Fonction de répartition et copules

10 octobre 2008

Chapitre I

Fonction de répartition et copule

I.1 Fonction de répartition

Définition I.1.1. *Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle fonction de répartition de X la fonction $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, parfois notée F_X, définie par $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Le proposition suivante donne des propriétés de la fonction de répartition.

Proposition I.1.2. *Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X.*

1. *La fonction F est croissante, continue à droite et vérifie $\lim_{x\to-\infty} F(x) = \mathbb{P}(X = -\infty)$ et $\lim_{x\to\infty} F(x) = \mathbb{P}(X < +\infty)$. En particulier, si X est finie p.s., on a*

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1.$$

2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la limite à gauche de F en x, $F(x-) = \lim_{\substack{y\to x\\ y<x}} F(y)$ existe et vaut $\mathbb{P}(X < x)$. Ainsi on a $F(x) - F(x-) = \mathbb{P}(X = x)$. La fonction F possède au plus un nombre dénombrable de points de discontinuité.*

Démonstration. Pour tout $x \in [-\infty, +\infty[$, la fonction $\mathbf{1}_{[-\infty,y]}$ décroît vers $\mathbf{1}_{[-\infty,x]}$ quand y décroît vers x. Le théorème de convergence dominée et la propriété de monotonie de l'espérance assurent alors que $F(y)$ décroît vers $F(x)$ quand y décroît vers x. Ceci assure la croissance et la continuité à droite de F sur $[-\infty, +\infty[$.

Pour tout $x \in]-\infty, +\infty]$, la fonction $\mathbf{1}_{[-\infty,y]}$ croît vers $\mathbf{1}_{[-\infty,x[}$ quand y croît vers x avec $y < x$. Le théorème de convergence dominée et la propriété de monotonie de l'espérance assurent alors que $F(y)$ croît vers $\mathbb{P}(X < x)$ quand y croît vers x avec $y < x$. Pour $x = \infty$, ceci termine la démonstration du point 1. Pour conclure sur le point 2, il suffit de remarquer que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}; \mathbb{P}(X = x) > 0\}$ est au plus dénombrable. □

La proposition suivante assure que la fonction de répartition caractérise la loi.

Proposition I.1.3. *La fonction de répartition caractérise la loi : deux variables aléatoires réelles ont même loi si et seulement si elles ont même fonction de répartition.*

Démonstration. La collection $\mathcal{C} = \{[-\infty, x]; x \in \bar{\mathbb{R}}\}$ est stable par intersection finie et engendre la tribu borélienne sur $\bar{\mathbb{R}}$. Le théorème de classe monotone implique que deux probabilités sur $\bar{\mathbb{R}}$ qui coïncident sur $\mathcal{C}$ sont égales sur la tribu borélienne. □

Pour une variable aléatoire réelle continue de densité f, sa fonction de répartition F est donnée par $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{]-\infty,x]} f(y)dy$. La fonction F est continue. Remarquons que si f est continue, alors la fonction F est dérivable de dérivée f. (L'hypothèse f continue est en fait inutile, mais la démonstration de ce résultat analytique dépasse le cadre de ce cours.)

Pour une variable aléatoire réelle discrète, il est immédiat de vérifier que la fonction de répartition est constante sur tout intervalle d'intersection vide avec le support de la loi. Elle est donc constante par morceaux.

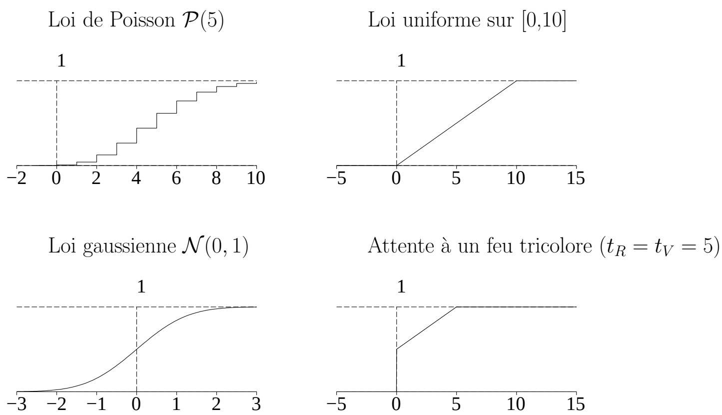

FIG. I.1 – Quelques fonctions de répartition.

Le cycle d'un feu tricolore est de durée $t_R + t_V$ où les t_R premiers instants correspondent au feu orange ou rouge et les t_V derniers instants au feu vert. Si on modélise l'instant d'arrivée d'un automobiliste dans le cycle d'un feu tricolore par une variable aléatoire U uniforme sur $[0, t_R + t_V]$, le temps d'attente au feu est $T = U\mathbf{1}_{\{U \leq t_R\}}$. Cette variable aléatoire n'est ni discrète ni continue. Sa fonction de répartition, voir le graphique I.1, présente un saut dont l'amplitude correspond à la probabilité de ne pas attendre (soit $t_V/(t_R + t_V)$) et une partie linéaire qui correspond à l'attente au feu.

Les fonctions de répartition sont croissantes. Le lemme suivant assure en particulier qu'elles sont mesurables.

Lemme I.1.4. *Toute fonction définie sur un borélien de $\bar{\mathbb{R}}$ à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$ croissante est mesurable.*

Démonstration. Soit f une fonction croissante définie sur un borélien A de $\bar{\mathbb{R}}$ à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$. Pour tout $a \in \bar{\mathbb{R}}$, l'ensemble $f^{-1}([-\infty, a])$ s'écrit $A \cap [-\infty, b]$ ou $A \cap [-\infty, b[$ pour un certain $b \in \bar{\mathbb{R}}$ car f est croissante. Comme la tribu borélienne sur $\bar{\mathbb{R}}$ est engendrée par la collection d'ensembles $\{[-\infty, x]; x \in \bar{\mathbb{R}}\}$, on en déduit que f est mesurable. □

Soit F une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0, 1]$, croissante et continue à droite. Par convention on pose $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x)$ et $F(+\infty) = 1$. Son inverse généralisé, noté F^{-1}, est défini par

$$F^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R},\ F(x) \geq p\}, \quad p \in]0,1], \tag{I.1}$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. Par construction la fonction F^{-1} est croissante. Le lemme I.1.4 assure que les fonctions F et F^{-1} sont mesurables.

Si la fonction F est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$, alors elle est continue sur $\mathbb{R}$ et le point 2 de la proposition I.1.6 qui suit assure que l'inverse généralisé et l'inverse coïncident. L'inverse généralisé reste défini même lorsque F n'est pas bijective soit parce que cette fonction est discontinue soit parce qu'elle est constante sur des intervalles d'intérieur non vide.

L'inverse généralisé de la fonction de répartition permet d'introduire la notion de quantile très utilisée en statistique.

Définition I.1.5. *Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F et F^{-1} l'inverse généralisé de F. Pour $p \in]0,1]$, la quantité $F^{-1}(p)$ s'appelle le quantile ou fractile d'ordre p de la loi de X.*

Le résultat suivant est à la base de la méthode d'inversion de la fonction de répartition qui permet de simuler des variables aléatoires réelles.

Proposition I.1.6. *Soit F une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0,1]$, croissante et continue à droite d'inverse généralisé F^{-1}.*

1. *La fonction F^{-1} est croissante et continue à gauche. On a l'équivalence suivante pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p \in]0,1]$:*
$$F(x) \geq p \Leftrightarrow x \geq F^{-1}(p). \tag{I.2}$$
2. *Pour tout $p \in]0,1]$, on a $F(F^{-1}(p)) \geq p$ avec égalité si $F^{-1}(p) > -\infty$ et si F est continue en $F^{-1}(p)$.*
3. *Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. La fonction F est la fonction de répartition de la variable aléatoire $F^{-1}(U)$.*
4. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ de fonction de répartition F. Si F est continue, alors $F(X)$ est de loi uniforme sur $[0,1]$.*

Démonstration. Vérifions (I.2). Soit $x \in \mathbb{R}$ et $p \in]0,1]$. Par définition de $F^{-1}(p)$, si on a $F(x) \geq p$ alors $x \geq F^{-1}(p)$. Réciproquement si $x \geq F^{-1}(p)$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a $x + \varepsilon > F^{-1}(p)$, ce qui implique que $F(x+\varepsilon) \geq p$. Comme F est continue à droite, en faisant tendre ε vers 0, on obtient que $F(x) \geq p$. Ceci démontre (I.2). Les équivalents suivants, qui découlent de (I.2), assurent que F^{-1} est continu à gauche sur $]0,1]$:

$$F^{-1}(p-\varepsilon) \leq x,\ \forall \varepsilon \in]0,p[\iff p - \varepsilon \leq F(x),\ \forall \varepsilon \in]0,p[\iff p \leq F(x) \iff F^{-1}(p) \leq x.$$

Ceci termine la démonstration de la propriété 1.

On rappelle les conventions $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x)$ et $F(+\infty) = 1$. On déduit de (I.2) avec $x = F^{-1}(p)$ que si $F^{-1}(p) \in \mathbb{R}$, alors $F(F^{-1}(p)) \geq p$. Cette inégalité est trivialement vraie si $F^{-1}(p) = +\infty$. Si $F^{-1}(p) = -\infty$ alors (I.2) implique que $F(x) \geq p$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc par convention $F(-\infty) \geq p$. Pour tout $p \in]0,1]$, on a donc $F(F^{-1}(p)) \geq p$.

Supposons que $F^{-1}(p) > -\infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $F^{-1}(p) - \varepsilon < F^{-1}(p)$ et (I.2) implique que $F(F^{-1}(p) - \varepsilon) < p$. Si F est continue en $F^{-1}(p)$, alors en faisant tendre ε vers 0 on obtient $F(F^{-1}(p)) \leq p$ et donc $F(F^{-1}(p)) = p$. Ceci termine la démonstration de la propriété 2.

Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$. D'après (I.2) on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(F^{-1}(U) \le x) = \mathbb{P}(U \le F(x)) = F(x).$$

Ceci termine la démonstration de la propriété 3.

Les variables aléatoires X et $F^{-1}(U)$ ont même fonction de répartition. Elles ont donc même loi. Par conséquent, $F(X)$ a même loi que $F(F^{-1}(U))$, variable aléatoire égale à U lorsque X est finie p.s. et F continue d'après la propriété 2. □

Pour calculer la loi de maximum de variables aléatoires indépendantes, il est souvent utile de calculer leur fonction de répartition, comme le montre l'exercice ci-dessous.

Exercice I.1.
Soit $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer en utilisant les fonctions de répartition que la loi de $\max\{X_i, 1 \le i \le n\}$ est une loi béta. △

Correction I.1 On pose $M_n = \max\{X_i, 1 \le i \le n\}$. Soit $x \in [0,1]$. On a, en utilisant l'indépendance,

$$\mathbb{P}(M_n \le x) = \mathbb{P}(X_i \le x, 1 \le i \le n) = \mathbb{P}(X_1 \le x)^n = x^n.$$

On a $\mathbb{P}(M_n \le x) = 0$ pour $x < 0$ et $\mathbb{P}(M_n \le x) = 1$ pour $x > 1$. On obtient que la loi de M_n est la loi béta de paramètre $(n, 1)$, car ces deux lois ont même fonction de répartition.

Le lemme technique suivant complète la propriété 4 de la proposition précédente et sera utilisé au prochain paragraphe.

Lemme I.1.7. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ de fonction de répartition F. On note $\Delta' = \{v; \mathbb{P}(X = v) > 0\}$ l'ensemble (au plus dénombrable) des points de discontinuité de F. On suppose que Δ' est non vide. Soit V une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et indépendante de X. La variable aléatoire $U = F(X-) + V \sum_{v \in \Delta'} \mathbb{P}(X = v) \mathbf{1}_{\{X=v\}}$ est de loi uniforme sur $[0,1]$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a p.s. $\{X \le x\} = \{U \le F(x)\}$.*

Démonstration. L'ensemble Δ' est au plus dénombrable et c'est l'ensemble des points de discontinuité de F d'après la proposition I.1.2 : $\mathbb{P}(X = v) = F(v) - F(v-)$. La variable aléatoire U définie dans le lemme est à valeurs dans $[0,1]$. Soit $u \in]0,1[$.

Si $v = F^{-1}(u)$ n'est pas un point de continuité de F, alors d'après la proposition I.1.6 on a $u \in]F(v-), F(v)]$ et $\{U < u\} = \{X < v\} \bigcup \{X = v, V < (u - F(v-))/\mathbb{P}(X = v)\}$. On en déduit $\mathbb{P}(U < u) = u$.

Si $F^{-1}(u)$ est un point de continuité de F, alors $\{U < u\} = \{F(X) < u\}$ et d'après (I.2) il vient $\{U < u\} = \{X < F^{-1}(u)\}$. Comme $F^{-1}(u)$ est un point de continuité de F, on déduit de la propriété 2 de la proposition I.1.6 que

$$\mathbb{P}(U < u) = \mathbb{P}(X < F^{-1}(u)) = F(F^{-1}(u)-) = F(F^{-1}(u)) = u.$$

On a donc obtenu que pour tout $u \in]0,1[$, $\mathbb{P}(U < u) = u$ et donc $\mathbb{P}(U \le u) = \lim_{\substack{y \to u \\ y > u}} \mathbb{P}(U < y) = u$. On en déduit que U est de loi uniforme sur $[0,1]$.

Par construction, on a $\{X \le x\} \subset \{U \le F(x)\}$. On a également $\{U < F(x)\} \subset \{F(X-) < F(x)\} \subset \{X \le x\}$. Comme p.s. $\{U \le F(x)\} = \{U < F(x)\}$, on en déduit que p.s. $\{X \le x\} = \{U \le F(x)\}$. □

I.2 Copule

On peut caractériser la loi d'une variable aléatoire vectorielle à l'aide de sa fonction de répartition multidimensionnelle. Soit $d \geq 1$, $x = (x_1, \dots, x_d), y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$, on note $x \leq y$ si $x_k \leq y_k$ pour tout $1 \leq k \leq d$.

Définition I.2.1. *Soit $d \geq 1$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On appelle fonction de répartition de X la fonction $F : \mathbb{R}^d \to [0,1]$, parfois notée F_X, définie par $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.*

La proposition suivante assure que la fonction de répartition caractérise la loi. Sa démonstration est similaire à celle de la de la proposition I.1.3 et est laissée au lecteur.

Proposition I.2.2. *Deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ont même loi si et seulement si elles ont même fonction de répartition.*

Soit $d \geq 2$, $X = (X_1, \dots, X_d)$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et F sa fonction de répartition. Il s'avère que la fonction de répartition ne permet pas d'étudier simplement la dépendance des variables aléatoires $X_1, \dots, X_d$ car elle comporte également de l'information sur les lois marginales des variables $X_1, \dots, X_d$. Pour $1 \leq k \leq d$, on note F_k la fonction de répartition de la variable aléatoire X_k. Si les fonctions de répartition $F_1, \dots, F_d$ sont continues, alors la propriété 4 de la proposition I.1.6 assure que les variables $F_1(X_1), \dots, F_d(X_d)$ sont de loi uniforme sur $[0,1]$. On étudie la dépendance des variables aléatoires $X_1, \dots, X_d$ en étudiant la fonction de répartition de $(F_1(X_1), \dots, F_d(X_d))$.

Définition I.2.3. *Soit $d \geq 2$. Une fonction $C : [0,1]^d \mapsto [0,1]$ est appelée **copule** de dimension d, ou simplement copule, si C est (la restriction à $[0,1]^d$ de) la fonction de répartition d'une variable aléatoire $U = (U_1, \dots, U_d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, où les variables aléatoires $U_1, \dots, U_d$ sont de loi uniforme sur $[0,1]$: $C(u) = \mathbb{P}(U \leq u)$ pour tout $u \in [0,1]^d$.*

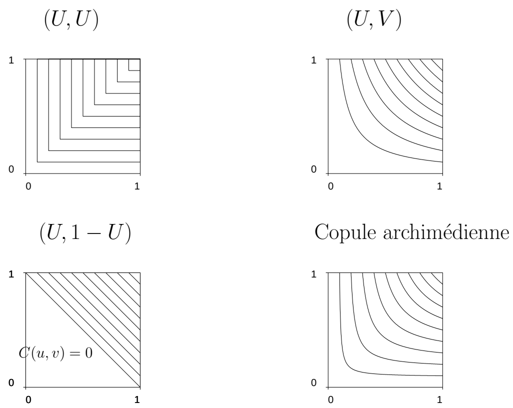

FIG. I.2 – Copules 2-dimensionnelles. Les courbes représentent les ensembles $\{(u,v) \in [0,1]^2 ; C(u,v) = c\}$ pour $c \in \{1/10, \dots, 9/10\}$. Les variables aléatoires U et V sont indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. La copule archimédienne, définie dans la proposition I.3.5, correspond à la loi exponentielle.

Nous donnons quelques exemples de copules, voir le graphique I.2. Nous présenterons les copules archimédiennes dans la proposition I.3.5 à la fin du paragraphe I.3.

Exemple I.2.4. Soit $d \geq 2$.

1. La copule $C(u_1, \ldots, u_d) = \min_{1 \leq k \leq d} u_k$ est la fonction de répartition de la variable $(U_1, \ldots, U_1)$, où U_1 est de loi uniforme sur $[0, 1]$.
2. La copule $C(u_1, \ldots, u_d) = \prod_{1 \leq k \leq d} u_k$ est la fonction de répartition de la variable $(U_1, \ldots, U_d)$, où les variables aléatoires $U_1, \ldots, U_d$ sont indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$.
3. Si C est une copule de dimension $d+p$, $p \geq 1$, alors $u \mapsto C(u, \mathbf{1})$, où $u \in [0, 1]^d$ et $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^p$, est une copule de dimension d.
4. Soit c une fonction réelle définie sur $[0, 1]^d$ mesurable positive et telle que $\int_{[0,1]^d} c(v)\ dv = 1$. La mesure $c(u)\ du$ est une probabilité sur $[0, 1]^d$. Pour $1 \leq k \leq d$, on considère les fonctions $U_k : (u_1, \ldots, u_d) \mapsto u_k$. Le calcul de leur fonction de répartition à l'aide du théorème de Fubini assure que ces variables aléatoires sont de loi uniforme sur $[0, 1]$. La fonction C définie par $C(u) = \int_{[0,1]^d} \mathbf{1}_{\{v \leq u\}} c(v)\ dv$ qui est la fonction de répartition de $(U_1, \ldots, U_d)$ est donc une copule.

$\lozenge$

La proposition suivante assure que les copules sont lipschitziennes.

Proposition I.2.5. *Soit $d \geq 2$ et C une copule de dimension d. Pour tout $u = (u_1, \ldots, u_d), v = (v_1, \ldots, v_d) \in \mathbb{R}^d$, on a $|C(u) - C(v)| \leq \sum_{k=1}^d |u_k - v_k|$.*

On utilise le lemme suivant dont la démonstration qui se fait par récurrence est laissée au lecteur.

Lemme I.2.6. *Soit $(a_k, k \in \mathbb{N}^*)$ et $(b_k, k \in \mathbb{N}^*)$ des suites de nombres complexes de modules inférieurs à 1 ($|a_k| \leq 1$ et $|b_k| \leq 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$). On a, pour tout $n \geq 1$,*

$$\left| \prod_{k=1}^n a_k - \prod_{k=1}^n b_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k - b_k| .$$

Démonstration de la proposition I.2.5. Soit C une copule et des variables aléatoires $U_1, \ldots, U_d$ de loi uniforme sur $[0, 1]$ telles que C soit la fonction de répartition de $U = (U_1, \ldots, U_d)$. Soit $u = (u_1, \ldots, u_d), v = (v_1, \ldots, v_d) \in \mathbb{R}^d$. On a

$$\begin{aligned} |C(u) - C(v)| = |\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{U \leq u\}}] - \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{U \leq v\}}]| &\leq \mathbb{E}[| \prod_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{U_k \leq u_k\}} - \prod_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{U_k \leq v_k\}} |] \\ &\leq \mathbb{E}[\sum_{k=1}^n |\mathbf{1}_{\{U_k \leq u_k\}} - \mathbf{1}_{\{U_k \leq v_k\}}|] \\ &= \sum_{k=1}^n |u_k - v_k|, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Jensen pour la première inégalité et le lemme I.2.6 pour la deuxième. $\square$

Définition I.2.7. *Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de fonction de répartition F. Pour $1 \leq i \leq d$, soit F_k la fonction de répartition de X_k. Une copule pour X est une copule vérifiant*

$$F(x_1, \ldots, x_d) = C(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)) \quad \textit{pour tout } x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{R}. \tag{I.3}$$

Le théorème suivant relie les copules aux fonctions de répartition.

Théorème I.2.8 (Théorème de Sklar)**.** *Soit $d \geq 2$.*

1. *Soit C une copule et $(F_k, 1 \leq k \leq d)$ des fonctions de répartition de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction F définie par (I.3) est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.*
2. *Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Il existe une copule pour X. Si les fonctions de répartition des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_d$ sont continues, alors la copule est unique.*

Démonstration. Soit C une copule et des variables aléatoires $U_1, \ldots, U_d$ de loi uniforme sur $[0,1]$ telles que C soit la fonction de répartition de $(U_1, \ldots, U_d)$. Soit $(F_k, 1 \leq k \leq d)$ des fonctions de répartition de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose $X = (F_1^{-1}(U_1), \ldots, F_d^{-1}(U_d))$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, on a en utilisant (I.2)

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(F_k^{-1}(U_k) \leq x_k, 1 \leq k \leq d) = \mathbb{P}(U_k \leq F_k(x_k), 1 \leq k \leq d) = C(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)).$$

Ceci termine la démonstration de la propriété 1.

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et pour $1 \leq k \leq d$, soit F_k la fonction de répartition de X_k. Soit V une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et indépendante de X. Pour $1 \leq k \leq d$, on pose $U_k = F_k(X_k)$ si F_k est continue et $U_k = F_k(X_k-) + V \sum_{v \in \Delta_k} \mathbb{P}(X_k = v) \mathbf{1}_{\{X_k = v\}}$, où Δ_k est l'ensemble des points de discontinuité de F_k sinon. La proposition I.1.6, si F_k est continue, ou le lemme I.1.7, si F_k n'est pas continue, assurent que les variables aléatoires U_k sont de loi uniforme sur $[0,1]$ et que pour tout $x_k \in \mathbb{R}$ on a p.s. $\{X_k \leq x_k\} = \{U_k \leq F_k(x_k)\}$. On note C la fonction de répartition de $(U_1, \ldots, U_d)$. Par définition C est une copule. Pour $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X_k \leq x_k, 1 \leq k \leq d) = \mathbb{P}(U_k \leq F_k(x_k), 1 \leq k \leq d) = C(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)).$$

Si les fonctions $(F_k, 1 \leq k \leq d)$ sont continues, l'image de chacune d'entre elles contient $]0,1[$. Ceci et la continuité de la copule impliquent l'unicité de la fonction C vérifiant (I.3). □

Nous donnons une représentation analytique des copules.

Théorème I.2.9. *Soit $d \geq 2$ et C une fonction de $[0,1]^d$ à valeurs dans $[0,1]$. La fonction C est une copule si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes :*

1. *Soit $k \in \{1, \ldots, d\}$ et $u = (u_1, \ldots, u_d) \in [0,1]^d$. Si $u_k = 0$ alors, on a $C(u) = 0$. Si $u_i = 1$ pour tout $i \neq k$, alors on a $C(u) = u_k$.*
2. *Pour tout $a = (a_1, \ldots, a_d), b = (b_1, \ldots, b_d) \in [0,1]^d$ tel que $a \leq b$, on a, en notant $u = (u_1, \ldots, u_d)$,*
$$\sum_{u_k \in \{a_k, b_k\}, 1 \leq k \leq d} (-1)^{\text{Card } \{k; u_k = a_k\}} C(u) \geq 0. \tag{I.4}$$

Démonstration. Soit C une copule et des variables aléatoires $U_1, \ldots, U_d$ de loi uniforme sur $[0,1]$ telles que C soit la fonction de répartition de $(U_1, \ldots, U_d)$. Comme $C(u) = \mathbb{P}(U \leq u)$ pour tout $u \in [0,1]^d$, il est immédiat de vérifier la propriété 1. Pour tout $a = (a_1, \ldots, a_d), b = (b_1, \ldots, b_d) \in [0,1]^d$ tel que $a \leq b$, on note $]a,b] = \prod_{k=1}^d]a_k, b_k]$. Pour tout $a = (a_1, \ldots, a_d), b = (b_1, \ldots, b_d) \in [0,1]^d$ tel que $a \leq b$, il est facile de vérifier, en notant $u = (u_1, \ldots, u_d)$, que

$$\sum_{u_k \in \{a_k, b_k\}, 1 \leq k \leq d} (-1)^{\text{Card } \{k; u_k = a_k\}} \mathbf{1}_{]0,u]} = \mathbf{1}_{]a,b]}. \tag{I.5}$$

En prenant l'espérance de l'égalité ci-dessus évaluée en U et en remarquant que $\mathbb{P}(U \in]0,u]) = \mathbb{P}(U \leq u) = C(u)$ car p.s. $\{U_k \leq u\} = \{0 < U_k \leq u_k\}$, on obtient

$$\sum_{u_k \in \{a_k, b_k\}, 1 \leq k \leq d} (-1)^{\text{Card }\{k; u_k = a_k\}} C(u) = \mathbb{P}(U \in]a,b]) \geq 0.$$

Réciproquement, soit C une fonction vérifiant les conditions 1 et 2. On pose $\Omega =]0,1]^d$. La collection $\mathcal{A}$ d'union finie de pavés $]a,b]$, où $a, b \in [0,1]^d$ et $a \leq b$, forme une algèbre booléenne sur Ω qui engendre la tribu borélienne $\mathcal{F}$ sur Ω. On considère P la fonction d'ensembles définie par $\mathrm{P}(]0,u]) = C(u)$ pour tout $u \in [0,1]^d$. En utilisant (I.5), on peut étendre P sur $\mathcal{A}$ en une fonction additive. La décomposition d'un ensemble $A \subset \mathcal{A}$ en réunion de pavés disjoints n'est pas unique, mais (I.5) assure que la valeur $\mathrm{P}(A)$ est indépendante de la décomposition choisie. La condition 1 assure que $\mathrm{P}(\Omega) = 1$ et la condition 2 et (I.5) que $\mathrm{P}(]a,b]) \geq 0$ pour tout $a, b \in [0,1]^d$, $a \leq b$, et par additivité que P définie sur $\mathcal{A}$ est à valeurs dans $[0,1]$. Pour $c \in]a,b]$, on a $[c,b]$ compact avec $]c,b] \subset [c,b] \subset]a,b]$, et

$$\mathrm{P}(]a,b] \cap]c,b]^c) \leq \sum_{k=1}^{d} \mathrm{P}((u_1, \ldots, u_d) \in]0,1]^d; a_k < u_k \leq c_k) \leq \sum_{k=1}^{d} c_k - a_k,$$

où l'on a utilisé la monotonie de P qui découle de la positivité et de l'additivité de P, pour la première inégalité et la propriété 1 pour la deuxième.

On rappelle quelques notions et résultats de la théorie de la mesure.

Définition I.2.10. *Soit $\mathcal{A}$ une collection de sous-ensembles de Ω. On dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre booléenne si :*

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. *Si $A, B \in \mathcal{A}$, alors $A \cap B^c \in \mathcal{A}$.*
3. *Si $A, B \in \mathcal{A}$, alors $A \cup B \in \mathcal{A}$.*

Il est facile de vérifier qu'une algèbre booléenne est stable par intersection finie. Si l'algèbre $\mathcal{A}$ possède la propriété suivante : pour toute suite $(A_n, n \in \mathbb{N})$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, alors par définition $\mathcal{A}$ est une tribu. Le résultat suivant est une conséquence (non triviale) du théorème d'extension de Carathéodory.

Lemme I.2.11. *Soit $d \geq 1$ et $\mathcal{A}$ une algèbre booléenne sur $\mathbb{R}^d$. Soit P une fonction définie sur $\mathcal{A}$ à valeurs dans $[0,\infty]$, additive et de masse totale 1. Si pour tout $A \in \mathcal{A}$, et $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K \subset \mathbb{R}^d$ et $B \in \mathcal{A}$ tels que $B \subset K \subset A$ et $\mathrm{P}(A \cap B^c) \leq \varepsilon$, alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}))$ telle que $\mathbb{P}$ et P coïncident sur $\mathcal{A}$.*

Cette majoration et le fait que tout élément de $\mathcal{A}$ est une union finie de pavés de la forme $]a,b]$, $0 \leq a \leq b \leq 1$, impliquent que les hypothèses du lemme I.2.11 sont satisfaites et donc ceci assure l'existence et l'unicité de l'extension $\mathbb{P}$ de P en une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$. On considère la fonction identité $U = (U_1, \ldots, U_d)$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) : U(u) = u$ pour tout $u \in \Omega$. La condition 1 assure que les variables aléatoires $U_1, \ldots, U_d$ sont de loi uniforme sur $[0,1]$. De plus, on a $\mathbb{P}(U \leq u) = \mathrm{P}(]0,u]) = C(u)$ par construction. La fonction C est donc une copule. □

Nous donnons quelques propriétés des copules : invariance des copules par transformation croissante et encadrement. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $x^+ = \max(x, 0)$ la partie positive de x.

Proposition I.2.12. *Soit $d \geq 2$.*

1. *Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Soit $f_1, \ldots, f_d$ des fonctions réelles croissantes définies sur $\mathbb{R}$. Si C est une copule pour X, alors C est une copule pour $(f_1(X_1), \ldots, f_d(X_d))$.*
2. *Soit C une copule de dimension d. On a, pour tout $u = (u_1, \ldots, u_d) \in [0,1]^d$,*

$$(\sum_{k=1}^{d} u_k - d + 1)^+ \leq C(u) \leq \min_{1 \leq k \leq d} u_k. \tag{I.6}$$

D'après l'exemple I.2.4, la fonction $(u_1, \ldots, u_d) \mapsto \min_{1 \leq i \leq d} u_k$ est la copule correspondant à la variable aléatoire $(U_1, \ldots, U_1)$ où U_1 est de loi uniforme sur $[0,1]$. En particulier c'est une copule pour $(Y, f_2(Y), \ldots, f_d(Y))$, où Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $f_2, \ldots, f_d$ sont des fonctions croissante. Pour la fonction $(u_1, \ldots, u_d) \mapsto (\sum_{i=1}^d u_k - d + 1)^+$, voir l'exercice I.2.

Démonstration. Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et C est une copule pour X. Soit $f_1, \ldots, f_d$ des fonctions réelles croissantes définies sur $\mathbb{R}$. On peut remplacer, grâce à la continuité de C, x_k par x_k- dans (I.3) pour tout $1 \leq k \leq d$. Pour conclure la démonstration de la propriété 1, il suffit alors de remarquer que comme f_k est croissante, pour tout $y_k \in \mathbb{R}$, on a $\{f_k(X_k) \leq y_k\}$ égal à $\{X_k \leq x_k\}$ ou à $\{X_k < x_k\}$ pour un certain $x_k \in \bar{\mathbb{R}}$, et d'utiliser (I.3).

Soit $U_1, \ldots, U_d$ des variables aléatoires de loi uniforme sur $[0,1]$ et C la fonction de répartition de $U = (U_1, \ldots, U_d)$. Soit $u = (u_1, \ldots, u_d) \in [0,1]^d$. On a, pour $1 \leq k \leq d$,

$$C(u) = \mathbb{P}(U \leq u) = \mathbb{P}(U_1 \leq u_1, \ldots, U_d \leq u_d) \leq \mathbb{P}(U_k \leq u_k) = u_k,$$

et donc $C(u) \leq \min_{1 \leq k \leq d} u_k$. On a également

$$C(u) = \mathbb{P}(U_1 \leq u_1, \ldots, U_d \leq u_d) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{d} \{U_k > u_k\}\right) \geq 1 - \sum_{k=1}^{d} \mathbb{P}(U_k > u_k) = 1 - d + \sum_{k=1}^{d} u_k.$$

Comme $C(u) \geq 0$, on en déduit que $C(u) \geq (\sum_{k=1}^d u_k - d + 1)^+$. □

Exercice I.2.
Soit $d \geq 2$ et U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. On considère la fonction W_d : $(u_1, \ldots, u_d) \mapsto (\sum_{k=1}^d u_k - d + 1)^+$ définie sur $[0,1]^d$.

1. Montrer que W_2 est la fonction de répartition de $(U, 1-U)$ et que W_2 est une copule.
2. Vérifier que W_3 ne vérifie pas la condition (I.4), en prenant $b = (1,1,1)$ et $a = b/2$. En déduire que W_d n'est pas une copule pour $d \geq 3$.
3. Montrer que W_3 satisfait (I.3) pour $X_1 = \mathbf{1}_{[0,1/3[}(U)$, $X_1 = \mathbf{1}_{[1/3,2/3[}(U)$ et $X_3 = 1 - X_1 - X_2$.
4. Soit $p_k \in [0,1]$ pour $k \in \{1, \ldots, d\}$. Pour $k \in \{1, \ldots, d\}$, on pose

$$X_k = \mathbf{1}_{[\min(\sum_{j=1}^{k-1} p_j, 1-p_k), \min(\sum_{j=1}^{k} p_j, 1)[}(U),$$

avec la convention $\sum_{j=1}^0 p_j = 0$. Calculer $\mathbb{P}(X_k \leq 0)$ et $\mathbb{P}(X_1 \leq 0, \ldots, X_n \leq 0)$. En déduire que la minoration de l'équation (I.6) est optimale : pour tout $u \in [0,1]^d$, il existe une copule C telle que $C(u) = W_d(u)$.

△

I.3 Transformée de Laplace

La transformée de Laplace est utile pour étudier les variables aléatoires à valeurs dans $[0, \infty[$.

Définition I.3.1. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[0, \infty[$. La fonction*

$$\varphi(\lambda) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda X}], \quad \lambda \geq 0,$$

parfois notée φ_X, s'appelle la transformée de Laplace de X.

Il est immédiat de vérifier que $0 \leq \varphi_X(\lambda) \leq 1$ et $\varphi_X(0) = 1$. On a les propriétés suivantes des transformées de Laplace.

Proposition I.3.2. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[0, \infty[$ de transformée de Laplace φ. La fonction φ est de classe C^∞ sur $]0, \infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda > 0$, on a $\varphi^{(n)}(\lambda) = (-1)^n \mathbb{E}[X^n \, \mathrm{e}^{-\lambda X}]$ et $\lim_{\lambda \to 0} \varphi^{(n)}(\lambda) = (-1)^n \mathbb{E}[X^n]$.*

Démonstration. La fonction $h \mapsto h^{-1}(1 - \mathrm{e}^{-hx})$ croît vers x quand h décroît vers 0. Le théorème de convergence monotone implique que pour tout $\lambda > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} h^{-1} \mathbb{E}[X^n \, \mathrm{e}^{-\lambda X}(1 - \mathrm{e}^{-hX})] = \mathbb{E}[X^{n+1} \, \mathrm{e}^{-\lambda X}]$. Il est facile d'en déduire par récurrence les assertions de la proposition. □

Tout comme la fonction caractéristique, la transformée de Laplace caractérise la loi.

Proposition I.3.3. *Deux variables aléatoires à valeurs dans $[0, \infty[$ ont même loi si et seulement si elles ont même transformée de Laplace.*

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{R}$. Soit φ la transformée de Laplace d'une variable aléatoire X à valeurs dans $[0, \infty[$. Comme φ est bornée par 1, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(iu)^n}{n!} \varphi(n)$ est absolument convergente. On déduit du théorème de convergence dominée que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(iu)^n}{n!} \varphi(n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(iu)^n}{n!} \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-nX}] = \mathbb{E}\left[\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(iu)^n}{n!} \, \mathrm{e}^{-nX}\right] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iu \exp(-X)}].$$

Ainsi si X et Y ont même transformée de Laplace, alors e^{-X} et e^{-Y} ont même fonction caractéristique et donc même loi. Ceci implique que X et Y ont même loi. □

Remarque I.3.4. On dit qu'une fonction g définie sur $]0, \infty[$ est complètement monotone si elle est de classe C^∞ et telle que, pour tout $x > 0$, $(-1)^n g^{(n)}(x) \geq 0$ (une définition alternative consiste à remplacer les dérivées par des accroissements et donc à ne pas supposer que g est dérivable). Il est immédiat de vérifier qu'une transformée de Laplace est complètement monotone. Le théorème de Bernstein assure qu'une fonction g définie sur $[0, \infty[$ est une transformée de Laplace si elle est complètement monotone sur $]0, \infty[$, vaut 1 en 0 et est continue en 0. ♢

Exercice I.3.
Montrer que deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{R}$ bornées ayant tous leurs moments égaux, $\mathbb{E}[X^n] = \mathbb{E}[Y^n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ont même loi. △

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $]0, \infty[$ et de transformée de Laplace φ. Comme $\mathbb{P}(X = 0) = 0$, la fonction φ est strictement décroissante et est une bijection de $[0, \infty[$ dans $]0, 1]$. On note φ^{-1} son inverse défini sur $[0, 1[$. Par convention on pose $\varphi(\infty) = 0$ et $\varphi^{-1}(\infty) = 0$.

Proposition I.3.5. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $]0,\infty[$ et de transformée de Laplace φ. Soit $d \geq 2$. La fonction $C : [0,1]^d \mapsto [0,1]$ définie par $C(u_1,\dots,u_d) = \varphi\left(\varphi^{-1}(u_1) + \cdots + \varphi^{-1}(u_d)\right)$ est une copule.*

La copule de la proposition I.3.5 est appelée copule archimédienne.

Démonstration. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $]0,\infty[$ de transformée de Laplace φ, $d \geq 2$ et $U_1,\dots,U_d$ des variables indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$ et indépendantes de X. Pour $1 \leq k \leq d$, on pose $X_k = \varphi(-\log(U_k)/X)$. On a pour $v \in]0,1[$ $\{X_k \leq v\} = \{U_k \leq \mathrm{e}^{-X\varphi^{-1}(v)}\}$. On note μ la mesure image sur de $]0,\infty[$ de X. Par indépendance, la mesure image de $(X, U_1,\dots,U_d)$ est la mesure produit. Il découle du théorème de Fubini que pour toute fonction g définie $\mathbb{R}^{d+1}$ réelle mesurable bornée, on a

$$\mathbb{E}[g(X,U_1,\dots,U_d)] = \int g(x,u)\mathbf{1}_{[0,1]^d}(u)\ \mu(dx)du = \mathbb{E}\left[\int_{[0,1]^d} g(X,u)\ du\right].$$

En particulier, on a pour $u_k \in]0,1[$

$$\mathbb{P}(X_k \leq u_k) = \mathbb{P}(U_k \leq \mathrm{e}^{-X\varphi^{-1}(u_k)}) = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-X\varphi^{-1}(u_k)}\right] = \varphi(\varphi^{-1}(u_k)) = u_k.$$

On en déduit que les variables aléatoires $X_1,\dots,X_d$ sont de loi uniforme sur $[0,1]$. On a pour $u_1,\dots,u_d \in]0,1[$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 \leq u_1,\dots,X_d \leq u_d) &= \mathbb{P}(U_1 \leq \mathrm{e}^{-X\varphi^{-1}(u_1)},\dots,U_d \leq \mathrm{e}^{-X\varphi^{-1}(u_d)})\\ &= \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-X(\varphi^{-1}(u_1)+\ldots+\varphi^{-1}(u_d))}\right]\\ &= \varphi\left(\varphi^{-1}(u_1) + \cdots + \varphi^{-1}(u_d)\right).\end{aligned}$$

Ceci assure que la fonction C est la fonction de répartition de $(X_1,\dots,X_d)$. C'est donc une copule. □