# Le modèle d'Ehrenfest

On rappelle les résultats suivants :

– Le quantile d'ordre 95% (resp. 97.5%) de la loi gaussienne centrée réduite, $\mathcal{N}(0,1)$, est 1.65 (resp. 1.96).
– Si la loi de $S$ est la loi de binomiale de paramètre $(n,p)$, alors on a
  a) pour $k \in \{0,\ldots,n\}$, $\mathbb{P}(S=k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$,
  b) $\mathbb{E}[S] = np$ et $\mathrm{Var}\,(S) = np(1-p)$.

Le modèle qui suit a été introduit en 1907 par les physiciens autrichiens Tatiana et Paul Ehrenfest[1] pour décrire la diffusion d'un gaz placé dans deux récipients à températures différentes mis en communication.

On considère un système de $N$ particules qui sont réparties dans deux recipients $A$ et $B$. À chaque instant on choisit au hasard une particule et on la change de recipient. On note $X_n$ le nombre de particules dans le recipient $A$ à l'instant $n$.

1. Montrer que $(X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov sur $E = \{0,\ldots,N\}$ et calculer sa matrice de transition $P$.
2. La chaîne est-elle irréductible ? Est-elle apériodique ?
3. Montrer qu'il existe une probabilité, $\pi = (\pi(k), k \in E)$, par rapport à la quelle $X$ est réversible, c'est-à-dire telle que pour tout $k, \ell \in E$,
$$\pi(k)P(k,\ell) = \pi(\ell)P(\ell,k).$$
Reconnaître la loi $\pi$.
4. En déduire que $\pi$ est une probabilité invariante de la chaîne. Est-ce la seule ?

On rappelle que si $f$ est une fonction définie sur $E$, alors
$$(\pi, f) = \sum_{k\in E} \pi(k) f(k)$$
et la fonction $Pf$ est définie pour $k \in E$, par
$$Pf(k) = \sum_{\ell \in E} P(k,\ell) f(\ell).$$

5. On pose $f(k) = k$, pour $k \in E$. Calculer $(\pi, f)$, $(\pi, f^2)$ et vérifier que $Pf = 1 + (1 - \frac{2}{N})f$.
6. La suite $(\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k, n \geq 1)$ est-elle convergente. Si oui, quelle est sa limite, et de quel type de convergence s'agit-il ?

[1] The conceptual foundations of the statistical approach in mechanics, *Ithaca, NY, Cornell Univ. Press* (1959)

7. Vérifier que l'équation de Poisson

$$F(k) - PF(k) = f(k) - (\pi, f), \quad k \in E,$$

possède une solution de la forme $F = cf$, pour une constante $c > 0$ que l'on déterminera. (La solution trouvée est en fait l'unique solution de l'équation de Poisson).

8. Montrer que

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - (\pi, f)) \xrightarrow[n\to\infty]{\textbf{Loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

et déterminer $\sigma^2$.

9. On suppose que l'on observe seulement le nombre de particules dans le récipient $A$ au cours du temps, et que l'on désire estimer le nombre total de particules. Proposer un estimateur de $N$ à l'aide de $\bar{X}_n$. Et construire un intervalle de confiance asympotique à 95% pour $N$.