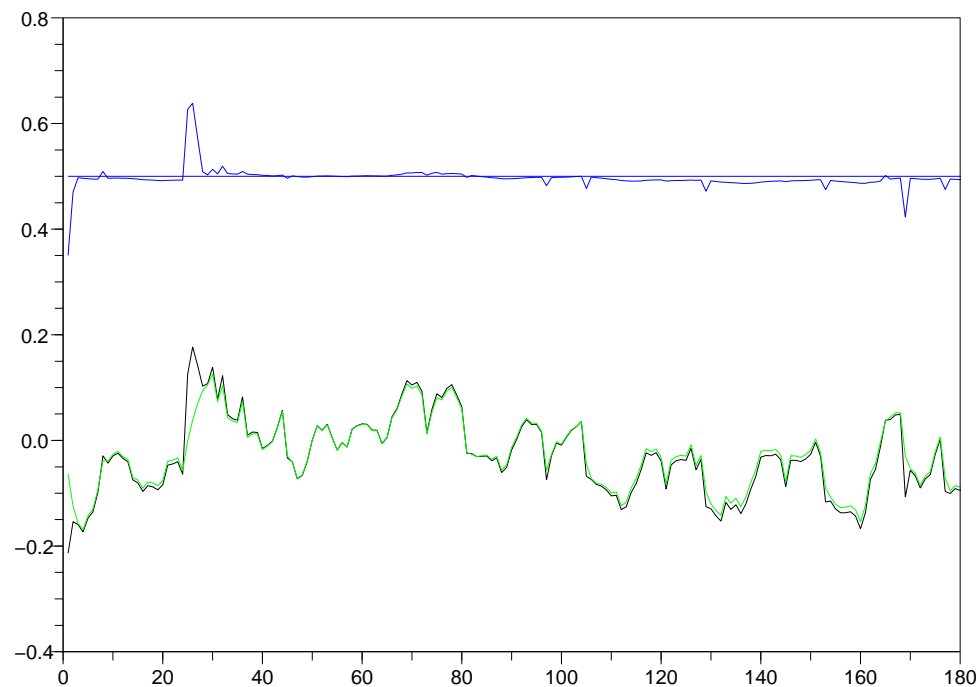
$$L_1 \sim NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$$

► Il existe une probabilité $\tilde{P} \stackrel{\text{loc}}{\sim} P$ telle que L soit encore un processus de Lévy de type NIG de paramètres $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\delta}, \tilde{\mu})$ sous \tilde{P} ssi

$$\begin{cases} \tilde{\delta} & = & \delta \\ \tilde{\mu} & = & \mu \end{cases}$$

Calage de la condition de dérive

► Calage de θ tel que $\log \left(\frac{F(0,T)}{D_T} \right) = \int_0^T [\Phi(\sigma(s, T) + \theta(s)) - \Phi(\theta(s))] ds$



Prix d'options européennes sur spot

► **Comparaison avec le modèle gaussien** pour différents prix d'exercice et maturités

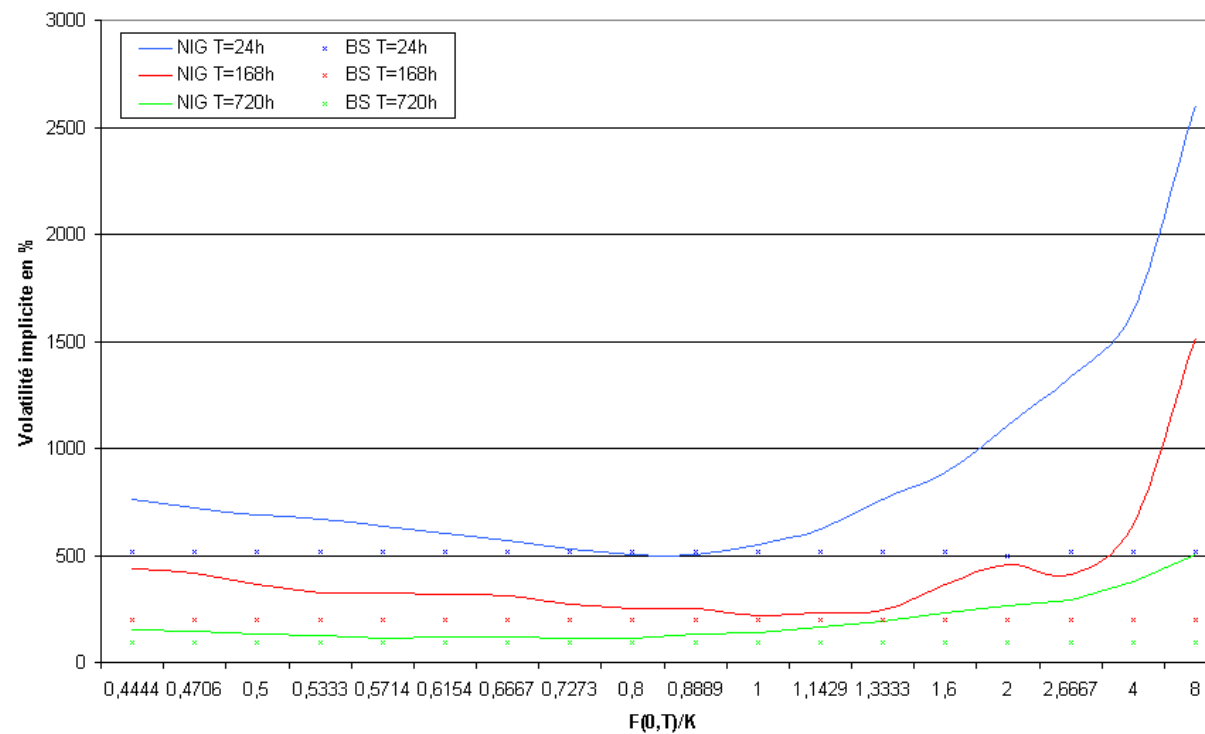
● **Prix à terme de 40 Euros**

		Strike				
		NIG (BS)	75	100	150	180
Maturité	1 Mois	1,08 (0,05)	0,65 (0,00)	0,35 (0,00)	0,26 (0,00)	
	2 Mois	0,68 (0,05)	0,38 (0,00)	0,21 (0,00)	0,12 (0,00)	
	3 Mois	0,12 (0,06)	0,03 (0,00)	0,01 (0,00)	0,01 (0,00)	

Smile de volatilité

► Smile de volatilité pour différentes maturités

Smile de volatilité du call



Conclusions et perspectives

► Conclusions

- La **représentation des pics de prix** demande le recours des modèles complexes qui posent des difficultés numériques notamment pour la valorisation

- **Incomplétude** du marché : quel paradigme pour la valorisation ?
- Impact de **l'approximation horaire** de la courbe de prix à terme ?

► Perspectives autour du modèle NIG

- Comparaison des prix fournis par le modèle NIG à des **prix de référence**
- Test sur des options de type **swing** en dehors de la monnaie
- Recherche d'une **couverture** associée

Références (1/2)

- **[Heath-Jarrow-Morton-1987]. D. Heath, R. A. Jarrow, A. Morton, Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology, working paper, Cornell University, 1987**
- **[Clewlow-Strickland-2000]. L. Clewlow, C. Strickland, Energy derivatives. Pricing and Risk management, Lacima Publications, 2000**
- **[Lucia-Schwartz-2002]. J. J. Lucia, E. S. Schwartz, Electricity prices and power derivatives: Evidence from the Nordic Power Exchange 2002, Review of Derivatives Research, Vol. 5, pp. 5-50, 2002**
- **[Hobson-Rogers-1998]. D. G. Hobson and L. C. G. Rogers, Complete Models with Stochastic Volatility, Mathematical Finance, pp. 27-48, 1998**
- **[Jeantheau-2004]. T. Jeantheau, A link between complete models with stochastic volatility and ARCH models, Finance and Stochastics, pp. 111-131, 2004**

Références (2/2)

- **[Collet-Duwig-Oudjane-2006]. J. Collet, V. Duwig, N. Oudjane, Some non-Gaussian models for electricity spot prices, PMAPS 2006**
- **[Barlow-2002]. M. T. Barlow, A Diffusion Model for Electricity Prices, Mathematical Finance, pp. 287-298, 2002**
- **[Benth-2003]. F. E. Benth and J. Saltyte-Benth, The normal inverse gaussian distribution and spot price modelling in energy markets, Centre of Mathematics for Applications Department of Mathematics, 2003**
- **[Cont-Tankov-2004]. R. Cont and P. Tankov, Financial Modelling with Jump Processes, Chapman and Hall 2004**
- **[Jacod-Schiryaev-2003], Jacod, J. and Schiryaev, A. N., Limit Theorems for Stochastic Processes, Springer Verlag, 2003, Heidelberg, 2nd edition**
- **[Raible-2000]. S. Raible, Lévy Processes in Finance: Theory, Numerics and**

.1pt=0.48215.1pt

Empirical Facts, Phd thesis, Université de Freiburg, 2000

- **[Eberlein-Jacod-Raible-2003]. E. Eberlein, J. Jacod and S. Raible, Lévy term structure models: no-arbitrage and completeness, Publication de l'Université de Freiburg, 2003**