

Valorisation d'option par processus Normal Inverse Gaussien: Application aux actifs de stockage gaz Processus de Levy sur les marchés de l'énergie

Xavier Warin

EDF R&D

Le 28 février 2011

- 1 Introduction
- 2 Processus NIG
- 3 Modèle NIG pour l'énergie
- 4 Options dans le domaine de l'énergie
- 5 Fast Fourier Transform pour options européennes
- 6 Méthode de Monte Carlo
- 7 EDP pour option
- 8 Actif de stockage gaz

Caractéristique des prix de l'énergie et modèle factoriel

Principales caractéristiques des prix du gaz

- Saisonnalité multi-échelle
- Retour à la moyenne
- Pics de prix

Dynamique prix futures $F(t, T)$ (prix en t pour une unité livrée en T) déformation d'une courbe future initiale constante par jour, noté $F(0, T)$.

- granularité horaire pour l'électricité,
- granularité journalière pour le gaz

Modèles à facteur : **Prix future** :

$$F(t, T) = F(0, T)G(t, T), \quad \forall 0 \leq t \leq T$$

où $G(t, T)$, terme aléatoire positif

Le modèle gaussien classique

$$\frac{dF(t, T)}{F(t, T)} = \sigma_S(t) e^{-a_S(T-t)} dz_t^S$$

avec :

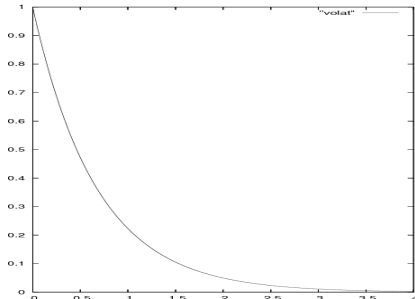
- z_t un brownien sur l'espace (Ω, F, P) associé à la filtration $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, \tau]\}$,
- σ_S volatilité court terme .
- a_S coefficient de retour à la moyenne.

Processus martingale (prime de risque nulle)

Problème associé au modèle gaussien à un facteur

$$\sigma(t, T) = \sigma_S(t) e^{-as(T-t)}$$

volatilité du future en fonction de la maturité.



Un modèle gaussien plus complexe

$$\frac{dF(t, T)}{F(t, T)} = \sum_{i=1}^N \sigma_i(t) e^{-a_i(T-t)} dz_t^i$$

dans la pratique 2 ou trois facteurs

Prix spot S_t à partir des prix futures $F(t, T)$

$$S_t = \lim_{T \rightarrow t} F(t, T), \quad \forall 0 \leq t \leq T$$

Un modèle à deux facteurs avec pics

$$F(t, T) = F(t_0, T) e^{M(t, T) + \int_0^t \sigma_S(u) e^{-a_S(T-u)} dL_u + \int_0^t e^{-a_L(T-u)} \sigma_L(u) dZ_u^L}$$

- L_t processus de Levy de type Normal Inverse Gaussien
 - paramètre $\alpha, \beta, \delta, \mu$
 - variance égale à t .
- $M(t, T)$ tel que $F(t, T)$ martingale

Caractéristiques du processus NIG

- Processus hyperbolique,
- Stable par composition,
- Défini par 4 paramètres :
 - α paramètre d'épaisseur de queue,
 - β paramètre d'asymétrie de distribution,
 - δ paramètre d'échelle,
 - μ paramètre de trend

Simulation

- 1 (U_t, V_t) processus brownien standard bi-dimensionnel
 - partant du point $(0, 0)$,
 - avec un vecteur de drift (β, γ) , où $\gamma > 0$
- 2 $\tau(t)$ première fois que seconde composante V_t atteint la valeur $\delta t > 0$ avec $\delta > 0$ $\{\tau(t) : t > 0\}$ processus Inverse Gaussien

$$X_t = \mu t + U_{\tau(t)}$$

processus Normal Inverse Gaussien de paramètre $\alpha, \beta, \delta t, \mu t$ avec $\alpha = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$

Densité

$$f_{NIG(\alpha,\beta,\delta,\mu)}(x) = \frac{\alpha}{\pi} \exp(\delta\gamma + \beta(x - \mu)) \frac{K_1(\alpha\delta\sqrt{1 + (x - \mu)^2/\delta^2})}{\sqrt{1 + (x - \mu)^2/\delta^2}}$$

K_1 fonction de Bessel modifiée de type 3 d'ordre 1

Propriétés

- stabilité par convolution pour α et β constants.

X_1, X_2 indépendants telles que

$$X_i \sim NIG(\alpha, \beta, \delta_i, \mu_i), \quad i = 1, 2$$

$$X_1 + X_2 \sim NIG(\alpha, \beta, \delta_1 + \delta_2, \mu_1 + \mu_2)$$

- fonction caractéristique

$$\phi_{X_{NIG}(t, \alpha, \beta, \delta, \mu)}(u) = E[e^{iuX_{NIG}(t, \alpha, \beta, \delta, \mu)}] = e^{i\mu tu} \exp(t\delta\gamma) \exp(-t\delta\sqrt{\alpha^2 - (\beta + iu)^2})$$

- moments du processus

$$E(X_{NIG}(t, \alpha, \beta, \delta, \mu)) = \mu t + \frac{\delta t \beta}{\gamma},$$

$$E((X_{NIG}(t, \alpha, \beta, \delta, \mu) - E(X_{NIG}(t, \alpha, \beta, \delta, \mu)))^2) = \frac{\delta t \alpha^2}{\gamma^3}$$

Propriétés

- mesure de Lévy singulière en 0

$$K_{NIG}(x) = \frac{\delta\alpha}{\pi |x|} K_1(\alpha |x|) e^{\beta x}$$

équivalent en zéro ;

$$x^2 K_{NIG}(x) \simeq \frac{\delta}{\pi} + \frac{\delta\beta}{\pi} x + O(x^2)$$

- Changement d'échelle

$$X_t \sim NIG(\alpha, \beta, \delta t, \mu t)$$

$$\sigma X_t \sim NIG(\alpha/\sigma, \beta/\sigma, \sigma\delta t, \sigma\mu t)$$

Un modèle de Levy à deux facteurs

- Un facteur court terme avec processus de Levy et mean reverting
- Un facteur long terme de diffusion

$$F(t, T) = F(t_0, T) e^{M(t, T) + \int_0^t \sigma_S(u) e^{-a_S(T-u)} dL_u + \int_0^t e^{-a_L(T-u)} \sigma_L(u) dZ_u^L}$$

- L_t processus Normal Inverse Gaussien $\alpha, \beta, \delta, \mu = 0$
- variance égale à t .

$$\frac{\delta \alpha^2}{\gamma^3} = 1$$

Lemme : Fonction log caractéristique pour intégrale de Levy

Soit θ fonction log caractéristique de L_1

$$E \{ \exp i u L_1 \} = \exp \theta(u)$$

alors

$$E \left\{ \exp i \int_0^T f(t) dL_t \right\} = \exp \int_0^T \theta(f(t)) dt$$

Dem : Pour fonction constante par morceaux sur $[t_i, t_{i+1}]$ (stationnarité et indépendance incréments)

$$\begin{aligned} E \left\{ \exp i \int_0^T f(t) dL_t \right\} &= \prod_{i=1}^N E(e^{if_i(L_{t_i} - L_{t_{i-1}})}) = \prod_{i=1}^N E(e^{if_i L_{\Delta t}}) = \prod_{i=1}^N (E(e^{if_i L_1}))^{\Delta t} \\ &= \prod_{i=1}^N (e^{\theta(f_i)})^{\Delta t} = e^{\int_0^T \theta(f(t)) dt} \end{aligned}$$

Condition de non arbitrage

Le processus de prix doit être martingal sous la probabilité risque neutre

$$E \left(e^{\int_0^t \sigma_S(u) e^{-as(T-u)} dL_u + \int_0^t \sigma_L(u) e^{-aL(T-u)} dz_u^L} \right) = e^{-M(t,T)}$$

Soit

$$M(t, T) = -\log \left(E \left(e^{\int_0^t \sigma_S(u) e^{-as(T-u)} dL_u} \right) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_L^2(s) e^{-2aL(T-s)} ds \right)$$

Lemme précédent

$$E \left(e^{\int_0^t \sigma_S(u) e^{-as(T-u)} dL_u} \right) = \exp \left(\theta \left(-i \int_0^t \sigma_S(u) e^{-as(T-u)} du \right) \right)$$

Pour processus NIG, la fonction log caractéristique de L_1 vérifie (si $\mu = 0$) :

$$\theta(-iu) = \delta\gamma - \delta\sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2}$$

$$M(t, T) = -\int_0^t \delta(\gamma - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + \sigma_S(s)e^{-a(T-s)})^2}) ds - \frac{1}{2}\sigma_L^2(s)e^{-2a_L(T-s)} ds$$

De plus le prix spot

$$S(t) = F(t_0, t)e^{M(t, t) + \int_0^t \sigma_S(u)e^{-as(t-u)} dL_u + \int_0^t e^{-2a_L(t-u)} \sigma_L(u) dZ_u^L}$$

Différence gaz électricité

- options sur une quantité d'énergie livrée à un point donné (hub pour le gaz)
- options pour une livraison d'un ruban d'énergie sur le réseau d'une puissance donnée
 - continue : livraison base pendant une période donnée
 - non continue : livraison pendant les heures "peak" d'une période donnée

Notation : $F(t, T, \theta)$ un future à la date t pour livraison de T à $T + \theta$

Les options classiques

- ① européenne, h préavis de livraison de l'option

$$(F(T - h, T, T + \theta) - K)^+$$

- ② américaine pour une période de livraison donnée (choix de la date d'activation)

$$(F(t, T, T + \theta) - K)^+$$

cotations (month, quarter, year base peak)

- ③ américaine pour une période de livraison au choix jusqu'à la maturité (pas de cotation sur le marché)

$$(F(t - h, t, \theta) - K)^+$$

- ④ option asiatique

$$\left(\frac{1}{h} \int_{T-h}^T F(t, T, \theta) dt - K\right)^+$$

Les options swing en électricité

- Un ensemble de dates d'exercice t_i possibles,
- Contrainte locale : $q_{min} \leq q_i \leq q_{max}$ si exercice en t_i ,
- Contrainte globale $Q_{min} \leq Q = \sum_i q_i \leq Q_{max}$,
- Pay Off $(S_t - K)^+$

- variante : pas de contrainte globale,
- variante : imposer un nombre d'exercice minimum sur la période

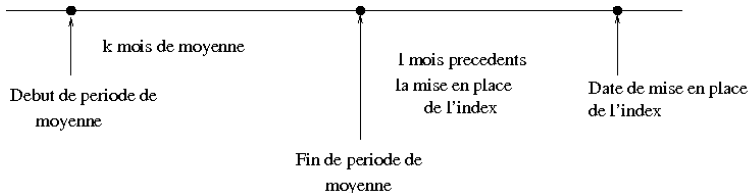
Les options swing gazières

- option swing journalière avec contraintes globales Q_{min} Q_{max} , locales q_{min} , q_{max}
- Pay Off $S_t - K_t$
- K_t index $a_0 + \sum_{j=1}^N a_j \tilde{S}_t^j$

Caractéristique du strike (k, l, p)

- N est le nombre commodity à prendre en compte (divers index pétroliers + gaziers)
- \tilde{S}_t^j moyenne du prix spot S_s^j pendant k mois précédents les l derniers mois précédents la date \tilde{t} début de validité du strike.
- le strike est valable p mois.

Les options swing gazière



$$K_t = a_0 + \sum_{i=1}^N a_i \frac{1}{kMonth} \sum_{j=j_0-(k+l)Month}^{j_0-lMonth} S_j^i$$

pour $t = j_0, j_0 + pMonth$

Fast Fourier Transform pour options européennes

- Pas de solution analytique
- Utilisation de la fonction caractéristique du log de l'actif : essayer de relier la transformée de Fourier d'une option à la transformée de Fourier du processus associé au sous jacent.
- Utilisation de la parité call put pour valorisation du put.

$$P(t, K, T) = C(t, K, T) + e^{-r(T-t)}(K - S(T))$$

Fonction caractéristique du log du prix spot

$$F(t, T) = F(t_0, T) e^{M(t, T) + \int_0^t \sigma_S(u) e^{-a(T-u)} dL_u + \int_0^t e^{-aL(T-u)} \sigma_L(u) dZ_u^L}$$

Fonction caractéristique du log du prix
 $X_T = \log(F(T, T)/F(t_0, T))$

$$\phi_T(u) = E(\exp(iuX_T) = \exp\{iuM(T, T)\} \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_0^T \sigma_L^2(v) e^{-2aL(T-v)} dv u^2 + \int_0^T dv \delta(\gamma - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + iu\sigma_S e^{-as(T-v)})^2}\right\}$$

FFT pour options dans la monnaie (Madan) (1)

$q_T(s)$ la densité du log du prix normalisé, par définition de la fonction caractéristique

$$\phi_T(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ius} q_T(s) ds$$

$$k = \ln(K/F(t_0, T))$$

$$\begin{aligned} C(T, K) &= F(t_0, T) \tilde{C}(k) = F(t_0, T) E(e^{-rT} (e^{X_t} - e^k)^+) \\ &= F(t_0, T) \int_k^{\infty} e^{-rT} (e^s - e^k) q_T(s) ds \end{aligned}$$

On ne peut prendre la transformée de Fourier de \tilde{C} :

- \tilde{C} non L_2 ($\lim_{k \rightarrow -\infty} C(T, K) = F(t_0, T)$)
- $c(k) = \tilde{C}(k) \exp(\kappa k)$ pour κ positif L_2

FFT pour options dans la monnaie (2)

$$\begin{aligned}
 \psi(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuk} c(k) dk, \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuk} \int_k^{\infty} e^{\kappa k} e^{-rT} (e^s - e^k) q_T(s) ds dk, \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} q_T(s) \int_{-\infty}^s (e^{s+\kappa k} - e^{(1+\kappa)k}) e^{iuk} dk ds, \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} q_T(s) (e^{s+\kappa s+ius} / (\kappa + iu) - e^{(1+\kappa)s+isu} / (1 + \kappa + iu)) ds, \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} q_T(s) (e^{is(u-i(1+\kappa))} / (\kappa + iu) - e^{is(u-i(1+\kappa))} / (1 + \kappa + iu)) ds, \\
 &= e^{-rT} \phi_T(u - (\kappa + 1)i) \left(\frac{1}{\kappa + iu} - \frac{1}{1 + \kappa + iu} \right) \\
 &= \frac{e^{-rT} \phi_T(u - (\kappa + 1)i)}{\kappa^2 + \kappa - u^2 + i(2\kappa + 1)u}
 \end{aligned}$$

Transformation de fourier inverse :

$$\tilde{C}(k) = \frac{\exp(-\kappa k)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuk} \psi(u) du$$

FFT pour options dans la monnaie (3)

$\tilde{C}(k)$ réel : $\psi(u) = \psi_R(u) + i\psi_I(u)$

$$\tilde{C}(k) = \frac{\exp(-\kappa k)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(uk) - i\sin(uk))(\psi_R(u) + i\psi_I(u)) du$$

$\psi(u)$ impair pour sa partie imaginaire et pair sa partie réelle.

$$\tilde{C}(k) = \frac{\exp(-\kappa k)}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-iuk} \psi(u) du$$

Remarques pour cette première approche

- ψ pas défini pour $\kappa = 0$.
- si κ trop grand, l'intégrabilité non réalisée pour k positifs (en dehors de la monnaie).
- κ à adapter aux paramètres utilisés.
- solution oscillante pour options en dehors de la monnaie.

FFT pour pricing en dehors de la monnaie (1)

$Z_T(k)$ fonction ayant pour valeur

- 1 le prix du put à maturité si $k = \log(K/F(t_0, T)) < 0$.
- 2 le prix du call si $k > 0$.

Utilisation de la FFT :

$$\begin{cases} \xi_T(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivk} Z_T(k) dk \\ Z_T(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivk} \xi_T(v) dv. \end{cases}$$

$$Z_T(k) = e^{-rT} F(t_0, T) \int_{-\infty}^{\infty} \left[(e^k - e^s) \mathbf{1}_{s < k; k < 0} + (e^s - e^k) \mathbf{1}_{s > k; k > 0} \right] q_T(s) ds$$

$$\begin{aligned} \xi_T(k) = & F(t_0, T) \int_{-\infty}^0 dke^{ivk} e^{-rT} \int_{-\infty}^k (e^k - e^s) q_T(s) ds + \\ & F(t_0, T) \int_0^{\infty} dke^{ivk} e^{-rT} \int_k^{\infty} (e^s - e^k) q_T(s) ds. \end{aligned}$$

FFT pour pricing en dehors de la monnaie (2)

$$\begin{aligned}
 \xi_T(k) &= F(t_0, T) \int_0^0 ds e^{-rT} q_T(s) \int_0^0 (e^{(1+iv)k} - e^s e^{ivk}) dk + \\
 & F(t_0, T) \int_0^{-\infty} ds e^{-rT} q_T(s) \int_0^s (e^s e^{ivk} - e^{(1+iv)k}) dk. \\
 &= F(t_0, T) \int_0^{+\infty} ds e^{-rT} q_T(s) \int_s^0 (e^{(1+iv)k} - e^s e^{ivk}) dk \\
 &= F(t_0, T) \int_0^{-\infty} ds e^{-rT} q_T(s) \frac{1}{1+iv} (1 - e^{(1+iv)s}) - \frac{1}{iv} (e^s - e^{(1+iv)s})
 \end{aligned}$$

ϕ_T fonction caractéristique du log du prix ($\phi_T(-i) = 1$) :

$$\xi_T(v) = F(t_0, T) e^{-rT} \frac{1}{(1+iv)iv} [\phi_T(v-i) - 1]$$

Non définie en $v = 0$. $\xi_T(k)$ tend vers l'infini quand k est proche de 0.

FFT pour pricing en dehors de la monnaie (3)

Utiliser la transformée de Fourier de $\sinh(\kappa k)Z_T(k)$.

$$\begin{aligned}\mu_T(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivk} \sinh(\kappa k) Z_T(k) dk, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivk} \frac{e^{\kappa k} - e^{-\kappa k}}{2} Z_T(k) dk, \\ &= \frac{\xi_T(v - i\kappa) - \xi_T(v + i\kappa)}{2}\end{aligned}$$

$$Z_T(k) = \frac{1}{\sinh(\kappa k)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivk} \mu_T(v) dv.$$

Méthode améliorée pour la FFT (Tankov)(1)

Modèle de type Black pour les futures :

$$\tilde{F}(t, T) = F(t_0, T) \exp\left(-\frac{\Sigma(t_0, t, T)^2}{2} t + \Sigma(t_0, t, T) w_t\right)$$

$$C_{B,T}(k) = e^{-r(T-t)} (F(t_0, T) * N(d) - kN(d - \Sigma(t_0, T, T)\sqrt{T}))$$

$$d = \frac{\log F(t_0, T)/k + 0.5 * \Sigma(t_0, t, T)^2 T}{\Sigma(t_0, t, T)\sqrt{T}};$$

$$\tilde{C}_B^{\Sigma, T}(k) = C_{B,T}(k)/F(t_0, T)$$

$$\tilde{C}(k) = \int_k^\infty e^{-rT} (e^s - e^k) q_T(s) ds - \tilde{C}_{B,T}(k)$$

Fonction L_2 intégrable en k : application de la FFT possible

Méthode améliorée pour la FFT (2)

$$\begin{cases} \psi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuk} \zeta(k) dk \\ C(T, K) = \frac{F(0, T)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuk} \psi(u) du + C_{B, T}(k) \end{cases}$$

On introduit :

$$Z^1(k) = \int_k^{\infty} e^{-rT} (e^s - e^k) q_T(s) ds - e^{-rT} (1 - e^k)^+$$

$$\psi_1(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuk} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} [(e^s - e^k) 1_{k < s} - (e^s - e^k) 1_{k < 0}] q_T(s) ds dk$$

$$\text{car } \int_{-\infty}^{\infty} e^s q_T(s) ds = 1$$

Méthode améliorée pour la FFT (Tankov)(3)

$$\begin{aligned}\psi_1(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} q_T(s) \int_{-\infty}^s dk [e^{s+ik} - e^{k(1+iu)}] - \int_{-\infty}^0 dk [e^{s+ik} - e^{k(1+iu)}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} q_T(s) \int_0^s dk [e^{s+ik} - e^{k(1+iu)}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} q_T(s) \left[\frac{1}{iu} (e^{(iu+1)s} - e^s) - \frac{1}{iu+1} (e^{(iu+1)s} - 1) \right]\end{aligned}$$

Propriété de martingale :

$$\psi_1(u) = e^{-rT} \frac{\phi_T(u-i) - 1}{iu(iu+1)}$$

Méthode améliorée pour la FFT (Tankov)(4)

$$Z_2(k) = \int_k^\infty e^{-rT} (e^s - e^k) q_{B,T}(s) ds - (1 - e^k)^+$$

où $q_{B,T}(s)$ densité du log du prix future normalisé par $F(0, T)$ dans modèle de Black.

$\phi_{B,T}(u) = E(\exp(iu(-\frac{\Sigma^2 T}{2} + \Sigma W_T))) = \exp(-\frac{\Sigma^2 T}{2}(u^2 + iu))$ fonction caractéristique associée Transformée de fourier de $Z_2(k)$:

$$\psi_2(u) = e^{-rT} \frac{\phi_{B,T}(u - i) - 1}{iu(iu + 1)}$$

Comme $\tilde{C}(k) = Z_1(k) - Z_2(k)$

$$\psi(u) = e^{-rT} \frac{\phi_T(u - i) - \phi_{B,T}(u - i)}{iu(iu + 1)}$$

Choisir $\Sigma(0, t, T)$ (à adapter pour options en dehors de la monnaie)

$$\Sigma(0, t, T)^2 t = \int_0^t (\sigma_S^2(u) e^{-2as(T-u)} + \sigma_L^2(u) e^{-2aL(T-u)}) du$$

Mise en oeuvre de la FFT

FFT algorithme efficace de calcul de

$$w(k) = \sum_1^N e^{-i \frac{2\pi}{N} (j-1)(k-1)} x(j), \text{ pour } k = 1, \dots, N,$$

où N est typiquement une puissance de 2. Réduit le nombre de multiplications requises dans les N sommations d'un ordre N^2 à un ordre $N \ln(N) / \ln(2)$.

Pour première approche :

$$\tilde{C}(k) \simeq \frac{\exp(-\kappa k)}{\pi} \sum_1^N e^{-i v_j k} \psi_T(v_j) \nu$$

- L'intégration jusqu'à $a = N\nu$, reste tronqué, $v_j = (j-1)\nu$ (somme de Riemann)
- Options pas trop en dehors de la monnaie : k proches de zéro.
- Maillage régulier de pas λ , valeurs prises par k :

$$k_u = -b + \lambda(u-1), \text{ pour } u = 1, \dots, N.$$

- Valeurs du log du strike de $-b$ à b , avec $b = \frac{N\lambda}{2}$.

Mise en oeuvre de la FFT

$$C_T(k_u) \simeq \frac{\exp(-\kappa k_u)}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-iv_j(-b+\lambda(u-1))} \psi_T(v_j) \eta.$$

Pas de discrétisation du strike $\lambda = \frac{2\pi}{\nu N}$, η poids de Simpson, $u = 1, N$

$$C(k_u) = \frac{\exp(-\kappa k_u)}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i \frac{2\pi}{N} (j-1)(u-1)} e^{ibv_j} \psi_T(v_j) \frac{\nu}{3} (3 + (-1)^j - \delta_{j-1} - \delta_{j-N})$$

δ_j symbol de Kronecker valant 1 en j et 0 ailleurs. ν, κ à choisir appropriés.
Permet à coût réduit d'avoir un ensemble de valeurs d'options pour différents strike

Option européenne

$$S_T = F(t_0, T)e^{WR(T) + \int_0^T \sigma_S(u)e^{-a(T-u)}dL_u + \int_0^T \sigma_L(u)dz_u}.$$

$$WR(T) = -\int_0^T \delta(\gamma - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + \sigma e^{-a(T-s)})^2})dx - \int_0^T \sigma_L^2(u)du$$

Le prix de l'option :

$$C(S_0, K, T) = e^{-rT}\mathbb{E}((S_T - K)^+).$$

- aleaU variable aléatoire de loi uniforme,
- aleaN variable aléatoire de loi normale,
- $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$

Algorithme de résolution par discrétisation de l'intégrale stochastique

```
resu = 0
pour i=1 à nombre de simulations  $n_{simu}$  :
    Stock = 0.
    Pour ii =1 nbpas
        t = ii*pas
         $\delta_t = \delta * pas$ 
         $X \simeq NIG(\alpha, \beta, \delta_t, 0)$ 
        Stock = Stock + X * exp(-a * (T - t))
    S = F(t0, T) * exp [WR(T) +  $\sigma_S * Stock + \sigma_L * aleaN.random * \sqrt{T}$ ]
    res = max(S - K, 0.)
    resu = resu + max(S - K, 0.)
resu = resu /  $n_{simu}$ 
```

Millions de particules nécessaire pour convergence

Quasi Monte Carlo

- But : intégrer $\int_{[0,1]^d} f(x)dx \simeq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n))$
- Suite de points déterministes qui remplissent au mieux $[0, 1]^d$. Convergence pour certaines en $K \frac{\log(n)^d}{n}$.
- Sont dites à discrédance faible si convergence plus rapide que $1/\sqrt{N}$
- Exemple : suite de Sobol, Faure, Halton
- Plus difficile à générer en grande dimension

Réduction de variance : variables antithétiques

- But : $I = \int_0^1 f(x) dx$
- N variables U_i de densité uniforme

$$I \simeq \frac{1}{N} (0.5(f(U_1) + f(1 - U_1)) + \dots + 0.5(f(U_N) + f(1 - U_N))) \quad (1)$$

- Si f continue, décroissante résultat amélioré théoriquement

MonteCarlo et options américaines (I)

- Algorithme backward de programmation dynamique,
- Discrétisation en temps : à chaque date, exerce-t-on ou attend on ?
- Espérance des gains futurs supérieure au gain instantané H (pay-off) ?

Algorithme général de résolution

① Discrétisation en temps $t_i = i\Delta t$, $i = 0, N$,

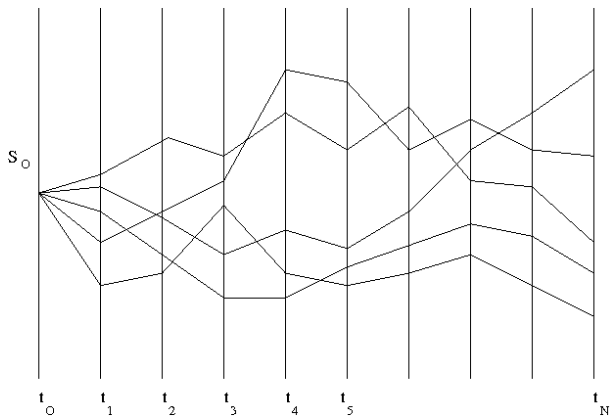
② simulation de l'intégrale $\int_0^t \sigma(u) e^{-a(t-u)} dL_u$

$$\int_0^{t_i} \sigma(u) e^{-a(t_i-u)} dL_t = e^{-a(t_i-t_{i-1})} \int_0^{t_{i-1}} e^{-a(t_{i-1}-u)} \sigma(u) dL_u + e^{-at_i} \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{au} \sigma(u) dL_u$$

③ Pour chaque simulation j , calcul du prix S_i^j , $j = 1, M$

④ Résolution de manière backward (programmation dynamique)

Simulations de Monte Carlo



Algorithme de résolution backward

$$\begin{aligned}V_N(S_j^N) &= H(S_j^N), \quad j = 1, M \\V_{i-1}(S_{i-1}^j) &= \max \left(H(S_{i-1}^j), \mathbb{E}(e^{-r(t_i-t_{i-1})} V_i(S_i) / \mathcal{F}_{i-1}) \right)\end{aligned}$$

Processus de Markov

$$\mathbb{E}(e^{-r(t_i-t_{i-1})} V_i(S_i) / \mathcal{F}_{i-1}) = \mathbb{E}(e^{-r(t_i-t_{i-1})} V_i(S_i) / S_{i-1} = S_{i-1}^j)$$

Difficulté à estimer $C_{i-1}(x) = \mathbb{E}(e^{-r(t_i-t_{i-1})} V_i(S_i) / S_{i-1} = x)$.

Espérance conditionnelle

$$C_{i-1}(S_{i-1}) = \arg \min_{h \in L_2(\Omega)} \mathbb{E}(V_i(S_i)e^{-r(t_i-t_{i-1})} - h(S_{i-1}))^2$$

Dem :

Considérer le produit scalaire $\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}(XY|Z)$.

$f(Z) = \mathbb{E}(X|Z)$ alors par projection itérée;

$$\begin{aligned} \langle X - f(Z), g(Z) \rangle &= \mathbb{E}((X - f(Z))g(Z)|Z) \\ &= \mathbb{E}(Xg(Z)|Z) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Z)g(Z)|Z) = 0. \end{aligned}$$

$f(Z)$ projection orthogonale donc minimise la distance

$$\|X - \mathbb{E}(X|Z)\| = \min_h \|X - h(Z)\|$$

Dicrétisation de l'espérance conditionnelle

Discrétiser sur une base de fonction ϕ_k , pour $k \in [1, P]$:

$$C_i(x) = \alpha^* \phi(x)$$

avec $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_P)$ et $\phi(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_P(x))$.

$$\alpha = \arg \min_{c \in \mathbb{R}^P} \sum_{j=1}^M (V_{i+1}(S_j^{i+1})e^{-r(t_{i+1}-t_i)} - \sum_{k=0}^P c_k \phi_k(S_j^i))^2 \quad (2)$$

$$\alpha = \arg \min_{c \in \mathbb{R}^P} \|Ac - B\|^2 \quad (3)$$

où

$$\begin{aligned} A_{j,k} &= \phi_k(S_j^i), \quad k \in (0, P), \quad j \in (1, M) \\ B_j &= V_{i+1}(S_j^{i+1})e^{-r(t_{i+1}-t_i)} \end{aligned}$$

Technique de régression

- 1 Méthode de type SVD (les plus stables mais les plus coûteuses)
- 2 Factorisation QR stable et moins coûteuse
- 3 Méthode de Choleski : la plus rapide mais peut dégénérer

La méthode de Choleski sur l'équation normale

$$A^* A \alpha = A^* B$$

Dem :

$$\text{Dériver } \|A\alpha - B\|^2 = (A\alpha - B)^*(A\alpha - B)$$

Inversion par Choleski

Soit :

$$\alpha_{i-1} = M_{i-1}^{-1} K_{i-1}$$

avec

$$M_i = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \phi(S_i^j) \phi(S_i^j)^t$$

$$K_i = e^{-r(t_{i+1}-t_i)} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \phi(S_i^j) V_{i+1}(S_{i+1}^j)$$

La matrice M_i peut dégénérer.

Algorithme de Tsilikis Van Roy

```

 $V_j = H(S_{ndt}^j) \quad \forall j \in (1, M)$ 
for  $i = N$  à  $1$  do
  Calculer les matrices  $M_{i-1}$ ,  $K_{i-1}$  fonction de  $V$ 
  Calculer  $\alpha_{i-1} = M_{i-1}^{-1} K_{i-1}$ 
  for  $j = 1$  à  $M$  do
    Calculer l'espérance conditionnelle  $V_j^* = \sum_j \alpha_j \phi(S_j^{i-1})$ ,
     $V_j = \max(H(S_{i-1}^j), V_j^*)$ 
  end for
end for
return  $V = V_j$  j quelconque

```

Problème de la méthode

- fonctions monômes : $1, x, x^2, \dots, x^{P-1}$,
 - fonction de Legendre, Chebychev,
 - fonction de base locales (type éléments finis) (permet d'éviter la dégénérescence pour Choleski)
- 1 La variance de l'espérance conditionnelle augmente quand Δt diminue,
 - 2 biais possible

Méthode améliorée : technique de Longstaff Schwartz

```
 $V_j = H(S_{ndt}^j) \quad \forall j \in (1, M)$   
for  $i = N$  à 1 do  
  Calculer les matrices  $M_{i-1}$ ,  $K_{i-1}$  fonction de  $V$   
  Calculer  $\alpha_{i-1} = M_{i-1}^{-1} K_{i-1}$   
  for  $j = 1$  à  $M$  do  
    Calculer l'espérance conditionnelle  $V_j^* = \sum_j \alpha_j \phi(S_j^{i-1})$   
    if  $V_j^* < H(S_{i-1}^j)$  then  
       $V_j = H(S_{i-1}^j)$   
    else  
       $V_j = \exp(-r\delta t) V_j$   
    end if  
  end for  
end for  
 $V = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M V_j$ 
```

Quelques remarques

- 1 On stocke en réalité les pay off aux dates d'exercice, et calcul d'espérance finale,
- 2 Longstaff Schwarz ont proposé de faire la regression sur les points dont le pay off est positif : pas d'amélioration évidente.

Modèle et notations

Sous probabilité risque neutre :

$$F(t, T) = F(t_0, T) e^{w(t, T) + \int_0^t \sigma_S(u) e^{-as(T-u)} dL_u + \int_0^t \sigma_L(u) e^{-aL(T-u)} dZ_u}$$

$$X_t = \int_0^t \sigma_S(u) e^{-a(t-u)} dL_u,$$

$$Y_t = \int_0^t \sigma_L(u) dZ_u$$

EDS pour X_t

$$dX_t = -aX_t dt + \sigma(t) dL_t$$

AOA

$C(t, T, K) = C(t, X_t, Y_t)$ semi martingale :

$$e^{-rt} C(t, X_t, Y_t) = C(0, X_0, Y_0) + M_t + A_t$$

- M_t est une martingale,
- A_t un processus prédictible à variations finies.

Par AOA $e^{-rt} C(t, X_t, Y_t)$ est une martingale : A_t nul.

$\mu^{X_t}(dy, dt)$ la mesure de saut de X_t , utilisation Ito :

$$\begin{aligned} d(e^{-rt} C(t, X_t, Y_t)) &= -re^{-rt} C(t, X_{t-}, Y_t)dt + e^{-rt} \left(\frac{\partial C}{\partial t}(t, X_{t-}, Y_t)dt + \frac{\partial C}{\partial x}(t, X_{t-}, Y_t)dX_t \right. \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \left((C(t, X_{t-} + z, Y_t) - C(t, X_{t-}, Y_t) - \frac{\partial C}{\partial x}(t, X_{t-}, Y_t)z) \mu^{X_t}(dz, dt) \right) \\ &\left. + \frac{\partial C}{\partial y}(t, X_{t-}, Y_t)dY_t + \frac{1}{2} \sigma_L^2(t) \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}(t, X_{t-}, Y_t) \right) \end{aligned}$$

AOA (suite)

μ^L la mesure de saut de L_t :

$$\begin{aligned}
 d(e^{-rt} C(t, X_t, Y_t)) = & \\
 & -re^{-rt} C(t, X_{t-}, Y_t)dt + e^{-rt} \left(\frac{\partial C}{\partial t}(t, X_{t-}, Y_t)dt + \frac{\partial C}{\partial x}(t, X_{t-}, Y_t)dX_t + \right. \\
 & \left. \int_{\mathbb{R}} \left((C(t, X_{t-} + \sigma_S(t)z, Y_t) - C(t, X_{t-}, Y_t) - \frac{\partial C}{\partial x}(t, X_{t-}, Y_t)\sigma_S(t)z) \mu^{L_t}(dz, dt) \right) \right. \\
 & \left. + \frac{\partial C}{\partial y}(t, X_{t-}, Y_t)dY_t + \frac{1}{2}\sigma_L^2(t) \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}(t, X_{t-}, Y_t) \right)
 \end{aligned}$$

$\nu^{L_t} = K_{NIG(\alpha, \beta, \gamma)}(z) dz dt$ compensateur de μ^{L_t}

Décomposition en martingale et processus à variation finies

$$\begin{aligned}
 d(e^{-rt} C(t, X_t, Y_t)) &= -re^{-rt} C(t, X_{t-}, Y_t) dt + \\
 &e^{-rt} \left(\frac{\partial C}{\partial t}(t, X_{t-}, Y_t) dt + \frac{\partial C}{\partial X}(t, X_{t-}, Y_t) (-aX_{t-}) dt + \frac{\partial C}{\partial X}(t, X_{t-}, Y_t) \sigma(t) dL_t \right. \\
 &\int_{\mathbb{R}} \left(C(t, X_{t-} + \sigma(t)z, Y_t) - C(t, X_{t-}, Y_t) - \frac{\partial C}{\partial X}(t, X_{t-}, Y_t) \sigma(t)z \right) (\mu^{L_t}(dz, dt) - \nu^{L_t}(dz \\
 &\int_{\mathbb{R}} \left((C(t, X_{t-} + \sigma(t)z, Y_t) - C(t, X_{t-}, Y_t) - \frac{\partial C}{\partial X}(t, X_{t-}, Y_t) \sigma(t)z) K_{NIG(\alpha, \beta, \gamma)}(z) dz dt \right) \\
 &\left. + \sigma_L \frac{\partial C}{\partial y}(t, X_{t-}, Y_t) dz_t + \frac{1}{2} \sigma_L^2(y) \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}(t, X_{t-}, Y_t) \right)
 \end{aligned}$$

Dérivation de l'EDP

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t, x, y) + \left(\sigma_S \frac{\delta\beta}{\gamma} - ax\right) \frac{\partial C}{\partial x}(t, x, y) + \frac{1}{2} \sigma_L^2 \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}(t, x, y) - rC(t, x, y) = - \int_{\mathbb{R}} \left(C(t, x + \sigma z) - C(t, x) - \frac{\partial C}{\partial x}(t, x, y) \sigma z \right) K_{NIG(\alpha, \beta, \delta)}(z) dz$$

En remplaçant t par $T - t$)

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t, x, y) - \left(\sigma \frac{\delta\beta}{\gamma} - ax\right) \frac{\partial C}{\partial x}(t, x, y) - \frac{1}{2} \sigma_L^2 \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}(t, x, y) + rC(t, x, y) = \int_{\mathbb{R}} \left(C(t, x + \sigma z, y) - C(t, x, y) - \frac{\partial C}{\partial x}(t, x, y) \sigma z \right) K_{NIG(\alpha, \beta, \delta)}(z) dz$$

avec comme condition initiale :

$$C(0, x, y) = (S_0^{wr(T)+x+y} - K)^+$$

Le prix de l'option est donné par $C(T, 0., 0.)$.

Technique de résolution pour une EDP simplifiée

- Traitement du terme de diffusion classique (schéma centré à trois points)
- Traitement de la partie à saut pur

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x, y) - \left(\sigma \frac{\delta\beta}{\gamma} - ax\right) \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, y) + rf(t, x, y) = \\ \int_{\mathbb{R}} \left(f(t, x + \sigma z, y) - f(t, x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, y) \sigma z \right) K_{NIG(\alpha, \beta, \delta)}(z) dz = \\ \int_{\mathbb{R}} \left(f(t, x + z, y) - f(t, x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, y) z \right) K_{NIG(\alpha/\sigma, \beta/\sigma, \delta\sigma)}(z) dz \end{aligned}$$

Donc équation du type :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x, y) - \left(\sigma \frac{\delta\beta}{\gamma} - ax\right) \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, y) + rf(t, x, y) = \\ \int_{\mathbb{R}} \left(f(t, x + z, y) - f(t, x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, y) z \right) K_{NIG(\alpha, \beta, \delta)}(z) dz \end{aligned}$$

Difficultés associées à cette équation

- Pas de terme de diffusion (saut pur)
- Terme différentiel intégral singulier : $K_{NIG(\alpha,\beta,\delta)}(y)$ se comporte en $O(1/y^2)$ en 0.

Partition du domaine de résolution

- Sur $[-X_{max}^*, X_{max}^*]$

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \left(\sigma \frac{\delta\beta}{\gamma} - ax \right) \frac{\partial f}{\partial x} - \int_{\mathcal{R}} \left(f(x+y) - f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x)y \right) K_{NIG(\alpha, \beta, \delta)}(y) dy = 0$$

- sur $[X_{max}^*, X_{max}]$ avec $X_{max} \gg X_{max}^*$, $f(x+y) \simeq f(x) \exp(y)$

$$\Theta = \sigma \delta \left(\frac{\gamma}{\sigma} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{\sigma^2} - \left(\frac{\beta}{\sigma} + 1 \right)^2} - \frac{\beta}{\sigma} \right).$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x) - \left(\sigma \frac{\delta\beta}{\gamma} - ax \right) \frac{\partial f}{\partial x} - \Theta f(x) = 0$$

- Sur la région $[-X_{max}, -X_{max}^*]$:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x) - \left(\sigma \frac{\delta\beta}{\gamma} - ax \right) \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Discrétisation du terme intégral

Tronquer l'intégrale pour se ramener à un domaine de taille finie :

$$\mathcal{I} = \int_{-y^*}^{y^*} \left(f(x+y) - f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x)y \right) K_{NIG(\alpha, \beta, \delta)}(y) dy$$

Pas Δy pris égal au pas de discrétisation Δx de l'EDP . Intégration difficile ($O(1/y^2)$ en 0) : décomposition en 3 parties

$$\begin{cases} \Omega_0 = \left\{ y \mid -\frac{\Delta y}{2} \leq y \leq \frac{\Delta y}{2} \right\}, \Omega_1 = \left\{ y \mid \frac{\Delta y}{2} < |y| < 1 \right\}, \\ \Omega_2 = \left\{ y \mid -y^* \leq y \leq -1 \text{ ou } 1 \leq y \leq y^* \right\} \end{cases}$$

Discrétisation du terme intégral

Sur Ω_0 développement limité de f en 0 :

$$\int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \left(f(x+y) - f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x)y \right) K_{NIG(\alpha, \beta, \delta)}(y) dy \simeq \frac{1}{2} \Delta y \frac{\sigma \delta}{\pi} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x)$$

Sur Ω_2 ,

$$\begin{aligned} \sum_{y_i \in \Omega_2} \int_{y_i - \frac{\Delta y}{2}}^{y_i + \frac{\Delta y}{2}} \left(f(x+y) - f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x)y \right) K_{NIG(\alpha, \beta, \delta)}(y) dy \simeq \\ \sum_{y_i \in \Omega_2} f(x+y_i) \Gamma(y_i) - f(x) \sum_{y_i \in \Omega_1} \Gamma(y_i) - \frac{\partial f}{\partial x}(x) \sum_{y_i \in \Omega_2} y_i \Gamma(y_i) \end{aligned}$$

avec

$$\Gamma(y_i) = \int_{y_i - \frac{\Delta y}{2}}^{y_i + \frac{\Delta y}{2}} K_{NIG(\alpha, \beta, \delta)}(y) dy.$$

Discrétisation du terme intégral

Sur Ω_1 , $K_{NIG(\alpha,\beta,\delta)}(y) = K_{NIG(\alpha,\beta,\delta)}(y)y^2$.

$$\sum_{y_i \in \Omega_1} \int_{y_i - \frac{\Delta y}{2}}^{y_i + \frac{\Delta y}{2}} dy \left(f(x+y) - f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x)y \right) K_{NIG(\alpha,\beta,\delta)}(y) dy =$$
$$\sum_{y_i \in \Omega_2} f(x+y_i)\Gamma(y_i) - f(x) \sum_{y_i \in \Omega_1} \Gamma(y_i) - \frac{\partial f}{\partial x}(x) \sum_{y_i \in \Omega_2} y_i \Gamma(y_i)$$

avec

$$\Gamma(y_i) = \frac{1}{y_i^2} \int_{y_i - \frac{\Delta y}{2}}^{y_i + \frac{\Delta y}{2}} y^2 K_{NIG(\alpha,\beta,\delta)}(y) dy.$$

Méthode d'intégration de type Simpson à 5 points pour $\Gamma(y_i)$.

EDP générale

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x) - \frac{D}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(M - \left(\sigma \frac{\delta \beta}{\gamma} - ax \right) \right) \frac{\partial f}{\partial x} + Rf(x) = \sum_{y_i} \Gamma(y_i) f(x + y_i)$$

avec

$$D = \Delta y \frac{\sigma \delta}{\pi},$$

$$R = \sum_{y_i} \Gamma(y_i),$$

$$M = \sum_{y_i} \Gamma(y_i) y_i,$$

et où

$$\Gamma(y_i) = \begin{cases} \frac{1}{y_i^2} \int_{y_i - \frac{\Delta y}{2}}^{y_i + \frac{\Delta y}{2}} y^2 K_{NIG(\alpha, \beta, \delta)}(y) dy, & \text{si } y_i \in \Omega_1, \\ \int_{y_i - \frac{\Delta y}{2}}^{y_i + \frac{\Delta y}{2}} K_{NIG(\alpha, \beta, \delta)}(y) dy, & \text{si } y_i \in \Omega_2, \\ 0, & \text{si } y_i \in \Omega_0 \end{cases}$$

Méthode des caractéristiques

Schéma décentré possible (ordre un), mais convection dominante
Solution : méthode des caractéristiques.

Dérivée lagrangienne de f

$$\frac{\mathcal{D}f}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dS_t}{dt} \frac{\partial f}{\partial x}$$

le long de la trajectoire définie par

$$\frac{dS}{dt} = - \left(M - \left(\sigma \frac{\delta\beta}{\gamma} - aS \right) \right).$$

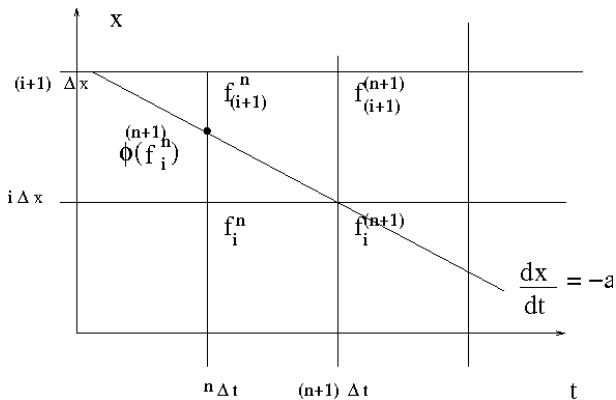
$$\frac{\mathcal{D}f}{\mathcal{D}t} - \frac{D}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + Rf(x) = \sum_{y_i} \Gamma(y_i) f(x + y_i)$$

Pied de la caractéristique issue de $(t_{j+1} = (j+1)\Delta t, x_j = i\Delta x)$ en t_j

$$x = \left(x_j + \frac{M}{a} - \sigma \frac{\delta\beta}{a\gamma} \right) \exp(-a\Delta t)$$

n'appartient pas au maillage.

Différentiel le long de la caractéristique



θ schéma en temps

Interpolateur ϕ entre x_j et x_{j+1} où $x_j \leq x \leq x_{j+1}$

$$\frac{f_i^{n+1} - \phi^{n+1}(f_i^n)}{\Delta t} - \theta(Lf^{n+1})_i = (1-\theta)\phi^{n+1}[(Lf^n)_i] + \theta(Qf^{n+1})_i + (1-\theta)\phi^{n+1}[(Qf^n)_i]$$

avec

$$Lf(x) = \frac{D}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) - Rf(x)$$

et

$$(Qf)(x) = \sum_{y_i} \Gamma(y_i) f(x + y_i).$$

Ordre 2 en temps

Schéma de discrétisation spatial

Utilisation d'un schéma différence finies classiques pour équation précédente

$$\begin{aligned}
 & f_i^{n+1} \left(1 + \Delta t \theta \left(\frac{\sigma}{\Delta x^2} + R \right) \right) - f_{i-1}^{n+1} \Delta t \theta \frac{\sigma}{2\Delta x^2} - f_{i+1}^{n+1} \Delta t \theta \frac{\sigma}{2\Delta x^2} = \\
 & \phi^{n+1} (f_i^n) (1 - (1 - \theta) \Delta t \left(\frac{\sigma}{\Delta x^2} + R \right)) + \phi^{n+1} (f_{i+1}^n) (1 - \theta) \Delta t \frac{\sigma}{2\Delta x^2} + \\
 & \phi^{n+1} (f_{i-1}^n) (1 - \theta) \Delta t \frac{\sigma}{2\Delta x^2} + \\
 & \theta (Qf^{n+1})_i + (1 - \theta) \phi^{n+1} ((Qf^n)_i)
 \end{aligned}$$

Même type d'équations les zones $[X_{max}^*, X_{max}]$ et $[-X_{max}, X_{max}^*]$

Schéma itératif de résolution

Pour point fixe sur le terme intégral (Q) :

$$[(I - \theta \hat{L})f^{n+1,k+1}]_i = \theta(Qf^{n+1,k})_i + \phi^{n+1}([(I + \theta \hat{L})f^{n+1}]_i) + (1 - \theta)\phi^{n+1}((Qf^n)_i)$$

2 ou 3 itérations nécessaire.

Alternative : BiCGStab préconditionné par diagonale.

Adaptation pour les options américaines

Problème de contrôle

$$\min\left(-\frac{\partial C}{\partial t} - LC, C - H\right) = 0.$$

+CL

- H fonction pay off de l'option.
- Traitement explicite de la contrainte (arbitrage à chaque date lors de la programmation dynamique)

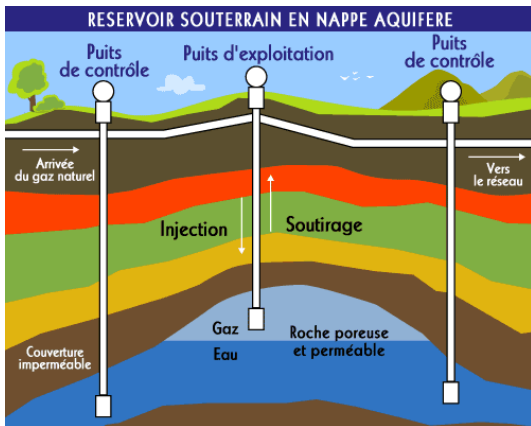
Formulation du problème de valorisation d'un actif de stockage gaz

Valorisation par rapport aux prix de marché : Méthode financière

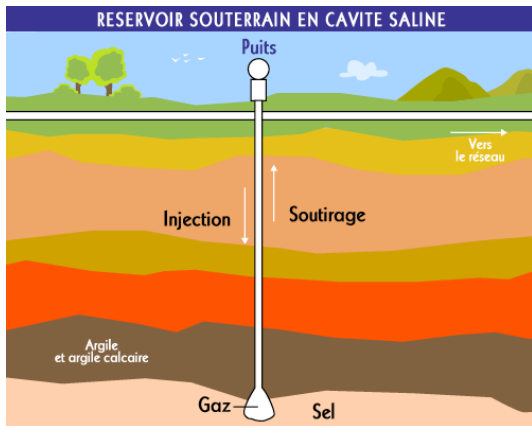
- Optimisation du profit attendu de la gestion d'un actif de stockage gaz
- Arbitrage sur les marchés pour optimiser l'utilisation de l'actif :
 - Achat de gaz et stockage quand les prix sont bas (été, week-end)
 - Soutirage de gaz pour vente quand les prix sont hauts (hiver, jour de semaine)
- Recherche d'une stratégie optimale de gestion de l'actif de stockage
- Sous un ensemble de contraintes de fonctionnement

⇒ Un problème de commande optimale stochastique sous contraintes

Nappe aquifère



Cavité saline



Variables d'état du système dynamique

- S_t , **prix du gaz sur le marché** en toute date $t \in [0, T]$ (prix spot)
 \hookrightarrow Différents modèles de prix envisageables
- I_t , **niveau de stock** en $t \in [0, T]$, tel que $dI_t = e_t q_t dt$

Contrôle exercé sur le système \Leftrightarrow Stratégie de gestion de l'actif

- q_t , **quantité de gaz injecté ou soutiré** en $t \in [0, T]$, telle que $q_t \geq 0$
- e_t , **indicateur du régime de fonctionnement de l'actif**, tel que :

$$e_t = \begin{cases} +1 & \text{si en } t, \text{ régime d'injection} \\ 0 & \text{si en } t, \text{ régime de repos} \\ -1 & \text{si en } t, \text{ régime de soutirage} \end{cases}$$

$(\tau_n)_{n \geq 0}$, suite des dates de changement de régime, telle que :

- τ_{2k} , date de décision d'injection, i.e. $e_{\tau_{2k}-} = -1$
- τ_{2k+1} , date de décision de soutirage, i.e. $e_{\tau_{2k+1}-} = +1$

Profit engendré par la détention d'un actif de stockage gaz

- Gain en $t \in [0, T]$: $f_t(e_t, I_t, S_t, q_t) = -e_t q_t S_t - q_t k(e_t, I_t)$, i.e.

$$f_t(e_t, I_t, S_t, q_t) = \begin{cases} -q_t (S_t + k(+1, I_t)) & \text{si en } t, \text{ régime d'injection} \\ 0 & \text{si en } t, \text{ régime de repos} \\ +q_t (S_t - k(-1, I_t)) & \text{si en } t, \text{ régime de soutirage} \end{cases}$$

où $k(+1, I_t) > 0$ et $k(-1, I_t) > 0$, **coûts supplémentaires d'injection et de soutirage** par unité de gaz injecté ou soutiré :

- coûts liés au fonctionnement des compresseurs
- coûts de traitement du gaz

- Pénalisation à échéance T :

$$g_T(I_T, S_T) = -CS_T |I_T - I_f|, \text{ où } C > 0$$

Coûts des inversions

- $K(e_{\tau_n}, I_{\tau_n}, S_{\tau_n}), \forall n \geq 1$, **coût de changement de régime** en τ_n , pour passer du régime déterminé par e_{τ_n} (injection ou soutirage) au régime inverse

Caractéristiques d'un actif de stockage gaz

- $Q_{\max} > 0$, **volume de la cavité**
- $I_{\min}(t)$ et $I_{\max}(t)$, **niveaux de stock minimal et maximal**, i.e.

$$0 \leq I_{\min}(t) \leq I_t \leq I_{\max}(t) \leq Q_{\max}, \forall t \in [0, T]$$

- **Contraintes de débits**

$q_{\min} > 0$ et $q_{\max} > 0$, **capacités maximales de soutirage et d'injection**, dépendant :

- du niveau dans le stock (i.e. pression dans la cavité)
- du temps (par ex : maintenance des compresseurs)

i.e.

$$-q_{\min}(t, I_t) \leq e_t q_t \leq q_{\max}(t, I_t), \forall t \in [0, T]$$

Problème de valorisation d'actif de stockage gaz

- État markovien du système dynamique : $(I_t, S_t)_{0 \leq t \leq T}$
- Stratégie de gestion de l'actif : $(e_t, q_t)_{0 \leq t \leq T}$
- Profit attendu par le gestionnaire de l'actif :

$$J(e, q) = \mathbb{E} \left[\int_0^T f_t(e_t, I_t, S_t, q_t) dt - \sum_{\substack{n \geq 1 \\ \tau_n < T}} K(e_{\tau_n^-}, I_{\tau_n}, S_{\tau_n}) + g_T(I_T, S_T) \right]$$

↔ Modèles de prix du gaz sous-jacent $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$?

Problème de commande optimale stochastique :

$$\sup_{(e_t, q_t)_{0 \leq t \leq T}} J(e, q)$$

Sous l'ensemble de contraintes décrit précédemment

Calcul par programmation dynamique pour modèle NIG

Calcul de l'espérance conditionnelle d'une fonction $V(t, X_t^S)$ entre t^n et t^{n+1} ,

$$f(t, x) = \mathbb{E} \left(V(t^{n+1}, X_{t^{n+1}}^S) \mid X_t^S = x \right)$$

solution de l'EDP :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + Lf &= 0, \\ f(t^{n+1}, x) &= V(t^{n+1}, x) \end{aligned}$$

où L est le générateur infinitésimal associé à X_t^S

$$Lf(x) = \left(\sigma_S \frac{\delta\beta}{\gamma} - a_S x \right) \frac{\partial f}{\partial x} + \int_{\mathcal{R}} \left(f(x + \sigma y) - f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x) \sigma_S y \right) K_{NIG(\alpha, \beta, \delta)}(y) dy$$