

31 Janvier 2007



Risque de contrepartie sur opérations de marché

Marwan Moubachir



RISQ/CMC/MOD



Plan

- I. Introduction
- II. Le pilotage opérationnel des activités de la banque
- III. Le risque de remplacement et mesure de l'exposition
- IV. Calibration d'un modèle de taux
- V. Les sujets de recherche



Plan

I. Introduction

II. Le pilotage opérationnel des activités de la banque

1. Le capital économique v.s réglementaire
2. Bâle I/II

III. Le risque de remplacement et mesure de l'exposition

1. Principes généraux
2. Exemples de calculs d'exposition
3. Cadre juridique et réduction des risques

IV. Calibration d'un modèle de taux

V. Les sujets de recherche



Le pilotage des activités de la banque

- **Objectifs de la banque : satisfaire l'appétit de rentabilité de ses actionnaires en proposant des services financiers aux entreprises et particuliers.**

- **Moyens :**
 - ▶ Maximiser une fonction d'utilité fondée à la fois sur les performances et les risques pris (RAROC, EVA).
 - ▶ Constituer des fonds propres permettant de faire face à des pertes exceptionnelles et financer des projets à long terme.
 - ▶ Réduire localement les risques en imposant des limites de trading par contrepartie (risque de crédit) ou par desk de trading (risque de marché).

- **Approche bottom-up : allocation itérative macro du capital selon les contraintes fixées au niveau micro.**



Le contrôle du secteur bancaire

- **Objectif du régulateur : garantir la stabilité du système financier international dans l'occurrence de scénarios de crise.**

- **Moyens :**
 - ▶ Exiger la constitution de fonds propres sur la base d'un calcul réglementaire.
 - ▶ Contrainte sur un ratio de cooke (Bâle I) de McDonough (Bâle II).
 - ▶ La politique de croissance externe, la capacité d'acquisition est :
 - Dimensionnée par rapport au disponible réglementaire
 - Allouée par rapport à une vision économique des risques



Capital réglementaire/économique

- Déterminer le montant de fonds propres nécessaires pour couvrir les pertes exceptionnelles (UL: Unexpected Loss) pour une probabilité de défaut à un horizon donné.
- Capital réglementaire : rating cible BBB+/A-
- Capital économique : rating cible AA-

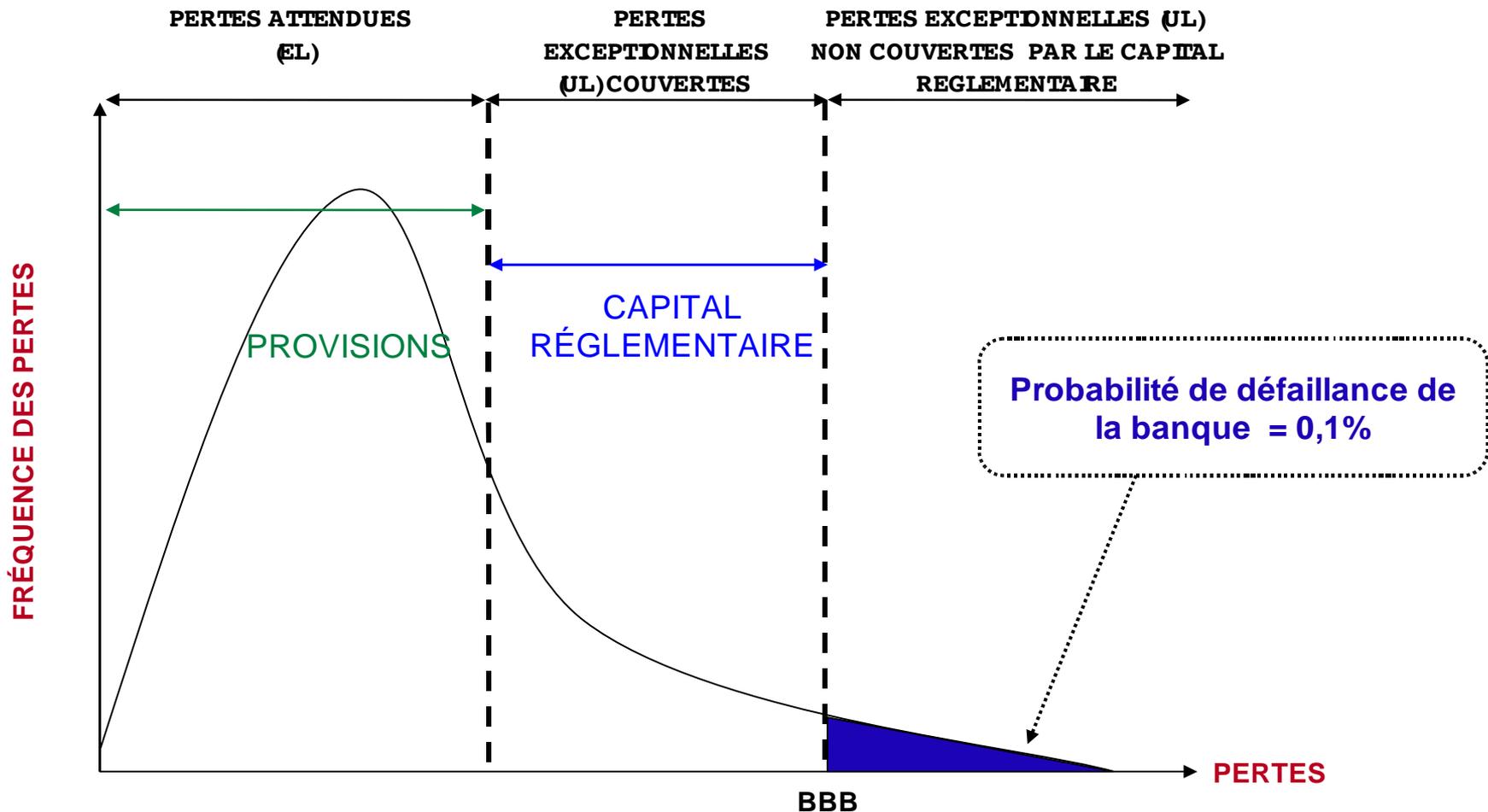


Le risque de crédit

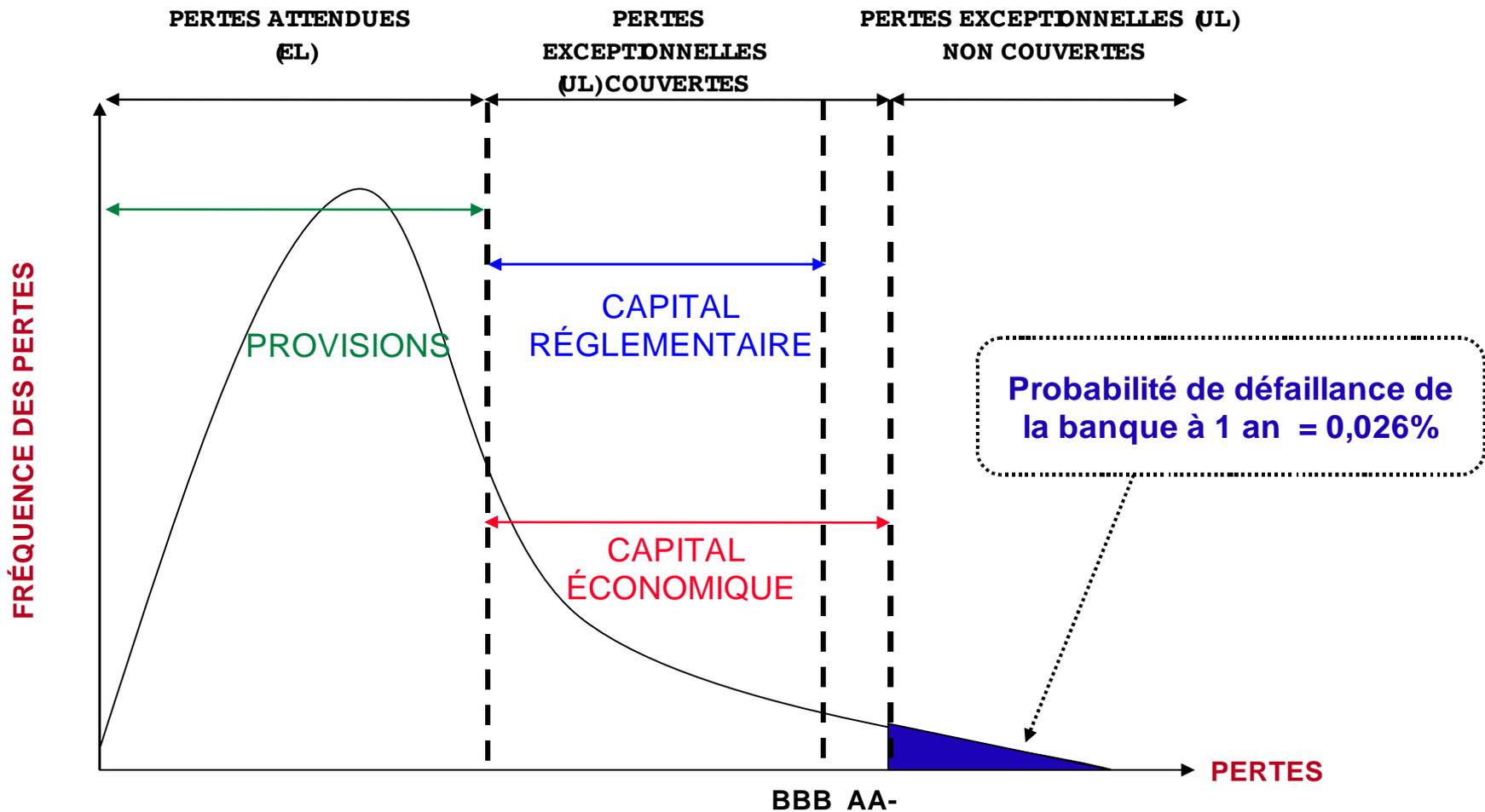
- **Le risque de crédit : représente le montant de la perte que la SG peut encourir dans le cadre d'opérations qu'elle effectue avec un client/contrepartie, lorsque ce client/contrepartie est en défaut au cours de la vie de l'opération.**

- **Trois grands types de risque de contrepartie peuvent être répertoriés :**
 - ▶ Exposition de crédit ou risque débiteur: risque lié à l'octroi d'un prêt.
 - ▶ Exposition de règlement/livraison:risque supporté dans le cadre de l'échange simultané et non sécurisé de deux actifs (devises, titres...)
 - ▶ Exposition de remplacement : risque engendré par la conclusion d'un produit dérivé(y compris opérations de prêt/emprunt de titres)

Qu'est-ce que le capital réglementaire ?



Qu'est-ce que le capital économique ?



Différences théoriques entre le Capital Économique et le Capital Réglementaire

	REGLEMENTAIRE	ECONOMIQUE
Concept	Obligatoire Contrainte : BBB à 1 an	Décision SG Contrainte : AA - à 3 ans
Type de perte couverte	Inattendue	Inattendue
Probabilité de Défaut (PD)	- non prise en compte de la PD jointe - floor de 0,03% pour les banques et les corporates - évolution dans le temps de la PD non prise en compte	- prise en compte de la PD jointe entre le garant et la contrepartie - Pas de floor - évolution dans le temps de la PD prise en compte
Concentration	Non	Oui
Corrélation	Oui (en fonction du rating)	Oui (en fonction de la taille, du secteur et du pays)
Maturité	1 an < Maturité < 5 ans	Maturité réelle



L'indicateur RAROC

- le RAROC est une mesure de rentabilité ajustée du risque (ex-ante) :

RAROC = Risk Adjusted Return On Capital

$$\text{RAROC} = \frac{\text{PNB attendu} - \text{Perte moyenne attendue}}{\text{Capital Économique}}$$

La détermination d'une rentabilité de type RAROC **nécessite de quantifier a priori** :

- le niveau de risque attendu du concours (ou du portefeuille)

⇔ *numérateur*

- le capital que la SG devra de mobiliser pour couvrir le risque exceptionnel (inattendu) de ce concours

⇔ *dénominateur*



L'indicateur EVA

- L'EVA mesure la création de valeur d'une opération, d'un client, d'un portefeuille c'est à dire le revenu après déduction du coût du risque et du coût du capital.
- **EVA = reformulation du ratio RAROC** en dégageant une mesure de la rentabilité en montant plutôt qu'en valeur relative (en % du capital) et en intégrant le coût de rémunération du capital.

EVA = PNB attendu – Perte Moyenne – X%(*) du Capital Économique

() X % représente le taux de rendement attendu par l'actionnaire au dessus du taux sans risque (obtenu à l'aide du modèle CPAM)*



Interprétation RAROC/EVA

<u>RAROC</u>	<u>EVA</u>	<u>Résultat</u>
+	+	Bon rendement - Dépasse le rendement attendu par les actionnaires ($EVA > 0$). Rentabilité très satisfaisante.
+	0	Rendement positif - Couvre le rendement attendu par les actionnaires ($EVA = 0$). Rentabilité satisfaisante.
+	-	Rendement positif - Inférieur au rendement attendu par les actionnaires ($EVA < 0$). A replacer dans le contexte de la rentabilité client et de l'enjeu de l'opération.
-	-	Rendement ajusté du risque négatif ($RAROC$ et $EVA < 0$) Doit faire l'objet d'une analyse avec la Direction. Commerciale : droit d'entrée à payer pour nouer des relations, défense de positions fortes...



Plan

I. Introduction

II. Le pilotage opérationnel des activités de la banque

1. Le capital économique v.s réglementaire
2. **Bâle I/II**

III. Le risque de remplacement et mesure de l'exposition

1. Principes généraux
2. Exemples de calculs d'exposition
3. Cadre juridique et réduction des risques

IV. Calibration d'un modèle de taux

V. Les sujets de recherche



De Bâle I à Bâle II

■ Bâle I (ratio Cooke)

■ Points forts

- ▶ Simplicité
- ▶ Renforcement de la stabilité du système bancaire
- ▶ Méthodes simples pour calculer le ratio de solvabilité issu des données comptables.

■ Points faibles

- ▶ La sensibilité aux risques est inadéquate
- ▶ Le système de pondération forfaitaire ne tient pas compte du profil des risques individuels de chaque banque.



De Bâle I à Bâle II

- **Bâle II (ratio McDonough)**
- **Objectif**
 - ▶ implémenter un nouveau cadre plutôt qu'une simple norme de solvabilité
- **Moyens**
 - ▶ Définition d'un ratio plus sensible aux risques et plus détaillé
 - ▶ Définition d'un cadre s'appuyant sur le système de gestion interne des banques
- **Conséquences**
 - ▶ Exigence d'une plus grande transparence
 - ▶ Accroissement du rôle du régulateur



De Bâle I à Bâle II



Calcul du capital minimum exigé, afin de mieux prendre en compte la totalité des risques bancaires



Renforcement des contrôles par les organismes nationaux de surveillance / introduction du « Capital Économique »

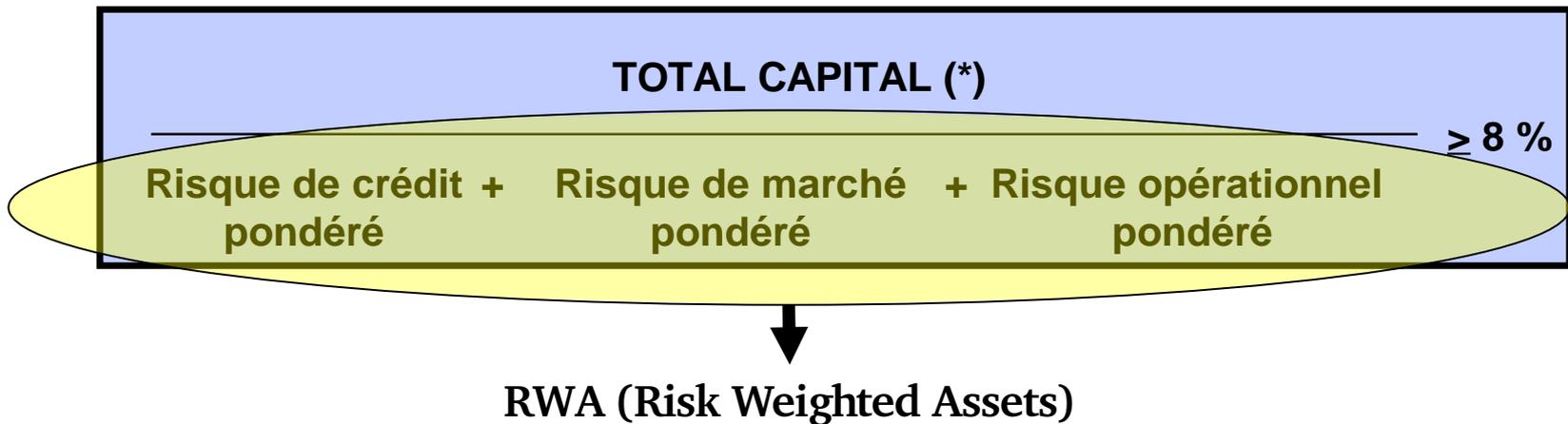


Discipline de marché à travers une communication financière améliorée



De Bâle I à Bâle II

- Capital minimum exigé



- Les pondérations sont déterminées selon la méthode choisie par la banque et validée par le régulateur



De Bâle I à Bâle II

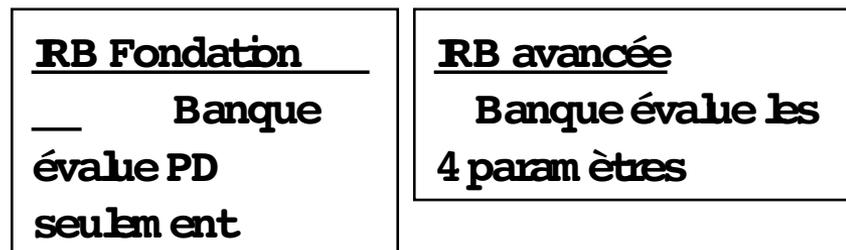
■ Méthode standard

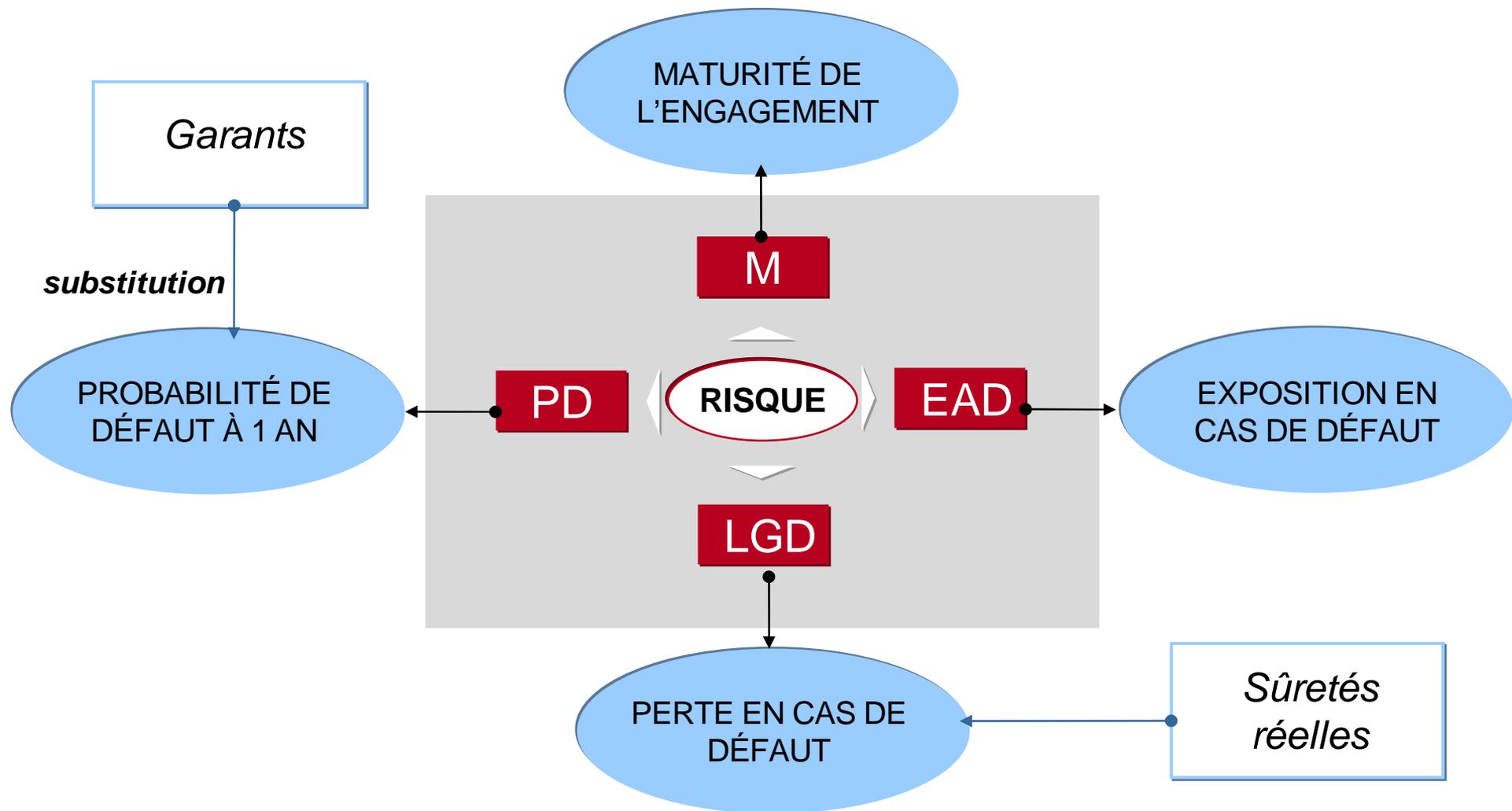
- ▶ Principes proches des règles actuelles.
- ▶ Des indicateurs simples provenant de sources externes à la banque (agences de notation, Banque de France, ..).

■ Méthode notation interne

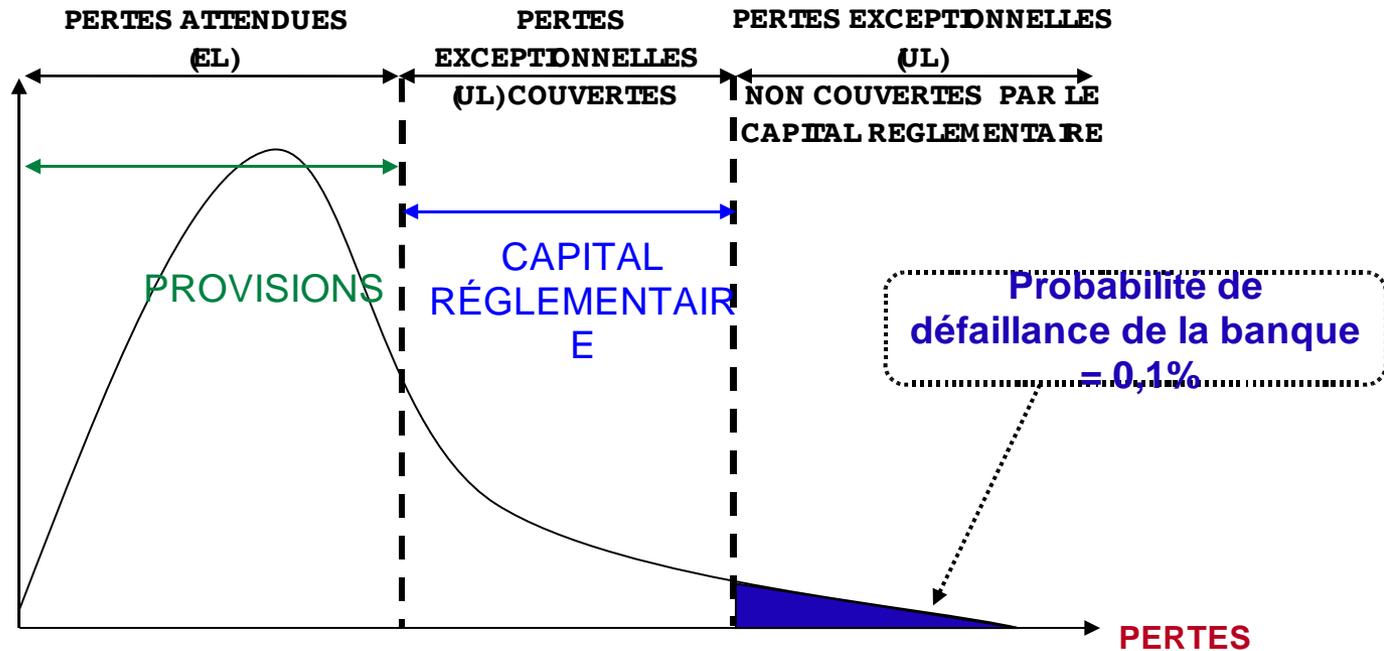
- ▶ Pondérations calculées à partir de 4 paramètres :
- ▶ Probabilité de défaut à 1 an (PD)
- ▶ Exposition en cas de défaut (EAD)
- ▶ Perte en cas de défaut (LGD)
- ▶ Maturité résiduelle (M)

Choix entre deux méthodes





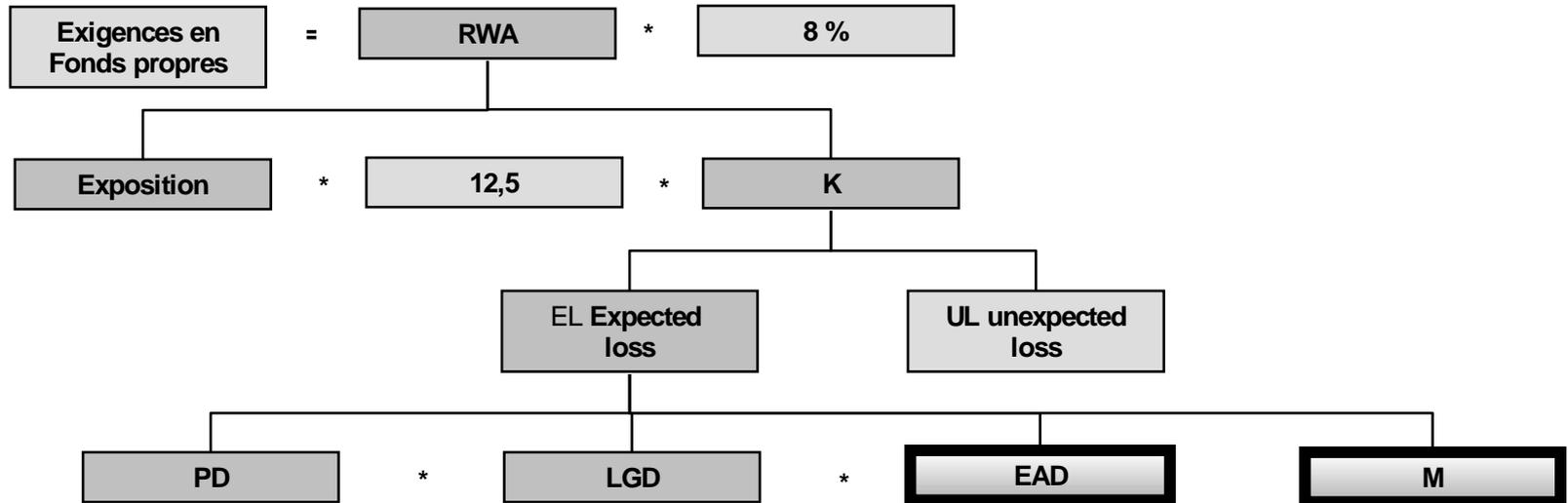
De Bâle I à Bâle II



■ Schématiquement, $RWA * 8\% = K \cong (EL + UL)$ ^{BBB}

- ▶ K = capital réglementaire
- ▶ $EL = PD \times LGD \times EAD$

De Bâle I à Bâle II

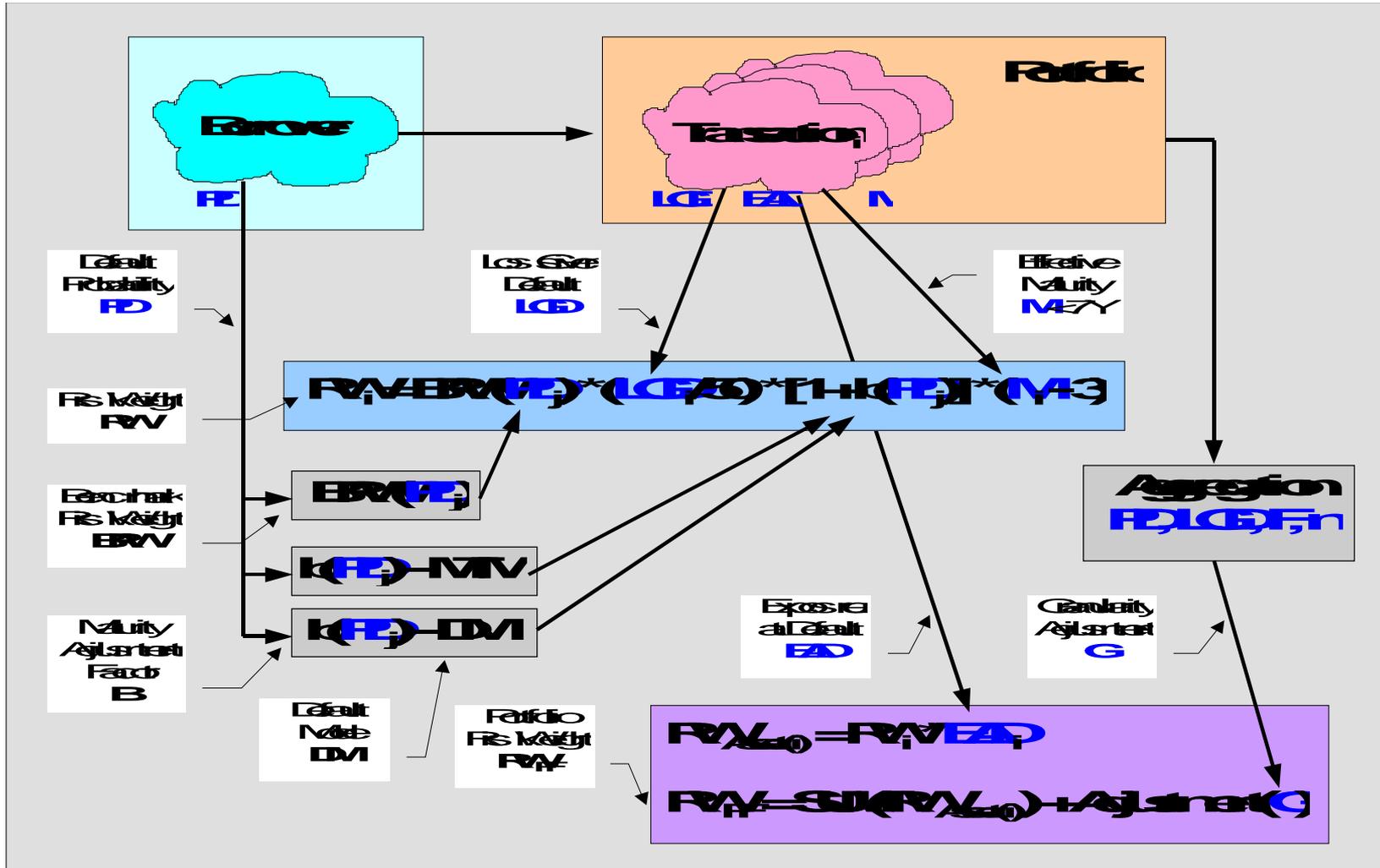


■ Exemple d'un change à terme à échéance 5 mois :

- ▶ $EAD = MtM + Nominal * Add\ on.$
- ▶ $M = \text{Min} [\text{Max} (1\ \text{an} ; \text{maturité résiduelle}) ; 5\ \text{ans}]$

■ Complexité accrue quand contrat cadre et contrat d'appel de marge

De Bâle I à Bâle II





Plan

I. Introduction

II. Le pilotage opérationnel des activités de la banque

1. Le capital économique v.s réglementaire
2. Bâle I/II

III. Le risque de remplacement et mesure de l'exposition

1. Principes généraux
2. Exemples de calculs d'exposition
3. Cadre juridique et réduction des risques

IV. Analyse de la mesure fractile

V. Calibration d'un modèle de taux

VI. Les sujets de recherche



Risque de remplacement

■ Définition:

- ▶ Exposition liée à la mise en place d'un produit dérivé ou assimilé (change à terme, négoce de titres, swap de taux d'intérêt , etc..)
- ▶ C'est le montant que l'on peut perdre avec une contrepartie quand celle-ci est défaillante et que la position ne puisse être remplacée qu'à un prix de marché plus élevé que celui convenu avec la contrepartie (valeur de remplacement positive)
- ▶ Si la contrepartie est insolvable est que la valeur de remplacement est négative, aucune perte n'est enregistrée.



Mesure du risque de remplacement

■ Mark to market :

- ▶ Mesure instantanée du coût de retournement de la position

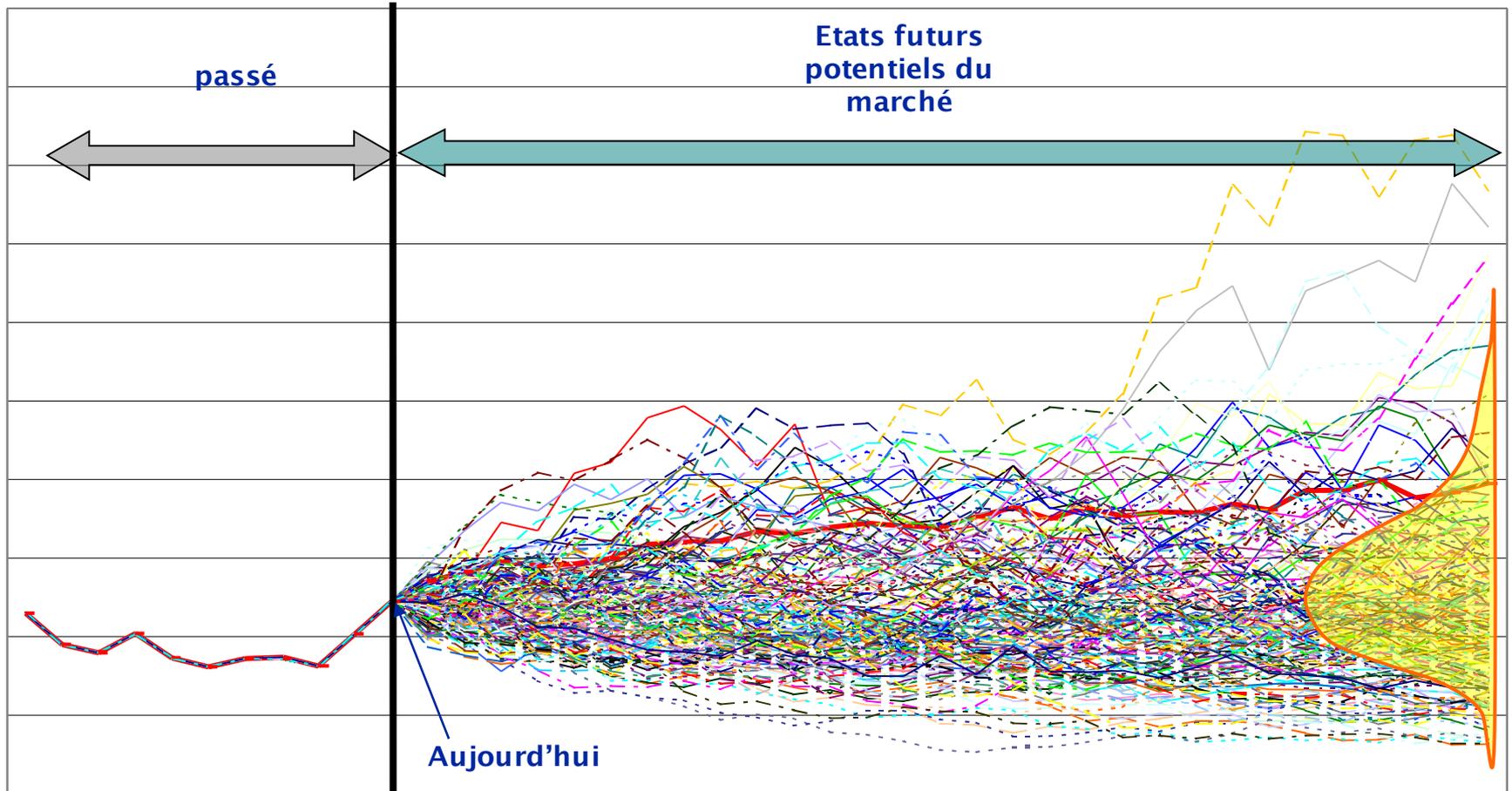
■ Risque courant Moyen (RCM ou CAR)

- ▶ Evaluation selon un modèle statistique de la moyenne des occurrences positives des MtM futurs sur la durée de l'opération

■ Mesure en Credit Var (CVAR)

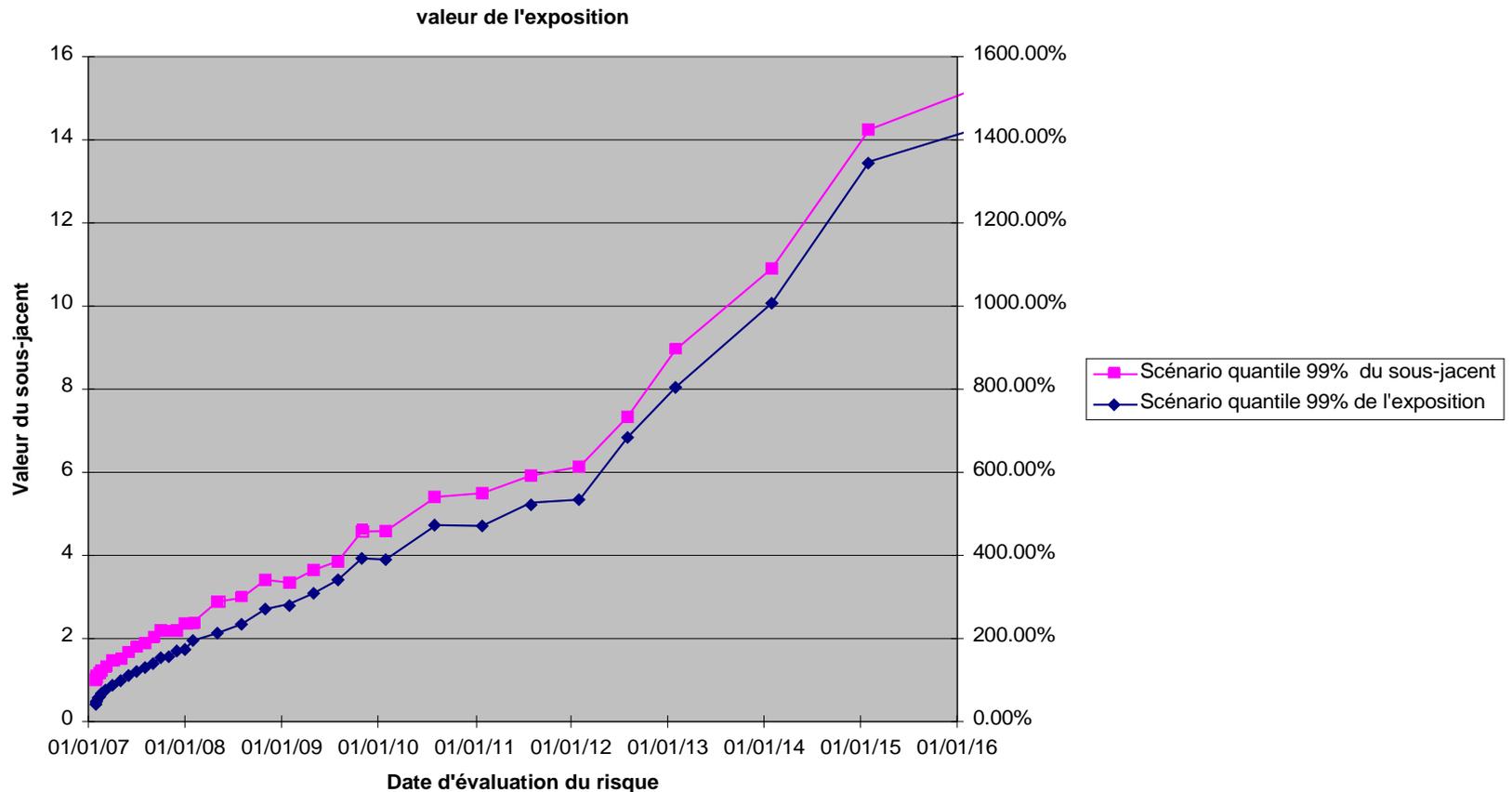
- ▶ Indicateur fractile à 99% de l'exposition future.

Mesure du risque de remplacement



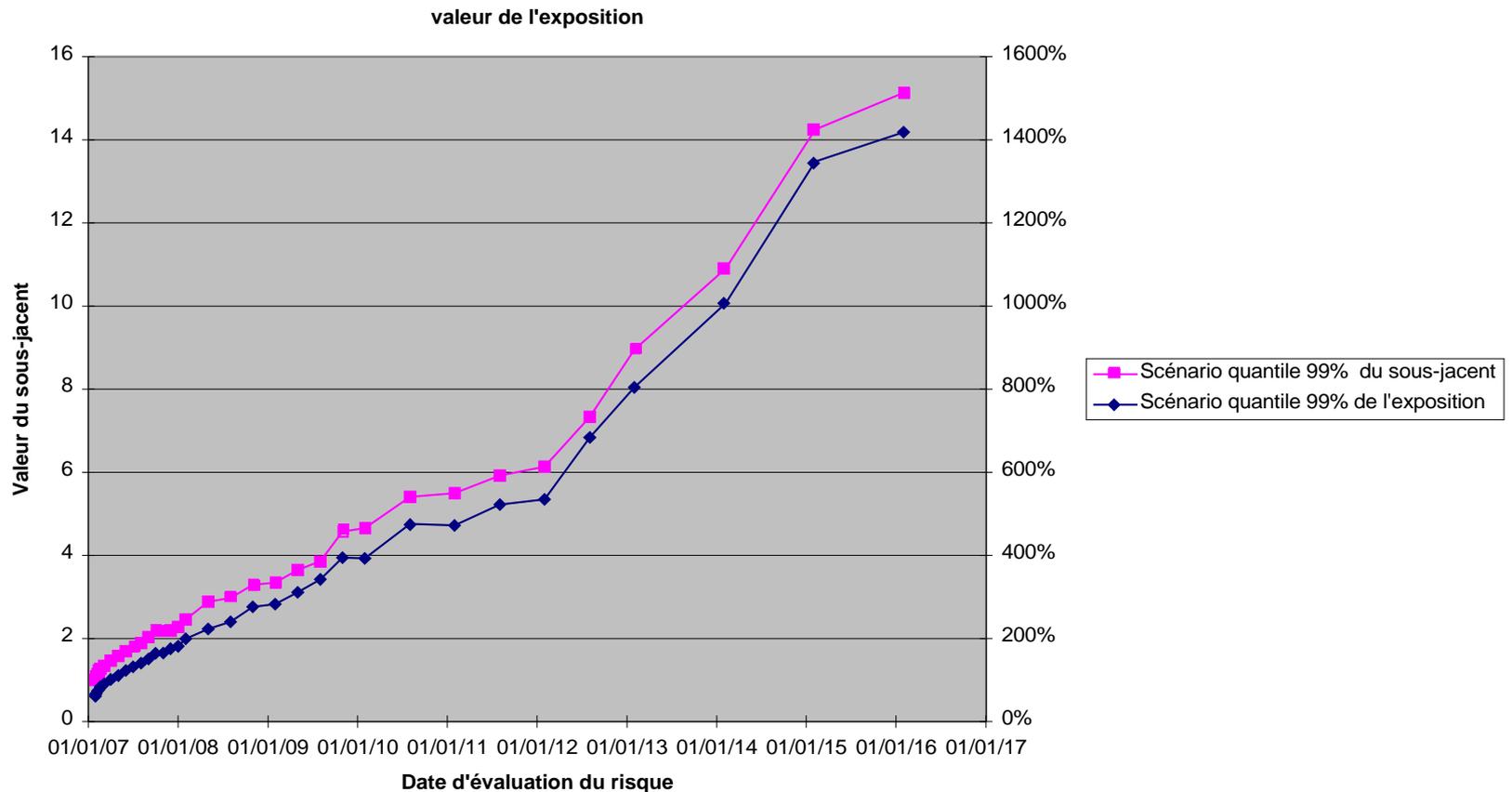
Contrat forward sur action

Profil de la CVAR d'un Forward à la monnaie vol histo 40%



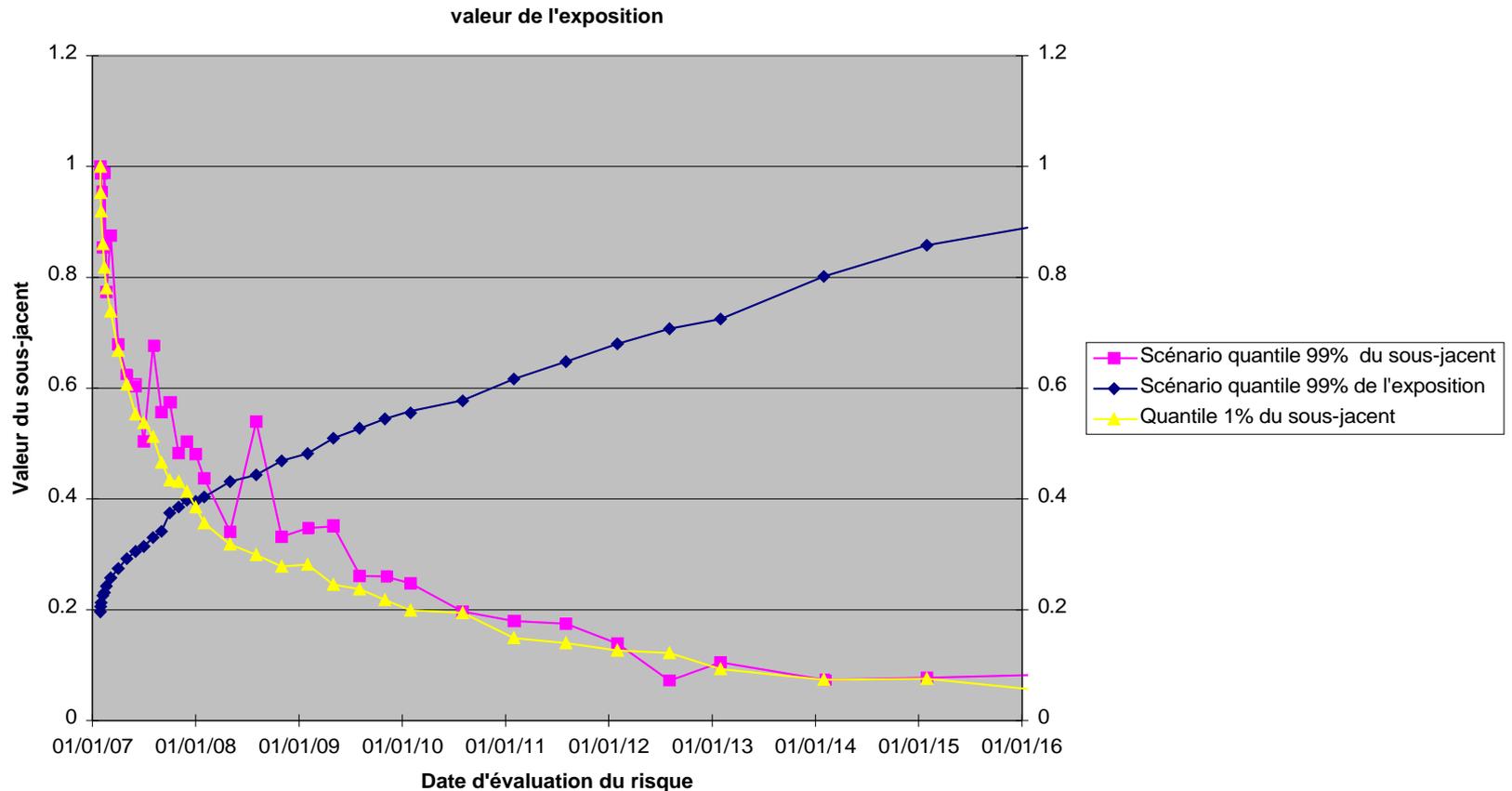
Call Option européenne sur action

Profile de la CVAR d'un call à la monnaie vol histo 40%



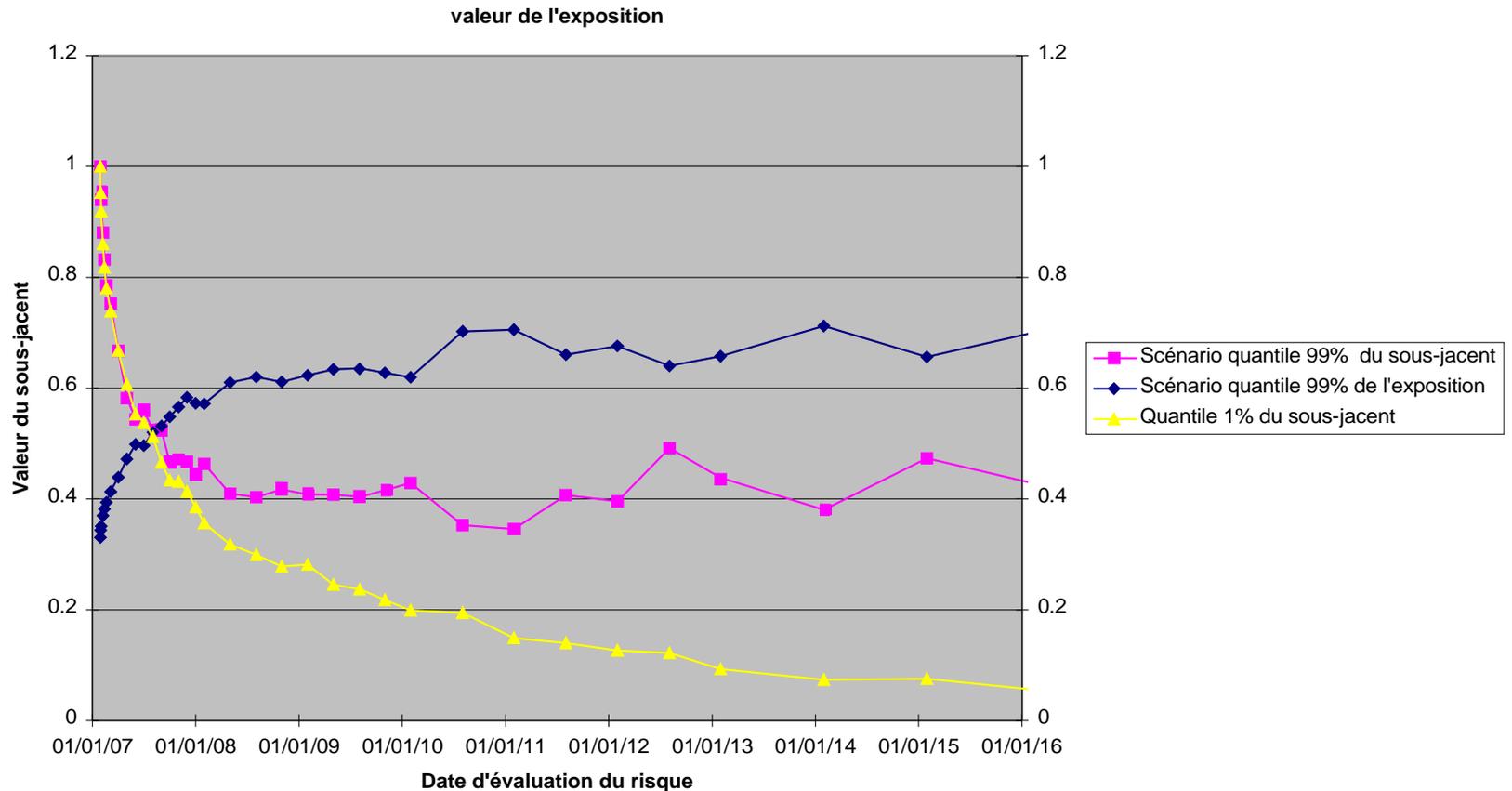
Put Option européenne sur action

Profile de la CVAR d'un Put à la monnaie vol histo 40%

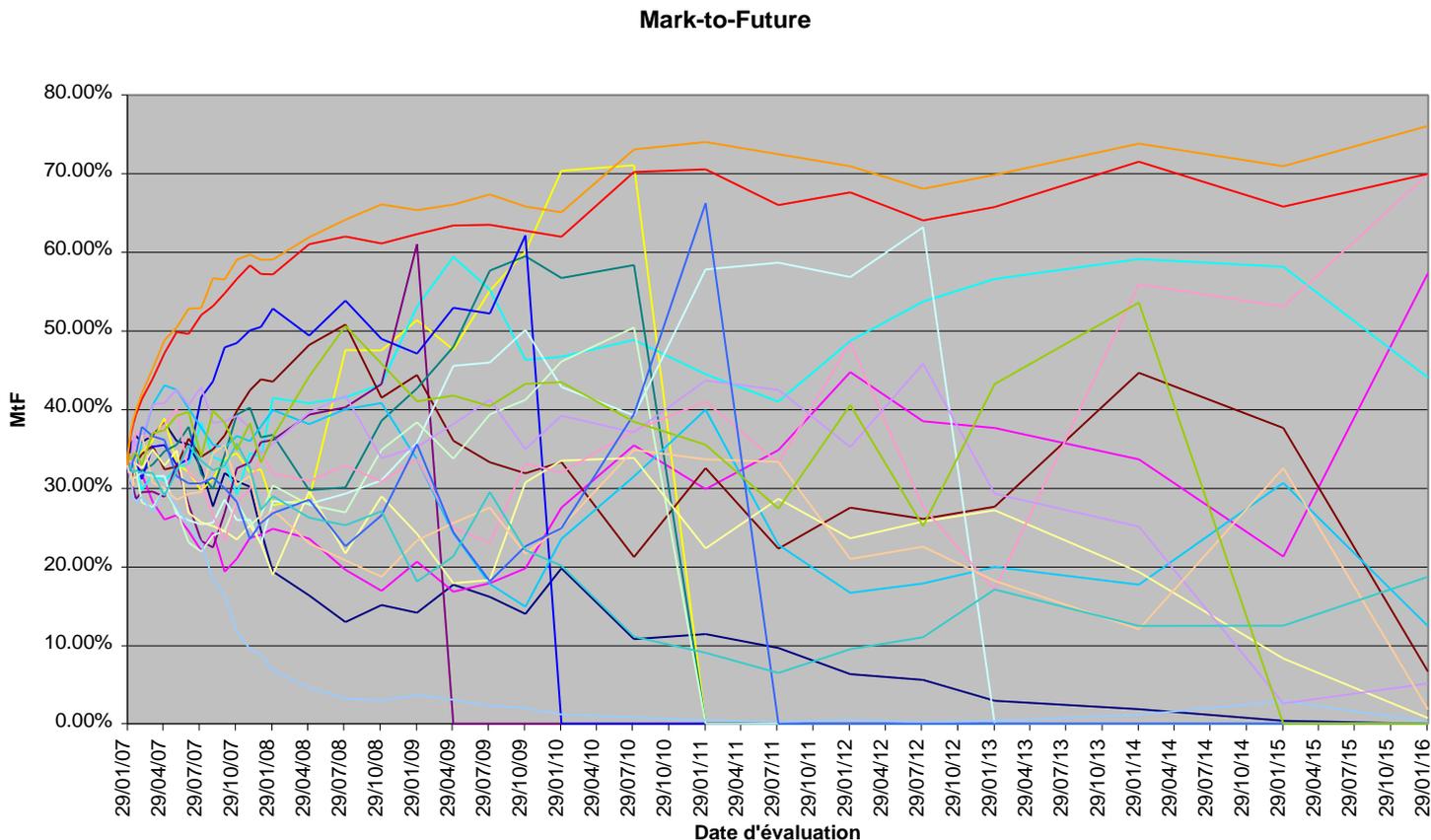


Put Option américaine avec cost of carry sur action

Profile de la CVAR d'un Put américain à la monnaie vol histo 40% cost of carry 4%

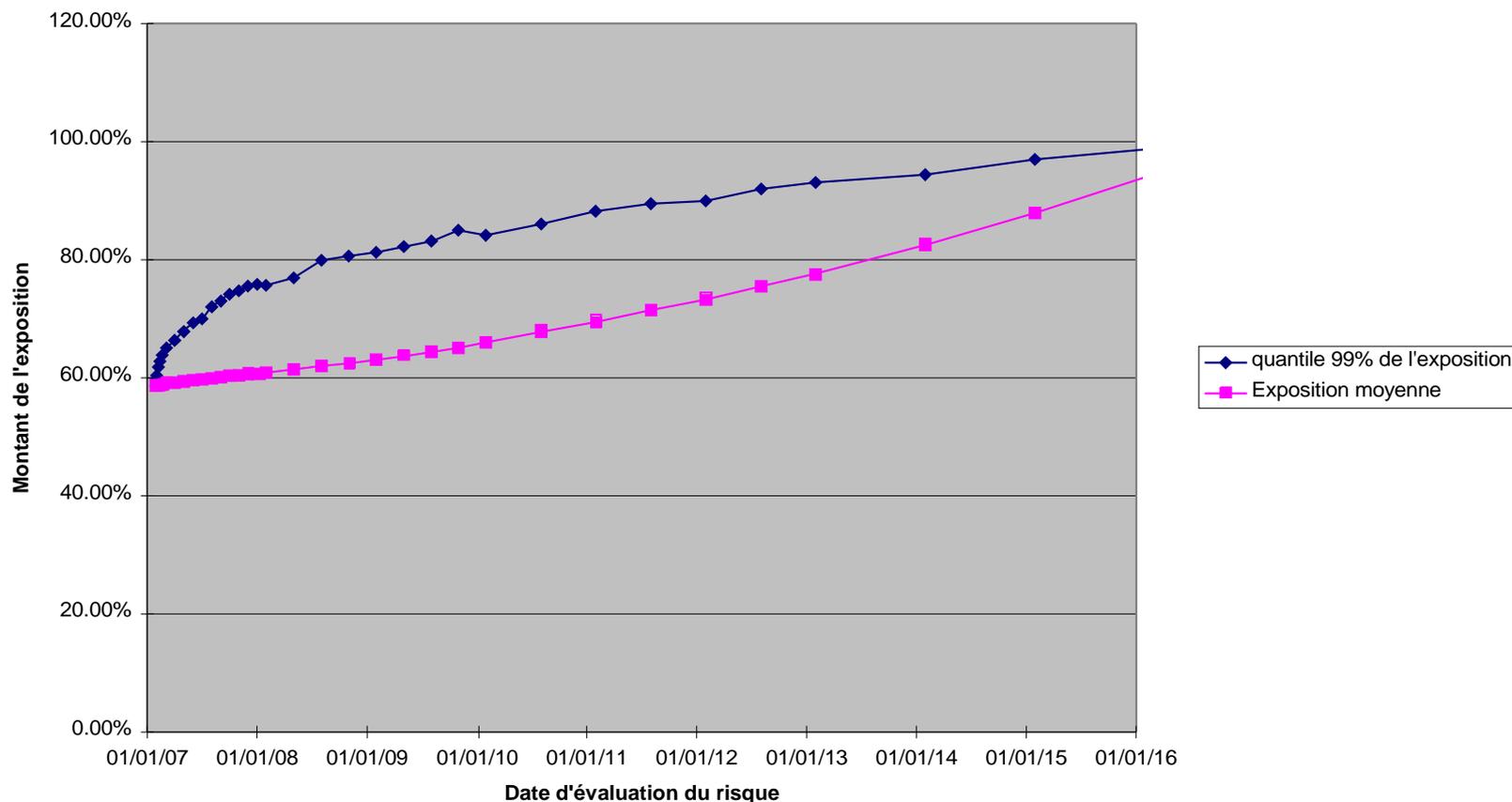


Put Option américaine avec cost of carry sur action



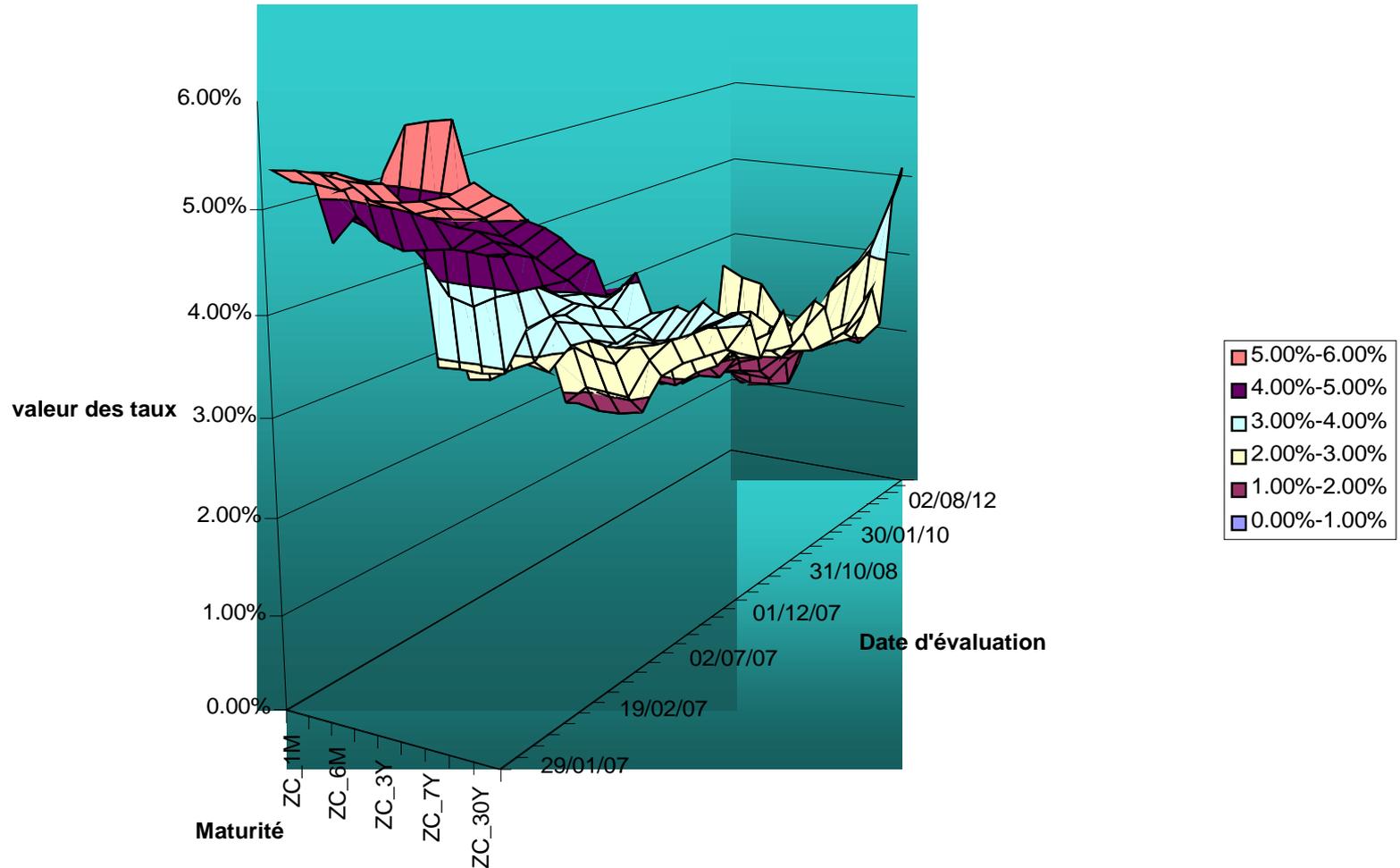
Zero coupon fixe

Profile de la CVAR ZC USD

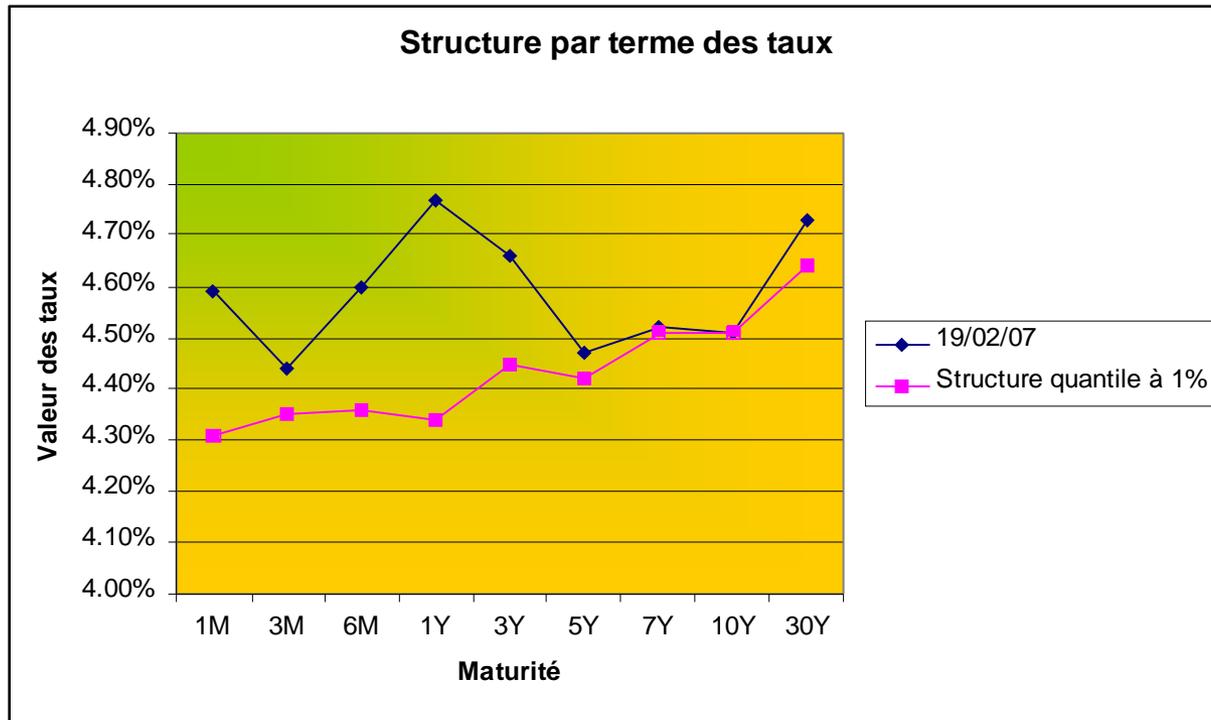


Zero coupon fixe

Scénarios de taux produisant l'exposition quantile

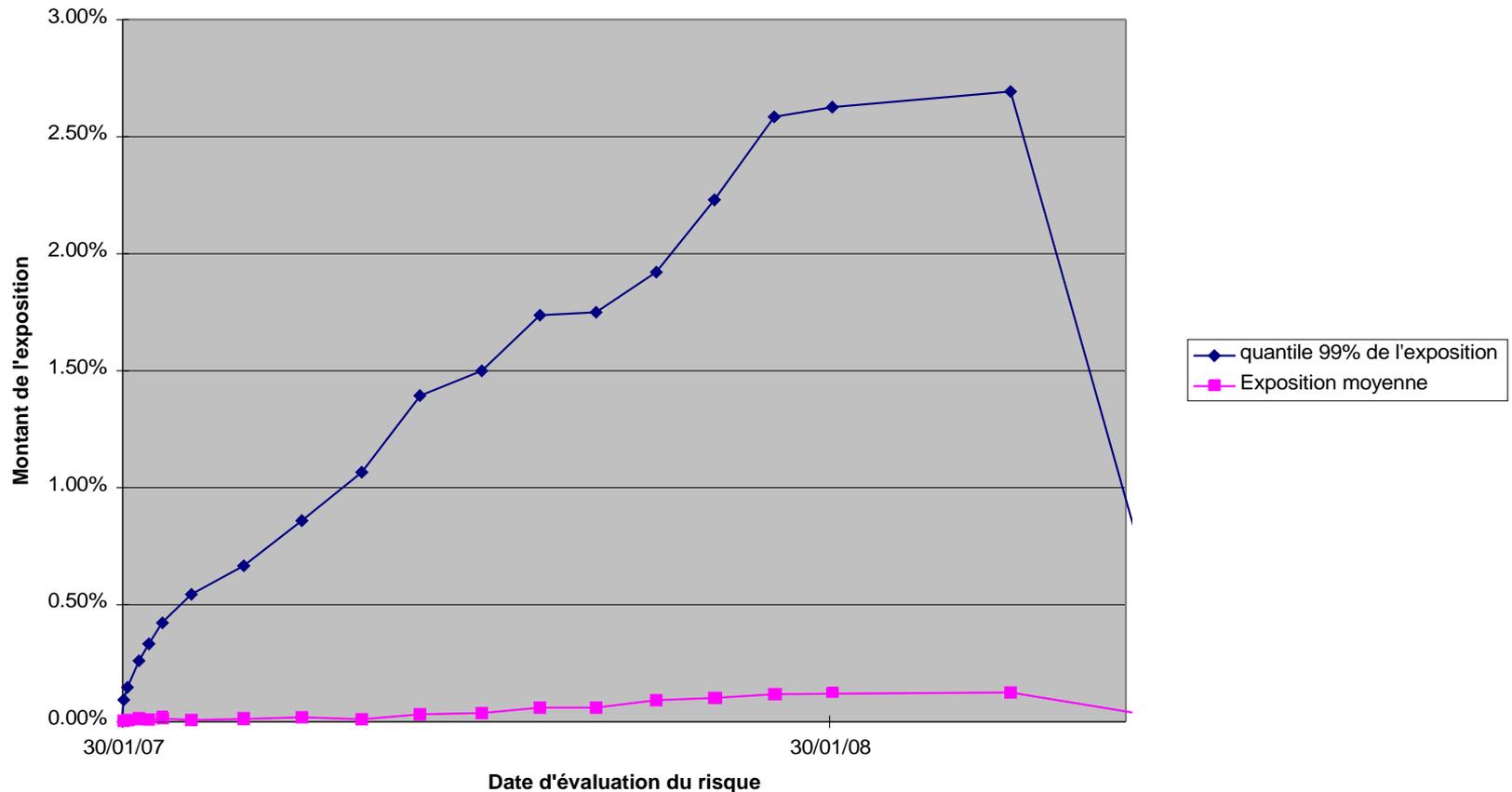


Zero coupon fixe



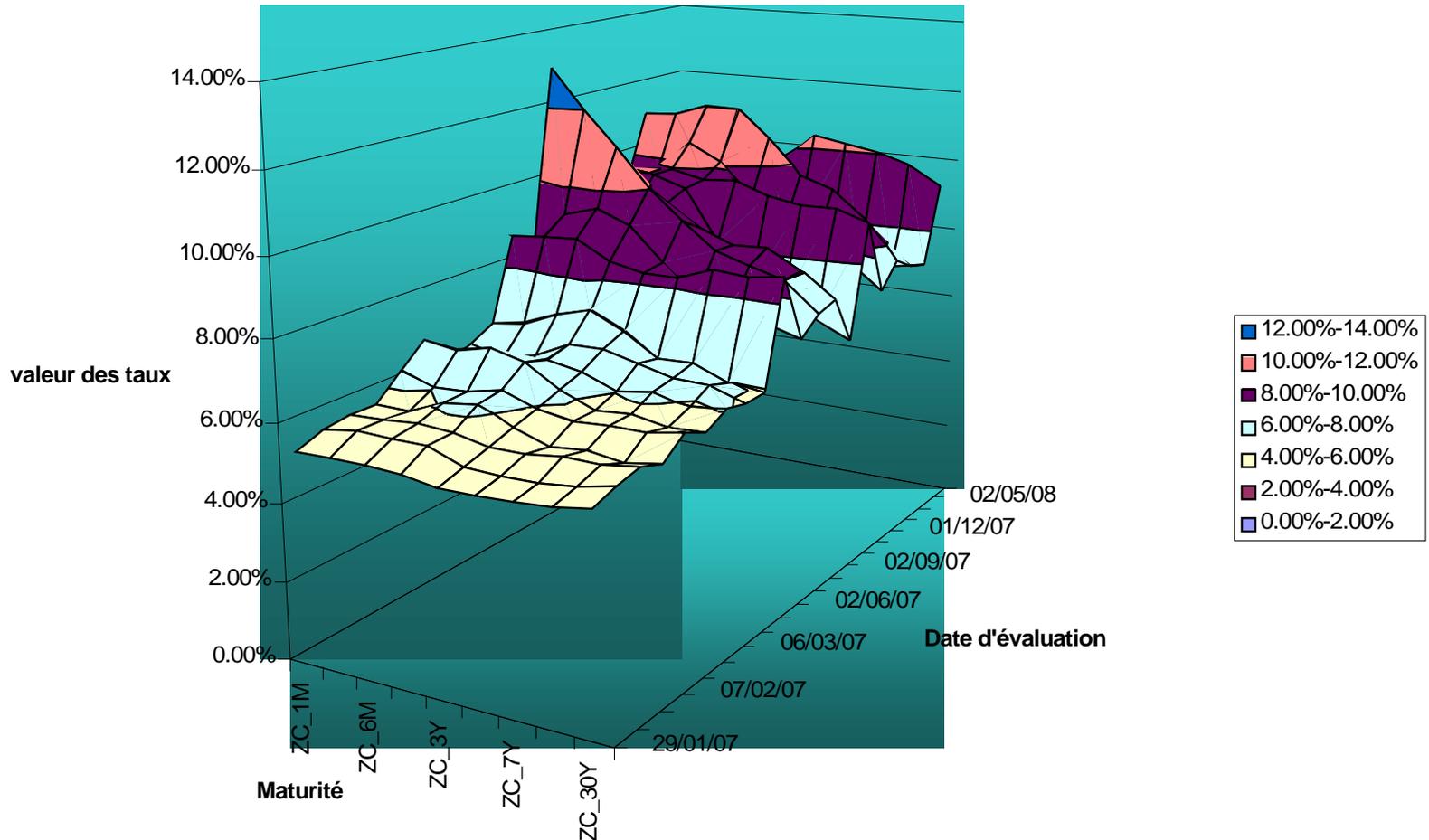
Swap Zero coupon forward

Profile de la CVAR d'un swap ZC USD/LIB 6M départ forward



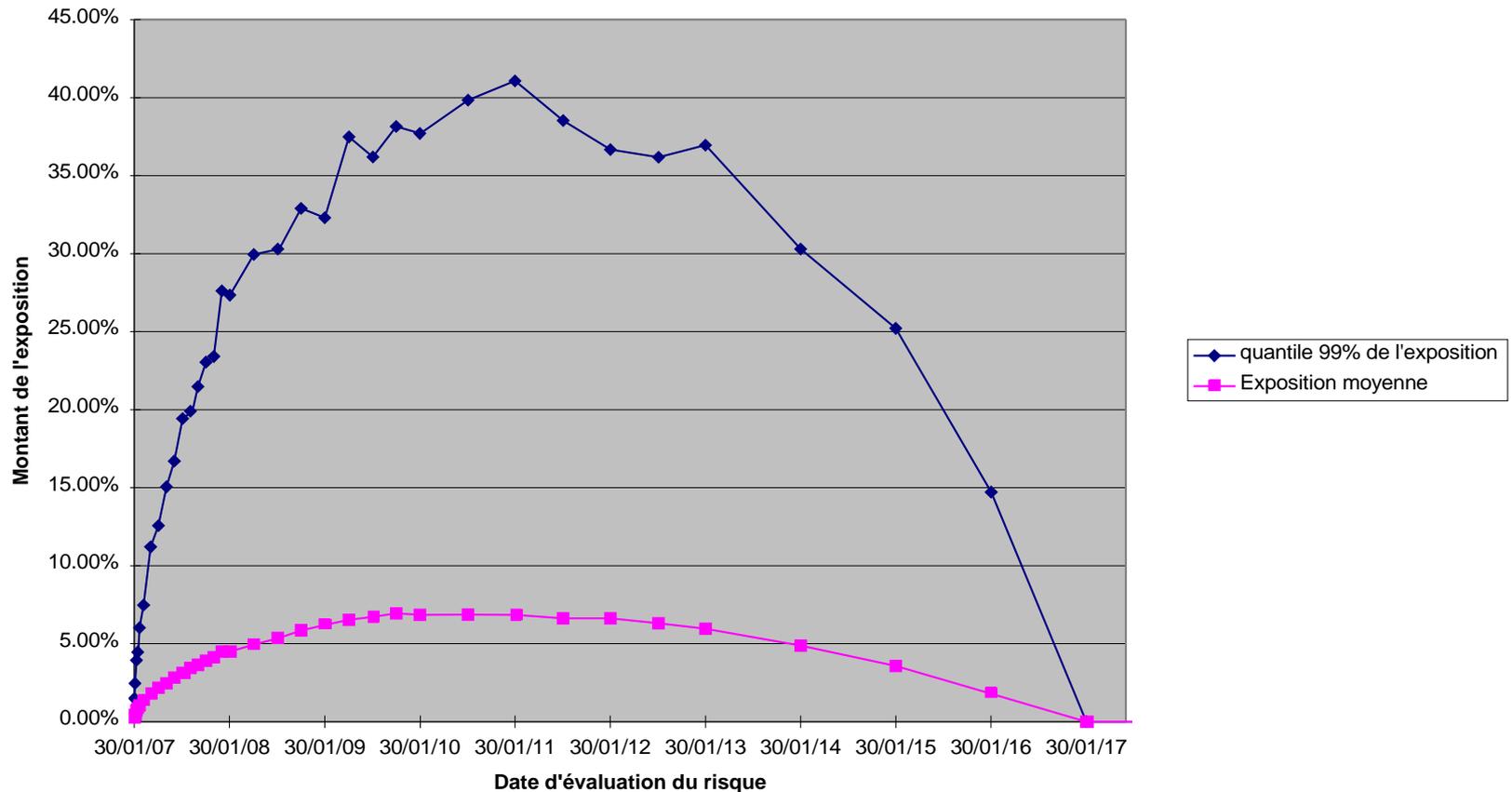
Swap Zero coupon forward

Scénarios de taux produisant l'exposition quantile



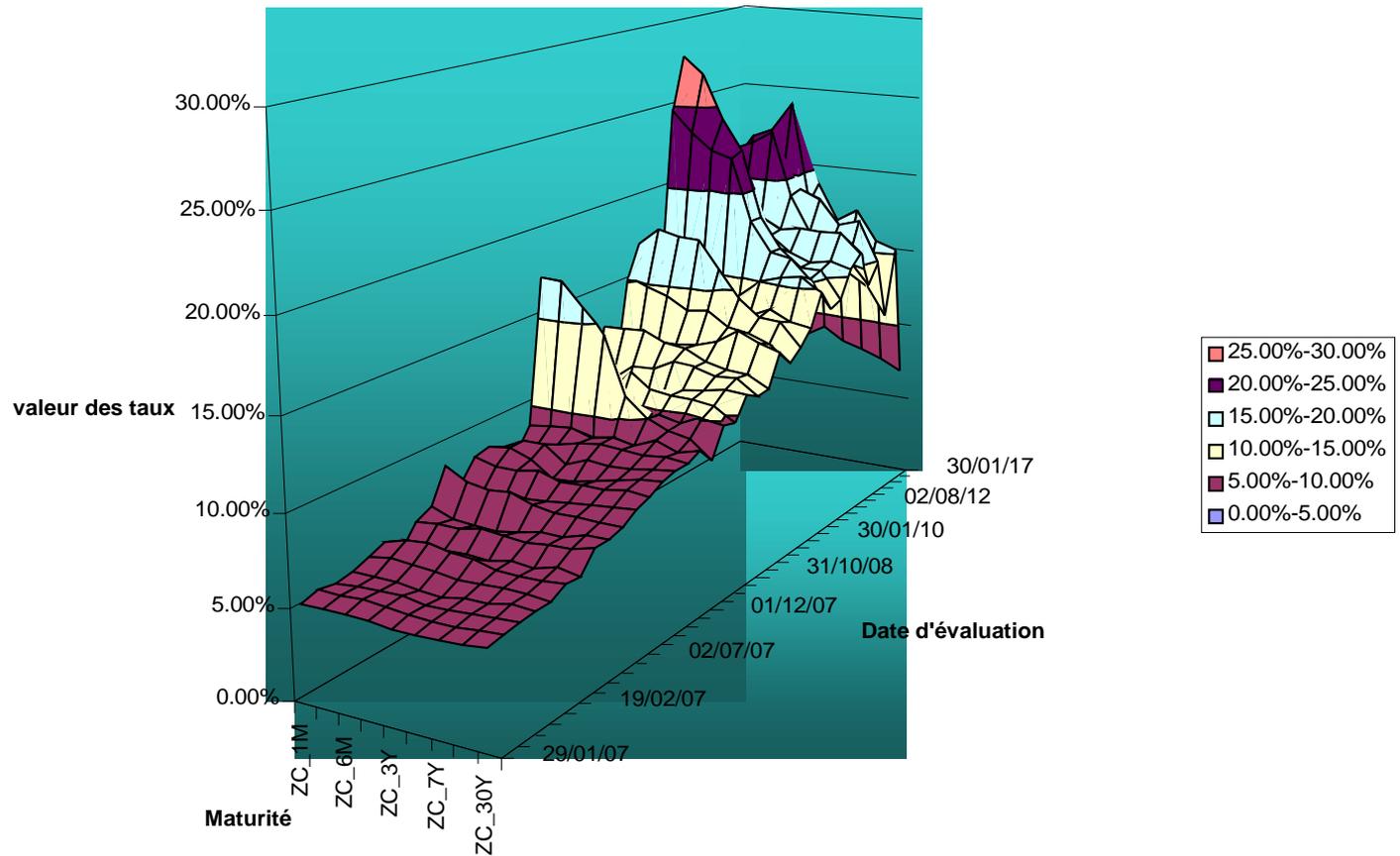
Swap USD LIBOR 6M 10Y

Profil de la CVAR d'un swap USD/LIB 6M maturité 10Y



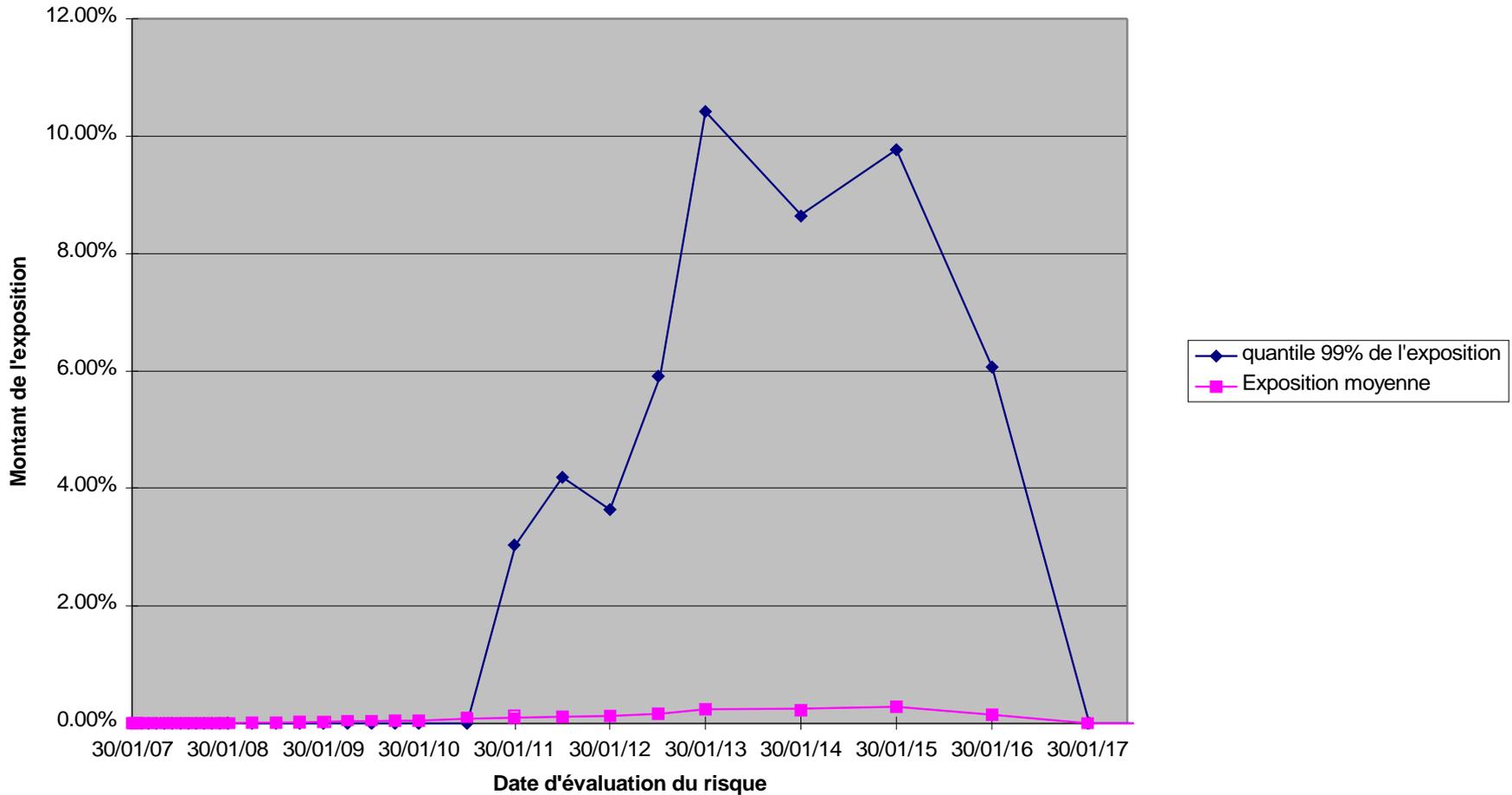
Swap USD LIBOR 6M 10Y

Scénarios de taux produisant l'exposition quantile



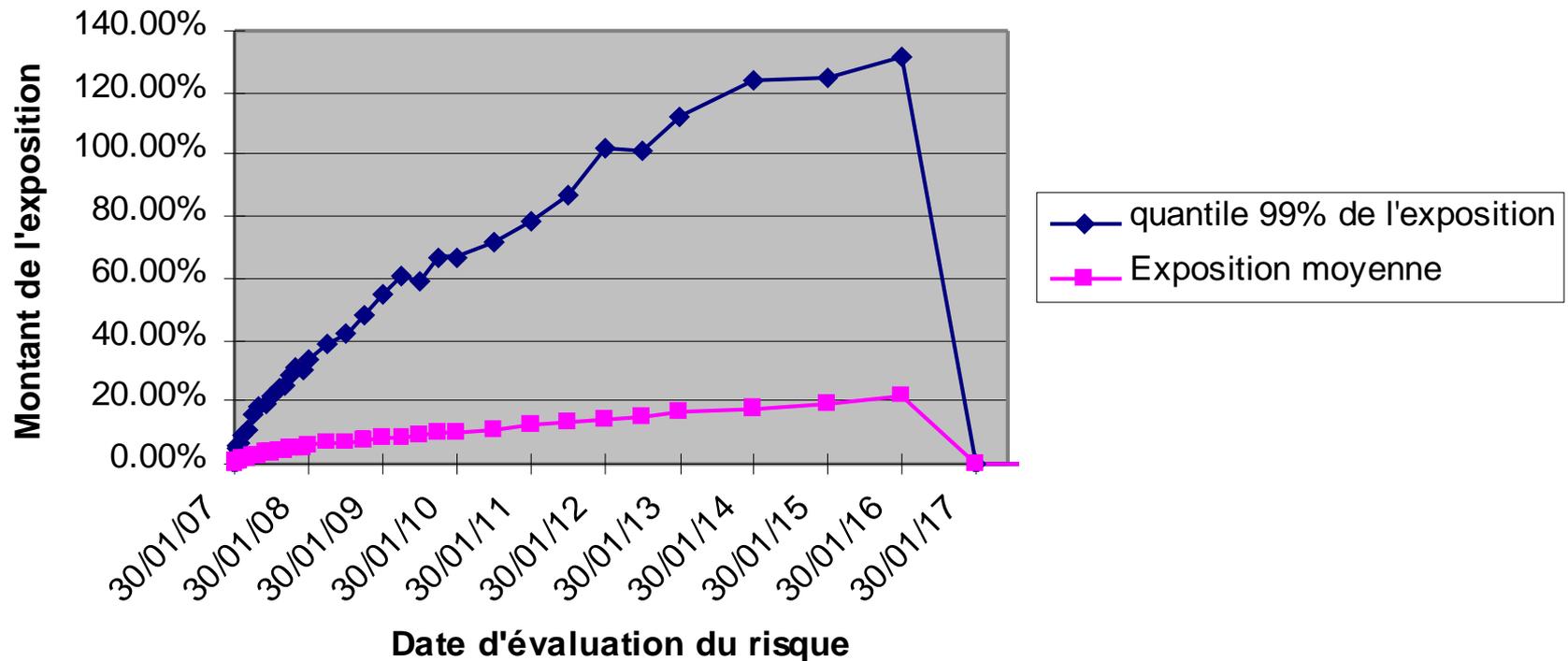
Swap USD LIBOR 6M 10Y OTM

Profil de la CVAR d'un swap USD/LIB 6M maturité 10Y



Cross Currency Swap

Profil de la CVAR d'un Cross Currency Swap USD/EUR 3M maturité 10Y





Cadre juridique et réduction du risque

- Appels de marge : un accord contractuel en vertu duquel une première contrepartie fournit une sûreté à une deuxième contrepartie lorsqu'une exposition de la deuxième contrepartie envers la première dépasse un certain montant (seuil de marge) et avec une constatation périodique (période de marge en risque).
- Transactions OTC traitées sous appels de marge :

31/12/02	30%
31/12/04	55%



Cadre juridique et réduction du risque

- **Contrat de collateralisation : système d'appels de marge (Credit Support Annex, CSA-ISDA)**
 - ▶ Le montant de la garantie évolue avec la valeur de liquidation du portefeuille
 - ▶ Un calcul périodique de cette valeur permet d'ajuster les dépôts en collatéral via les appels de marge.
 - Fréquence d'appels de marge (Remargin period)
 - Franchise (threshold)
 - Montant minimum de transfert (Minimum transfer amount)
 - Délai de liquidation (grace period)



Cadre juridique et réduction du risque

- **Contrat cadre ISDA : mécanisme de résiliation et de compensation (close-out netting)**
 - ▶ Droit de résilier(close-out) l'ensemble des opérations régies par le contrat cadre en cas de défaut de la contrepartie.
 - ▶ Droit de compenser les dettes et créances réciproques et d'établir un solde net de résiliation à recevoir ou à payer (netting).
 - ▶ Permet de réduire les exigences en fonds propres.
 - ▶ Permet une réduction de notre exposition au risque et permet une consommation moindre des lignes de crédit.

- **Clauses de résiliation anticipée**
 - ▶ Clauses de défaut (résiliation de toutes les opérations)
 - ▶ Clauses de circonstances nouvelles (résiliation des opérations affectées)
 - ▶ Clauses conditionnelles (ownership, downgrading, break clause ...)



Suivi du risque de remplacement

- Obtention d'une autorisation est obligatoire avant la conclusion d'une opération de marché avec une contrepartie externe
- Les limites représentent une limite maximale de risques de contrepartie autorisée sur groupe
- Elles sont proposées au département des risques par le secteur de suivi du client



Suivi du risque de remplacement

- Son objectif est de contrôler le respect des règles en vigueur par les opérateurs Front Office.
- En règle générale, l'exposition globale ne doit pas dépasser la limite globale.
- Si Exposition globale > Limite globale, il y a dépassement.
- Le dépassement peut être « ACTIF » ou « PASSIF »
 - Dépassement « PASSIF »: il est dû à l'évolution des conditions de marché sans nouvelle opération.
 - Dépassement « ACTIF » : résulte de la conclusion d'une nouvelle opération.



Plan

I. Introduction

II. Le pilotage opérationnel des activités de la banque

1. Le capital économique v.s réglementaire
2. Bâle I/II

III. Le risque de remplacement et mesure de l'exposition

1. Principes généraux
2. Exemples de calculs d'exposition
3. Cadre juridique et réduction des risques

IV. Analyse de la mesure fractile

V. Calibration d'un modèle de taux

VI. Les sujets de recherche



La mesure de risque fractile

- Le risque fractile d'un portefeuille pour le niveau de confiance α est défini par la formule suivante :

$$CVaR_{\alpha}(\theta) = \inf \left\{ V \mid P(MtF(\theta) < V | \mathcal{F}_t) = \alpha \right\}$$

- On note N le nombre de scénarios de simulation, et $MtF(\theta)$ la valeur calculée du mark-to-future pour le i -ème scénario à la date θ .



La mesure de risque fractile

- Fractile empirique :

$$f_{\alpha} \left[\left(MtF_i(t) \right)_{i \in \{1, 2, \dots, N\}} \right] = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{MtF}_{\alpha N}(t) \quad \alpha N \in IN \\ \overrightarrow{MtF}_{(\lfloor \alpha N \rfloor + 1)}(t) \quad \alpha N \notin IN \end{array} \right\}$$



La mesure de risque fractile

- L-estimateur du fractile proposé par Harrel et Davis

$$HD_{\alpha} \left[\left(MtF_i(t) \right)_{i \in \{1, 2, \dots, N\}} \right] = \sum_{i=1}^N a_i^N \cdot \underline{MtF}_i(t)$$

$$a_i^N = I_{i/N}(\alpha N + 1, (1 - \alpha)N) - I_{(i-1)/N}(\alpha N + 1, (1 - \alpha)N)$$

$$\beta(p, q) = \int_0^1 x^{(p-1)} (1-x)^{(q-1)} dx \quad \text{et} \quad I_u(p, q) = \frac{1}{\beta(p, q)} \int_0^u x^{(p-1)} (1-x)^{(q-1)} dx$$



La mesure de risque fractile

■ Intervalle de confiance :

- ▶ Soit $(\underline{X}_i)_{i \in \{1, 2, \dots, N\}}$ la suite classée en ordre croissant de l'échantillon résultant de N tirages indépendants identiquement distribués de la variable aléatoire X . On note q_α le fractile d'ordre α de la distribution de X .
- ▶ Pour tout entier r, s tels que $1 \leq r < s \leq N$ et $\underline{X}_r < \underline{X}_s$,

$$\begin{aligned} P(\underline{X}_r < q_\alpha \leq \underline{X}_s) &= P(\underline{X}_r < q_\alpha) - P(\underline{X}_s < q_\alpha) \\ &= \left(\sum_{i=r}^N C_N^i \cdot \alpha^i (1-\alpha)^{(N-i)} \right) - \left(\sum_{i=s}^N C_N^i \cdot \alpha^i (1-\alpha)^{(N-i)} \right) = \sum_{i=r}^{s-1} C_N^i \cdot \alpha^i (1-\alpha)^{(N-i)} \\ &= I_\alpha(r, N-r+1) - I_\alpha(s, N-s+1) \end{aligned}$$



La mesure de risque fractile

- Conséquence : Pour trouver un intervalle de confiance d'ordre ξ sur le fractile q_α , il suffit de trouver r et s tels que

$$I_\alpha(r, N - r + 1) - I_\alpha(s, N - s + 1) \geq \xi$$

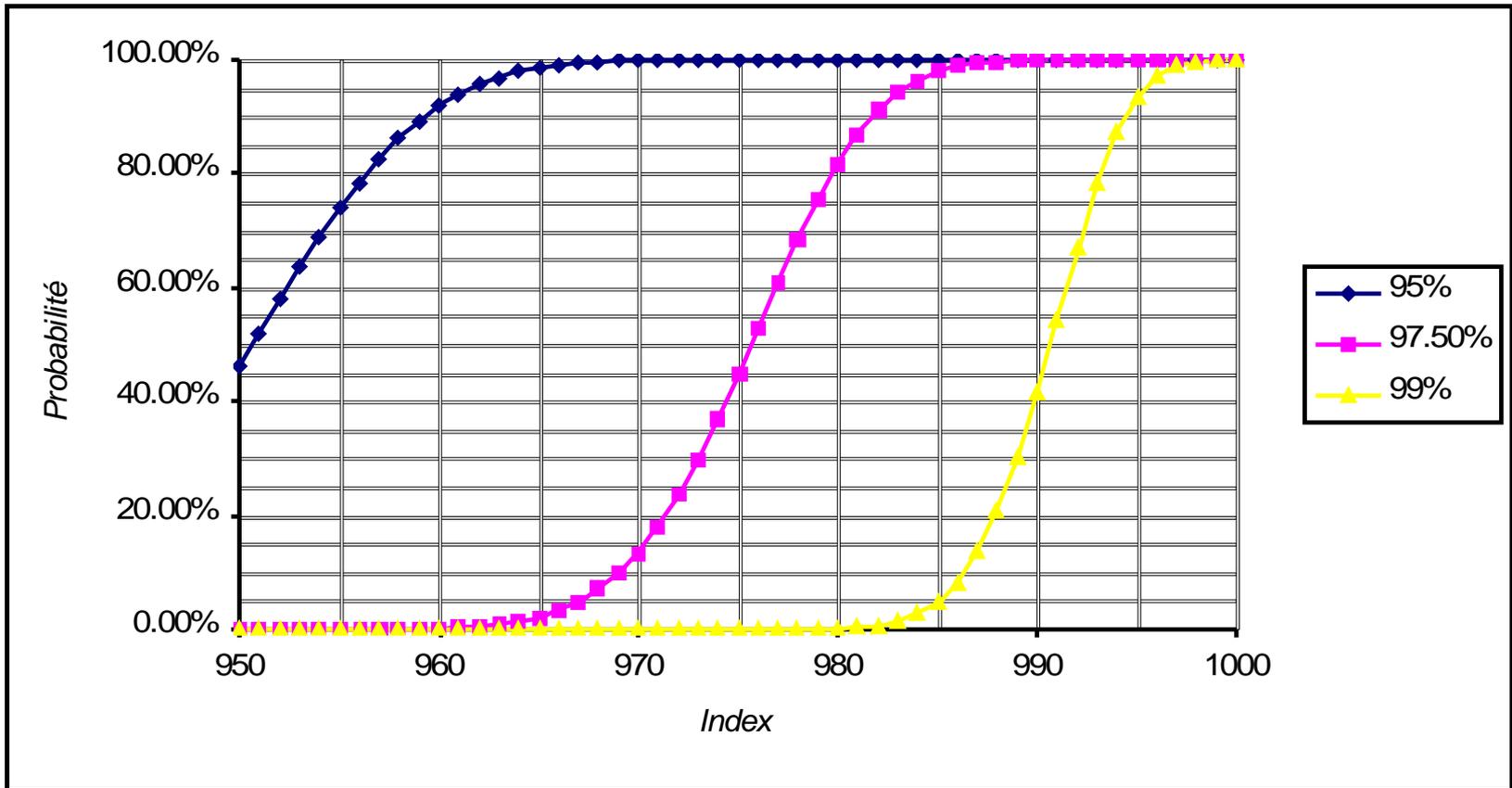
- L'intervalle de confiance est alors donné par

$$\left[\underline{X}_r, \underline{X}_s \right]$$

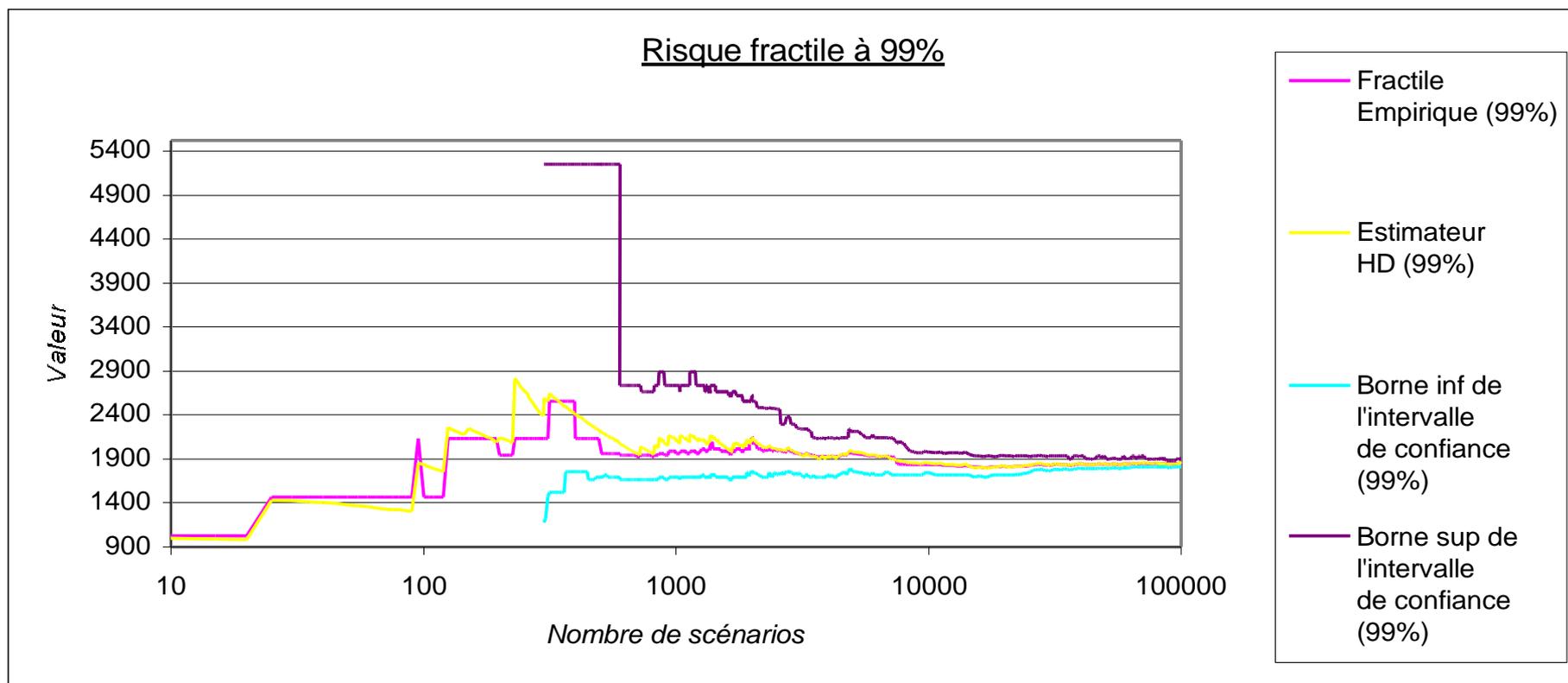
La mesure de risque fractile : Intervalle de confiance

		500	1000	3000	10000	30000	100000	300000	1000000
Niveau de fractile	Nombre de scénarios	500	1000	3000	10000	30000	100000	300000	1000000
	Fractile empirique (indice)	495	990	2970	9900	29700	99000	297000	990000
	Bornes de l'intervalle de confiance à 95% sur le fractile (indice)	491	984	2959	9881	29666	98938	296893	989805
		500	997	2981	9920	29734	99062	297107	990196
	Bornes de l'intervalle de confiance à 95% sur le fractile (indice/nombre de	98.20%	98.40%	98.63%	98.81%	98.89%	98.94%	98.96%	98.98%
	"Majorant à 95%" du fractile (indice)	100.00%	99.70%	99.37%	99.20%	99.11%	99.06%	99.04%	99.02%
	"Majorant à 95%" du fractile (indice/nombre de scénarios)	499	996	2980	9917	29729	99052	297090	990164
	99.80%	99.60%	99.33%	99.17%	99.10%	99.05%	99.03%	99.02%	

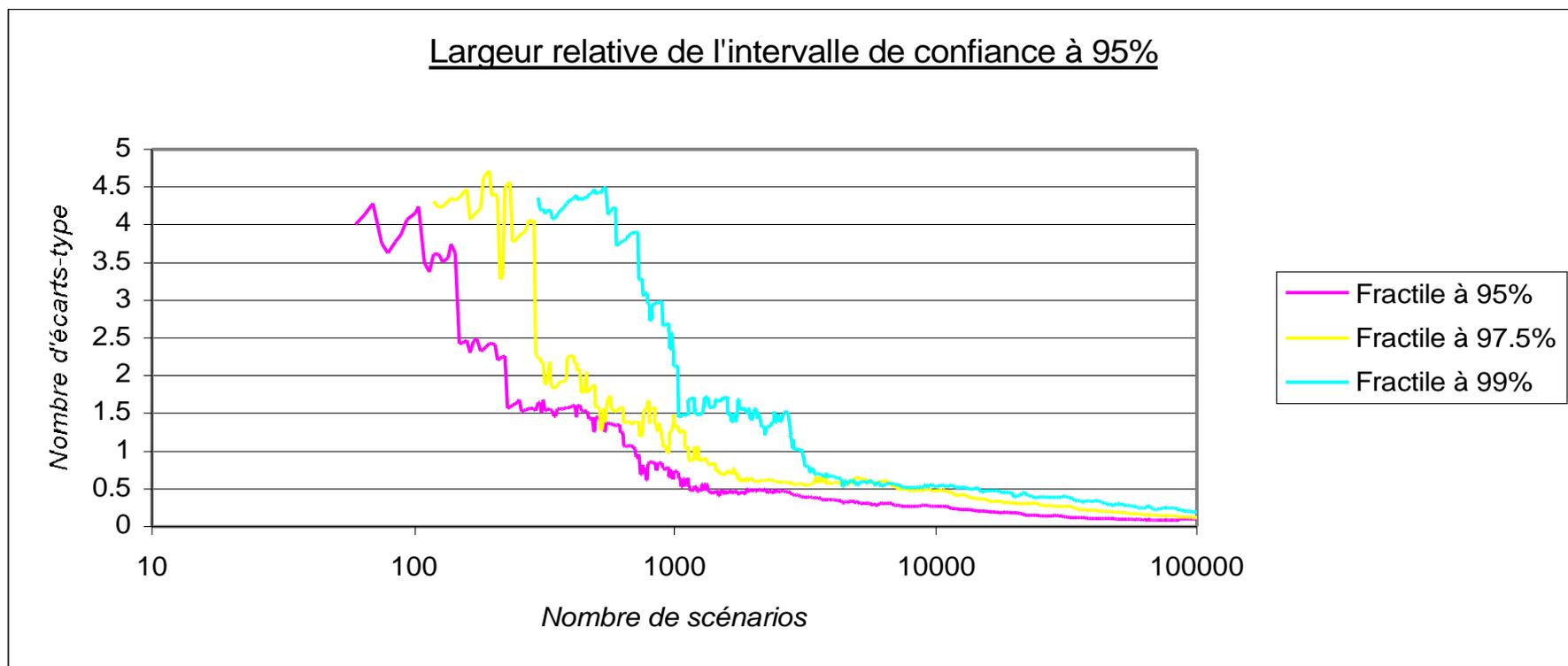
Intervalle de confiance



Variabilité de l'estimation : impact du nombre de scénarios sur la précision



Variabilité de l'estimation : impact du nombre de scénarios sur la précision





Plan

I. Introduction

II. Le pilotage opérationnel des activités de la banque

1. Le capital économique v.s réglementaire
2. Bâle I/II

III. Le risque de remplacement et mesure de l'exposition

1. Principes généraux
2. Exemples de calculs d'exposition
3. Cadre juridique et réduction des risques

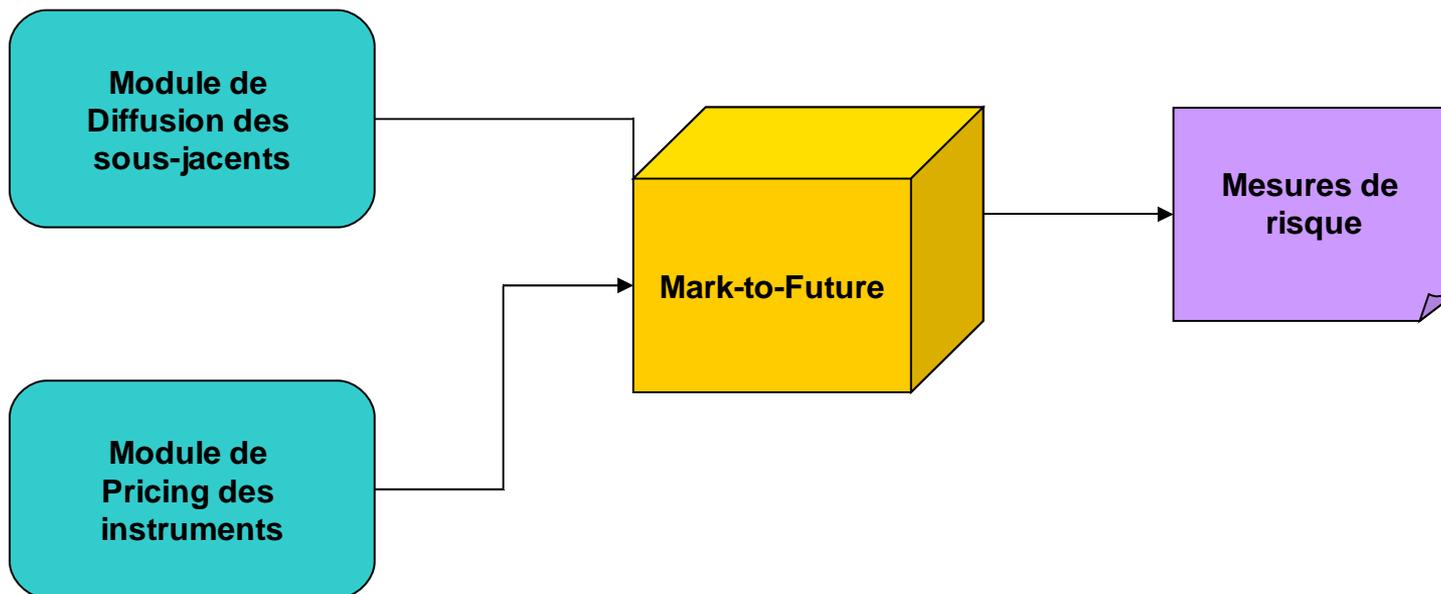
IV. Analyse de la mesure fractile

V. Calibration d'un modèle de taux

VI. Les sujets de recherche



Schéma générique de production des indicateurs de risques

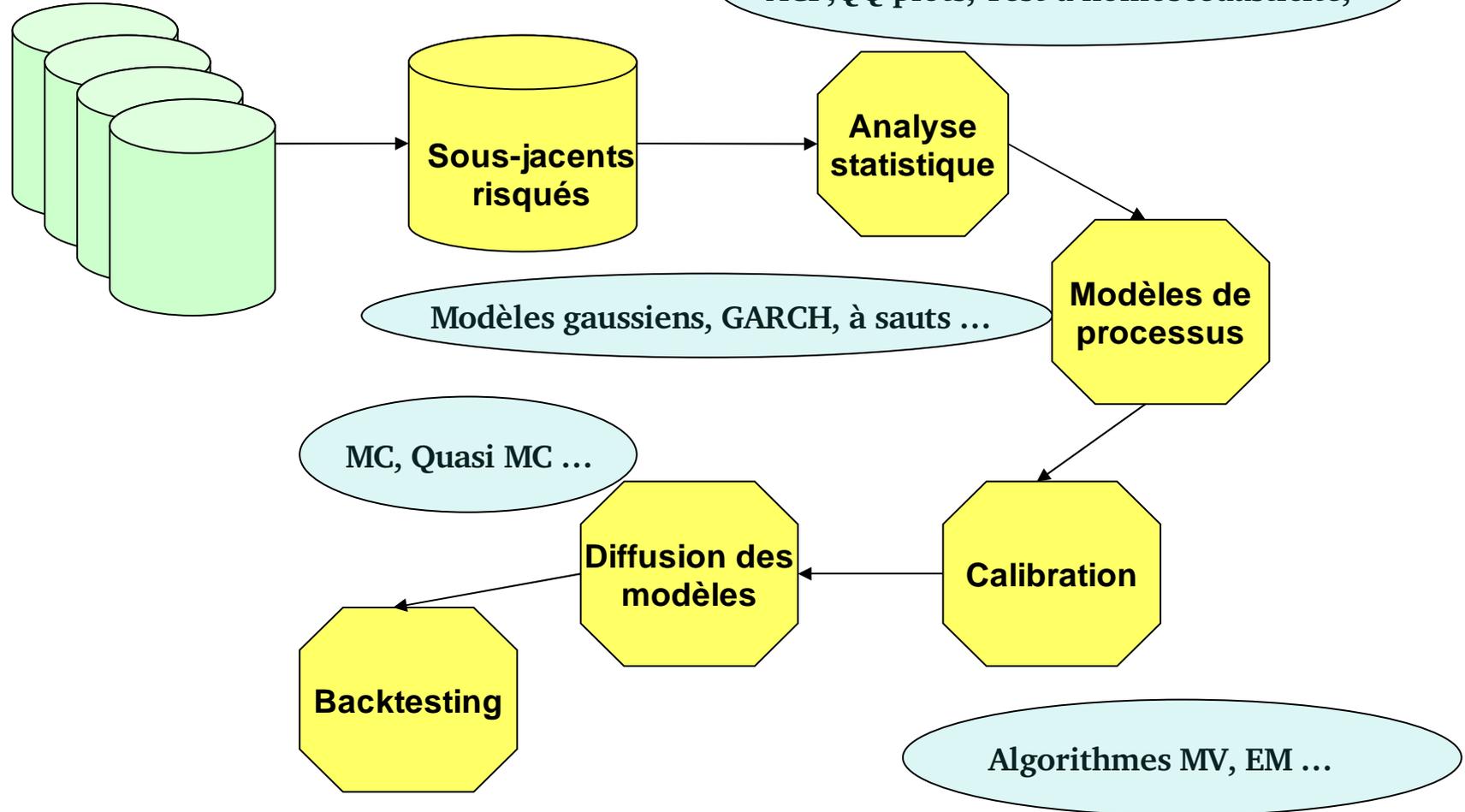


Calibration : plateforme de prototypage

Matrix, Markit, Bloomberg ...

SI

ACP, QQ plots, Test d'homoscédasticité,



Un modèle de Taux d'intérêt

■ Objectif :

- ▶ parvenir à étudier la structure par terme des taux d'intérêt en observant les corrélations sur des données historiques de taux swap et dépôt .
- ▶ En déduire une loi jointe.
- ▶ Générer des scénarios de structure par terme des taux dans le futur.

■ Choix des variables : logarithme des taux swap

■ Analyse factorielle :

- ▶ facteurs obtenus en effectuant une ACP sur la matrice donnant l'évolution journalière du logarithme des taux.
- ▶ En général, 3 facteurs suffisent à expliquer la variance globale



Un modèle de Taux d'intérêt

■ soit $R_i(t)$ le taux swap de maturité T_i à la date t

■ On pose $y_i(t) = \log(R_i(t))$

■ On considère alors le vecteur

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_9(t) \end{bmatrix}$$

■ Soit $Y_i^\infty = \frac{1}{m} \sum_{j=1..m} y_i(t_j)$

$$M_{i,j} = \text{COV}(Y)_{i,j} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (y_i(t_k) - y_i^\infty)(y_j(t_k) - y_j^\infty)$$



Décomposition en Facteurs

- On décompose le vecteur des log Return dans la base ortho normale des facteurs:

$$Y(t_j) = Y^\infty + \sum_{k=1..9} x_k(t_j) F_k$$

Les F_k étant les axes principaux de l'Analyse en Composantes Principales (vecteurs propres de M)

- On a : $x_k(t_j) = (Y(t_j) - Y^\infty)^t F_k$
- On effectue cette projection uniquement sur les trois premiers axes principaux.



Décomposition en Facteurs

- L'Exemple du taux Deposit / swap EURO

- Historique du taux

EUR	1month	3months	6months	1year	3years	5years	7years	10years	30years
30/12/98	0.0325	0.0324125	0.032175	0.032025	0.03415	0.034	0.0365	0.0408	0.04705
31/12/98	0.0325	0.0323875	0.0322109	0.0320625	0.03222	0.0333	0.03573	0.03967	0.04715
01/01/99	0.0323875	0.0322125	0.0320859	0.0319094	0.03222	0.03302	0.03572	0.03975	0.04705
04/01/99	0.0323	0.0321234	0.031975	0.0317844	0.03159	0.03297	0.03571	0.03979	0.04695
05/01/99	0.03225	0.0320734	0.0318594	0.0316875	0.03159	0.03297	0.03571	0.03979	0.04675



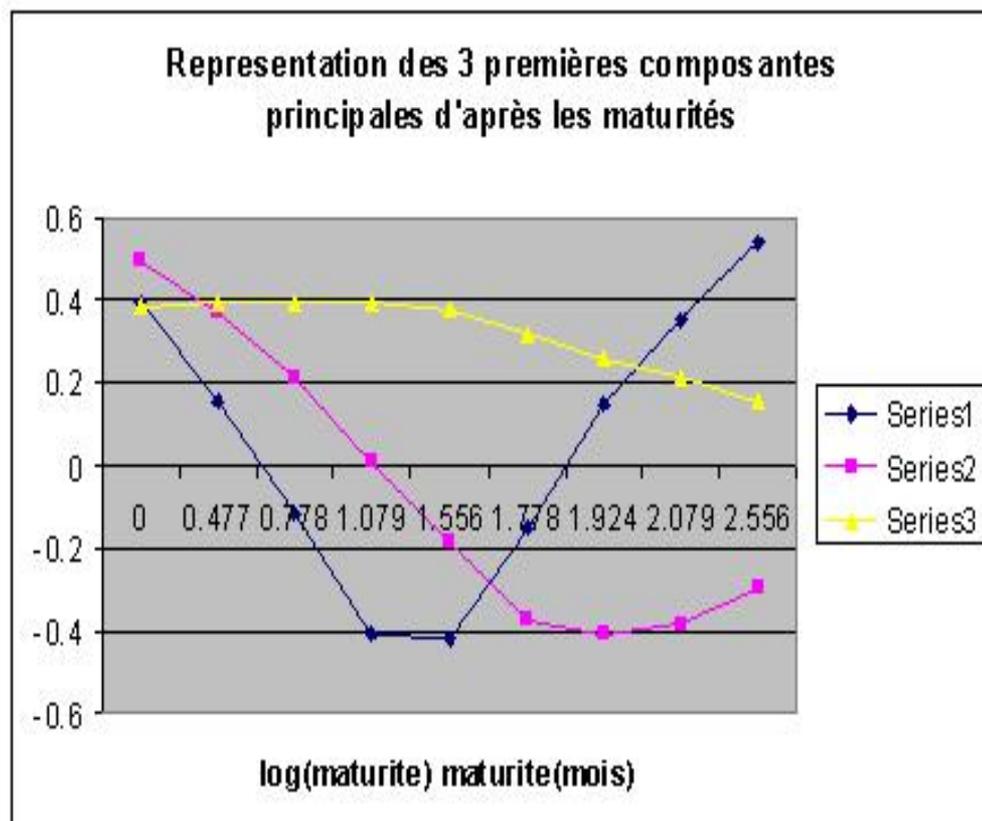
■ Matrice de variance covariance du logarithme du taux

	1month	3months	6months	1year	3years	5years	7years	10years	30years
1month	0.089	0.0885	0.0869	0.0835	0.0774	0.0629	0.0508	0.0412	0.0296
3months	0.0885	0.0892	0.0883	0.0856	0.08	0.0656	0.0531	0.0431	0.0309
6months	0.0869	0.0883	0.0886	0.0869	0.0819	0.0678	0.0551	0.0448	0.032
1year	0.0835	0.0856	0.0869	0.0868	0.0826	0.0693	0.0566	0.0461	0.0327
3years	0.0774	0.08	0.0819	0.0826	0.0801	0.0682	0.0561	0.0458	0.0325
5years	0.0629	0.0656	0.0678	0.0693	0.0682	0.0596	0.0498	0.041	0.0293
7years	0.0508	0.0531	0.0551	0.0566	0.0561	0.0498	0.0421	0.035	0.0254
10years	0.0412	0.0431	0.0448	0.0461	0.0458	0.041	0.035	0.0295	0.0217
30years	0.0296	0.0309	0.032	0.0327	0.0325	0.0293	0.0254	0.0217	0.0165



■ Les trois premiers axes principaux

Facteur3	Facteur2	Facteur1
0.3967	0.4944	0.3858
0.1527	0.3694	0.3939
-0.1137	0.211	0.3978
-0.4095	0.0079	0.395
-0.4185	-0.1866	0.3773
-0.148	-0.3726	0.3183
0.1508	-0.4075	0.2617
0.3567	-0.3829	0.2142
0.5401	-0.2971	0.1536



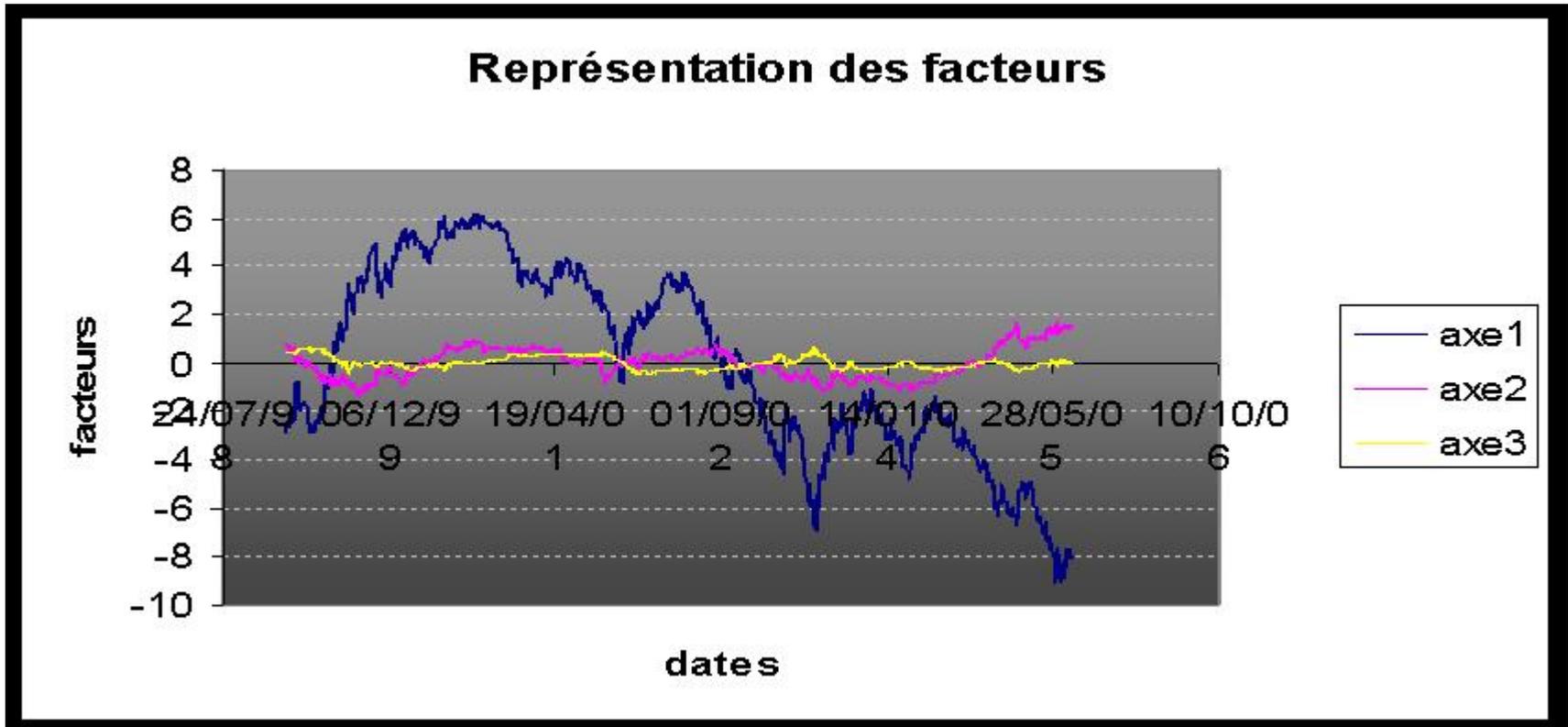


Interprétation des axes principaux

- Le premier axe principal correspond à un mouvement en niveau de la courbe des taux. Le poids des maturités courtes est plus fortes dans le facteur parce que les maturités courtes ont des volatilités plus importantes.
- Le deuxième axe décrit les mouvements de pente de la courbe des taux. Cet axe oppose les taux de maturité inférieur à 1 an aux taux de maturité supérieurs à 1 an.
- Le troisième axe correspond à un mouvement de courbure de la courbe des taux (battements). Cet axe oppose les taux de maturités intermédiaires aux taux de maturités très court et très long.

Dynamique des facteurs

- On s'interroge à ce stade sur la dynamique de $x_k(t), k = 1, 2, 3$
- Le graphe ci-après nous donne l'évolution des $x_k(t)$ dans le temps.





Modélisation de la dynamique des facteurs

- Modèle d'évolution : processus de retour à la moyenne.
- Le modèle sera valide s'il réussit à reproduire l'allure des facteurs dans un intervalle de confiance qu'on l'on spécifiera.
- Le modèle adopté est le suivant:

$$dx_i(t) = a_i(b_i - x_i(t))dt + \sigma_i dW_i(t)$$



Régression sur les facteurs

- SAS nous fournit aussi les facteurs c'est-à-dire les processus ramenés dans la base des composantes principales.
- D'après le modèle:

$$dx_i(t) = a_i(b_i - x_i(t))dt + \sigma_i dW_i(t)$$

- Ce qui nous donne comme solution exacte:

$$x(t + \Delta t) = x(t)e^{-a\Delta t} + b(1 - e^{-a\Delta t}) + \sqrt{\frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a\Delta t})}\varepsilon$$



Régression sur les facteurs

- En régressant donc $X(t + \Delta t)$ sur $X(t)$ on peut donc récupérer par estimation par les moindres carrés ordinaires les paramètres du modèle.
- La régression s'écrit alors:

$$X(t + \Delta t) = A + BX(t) + \omega\eta(t)$$

- On a alors

$$a = -\frac{1}{\Delta t} \ln(B) \quad b = \frac{A}{1-B} \quad \sigma = \sqrt{\frac{2a\omega^2}{1-B^2}}$$



Calculs des paramètres

		Calibration des paramètres						
		Regression SAS et Paramètres du modèle						
pas	0.0039683							
	A	Vresidu	B	a	b	sigmaAn	sigma	
axe1	-0.00302	0.04699	0.99954	0.1159467	-6.5652174	3.4419368	21.68%	
axe2	0.0005072	0.0045	0.99611	0.9821916	0.1303959	1.0669703	6.72%	
axe3	-0.000304	0.00101	0.99064	2.3698282	-0.0324786	0.5068738	3.19%	



Vérification des hypothèses des MCO.

- On vérifie cependant si les hypothèses de la régression par les MCO sont vérifiées en l'occurrence l'Homoscédasticité des résidus, i.e en outre l'indépendance entre les résidus et les variables explicatives et l'indépendance des résidus.
- Le test d'indépendance entre les variables explicatives et les résidus est accepté. On est donc bien dans le cadre de l'application des MCO. Toutefois on constate que les résidus ne sont ni indépendants, ni gaussiens. Il suffit juste d'observer les Kurtosis des résidus pour s'en apercevoir ou observer les résultats des tests d'adéquation de Kolmogorov Smirnov.
- La kurtosis au sens où l'entend SAS vaut:

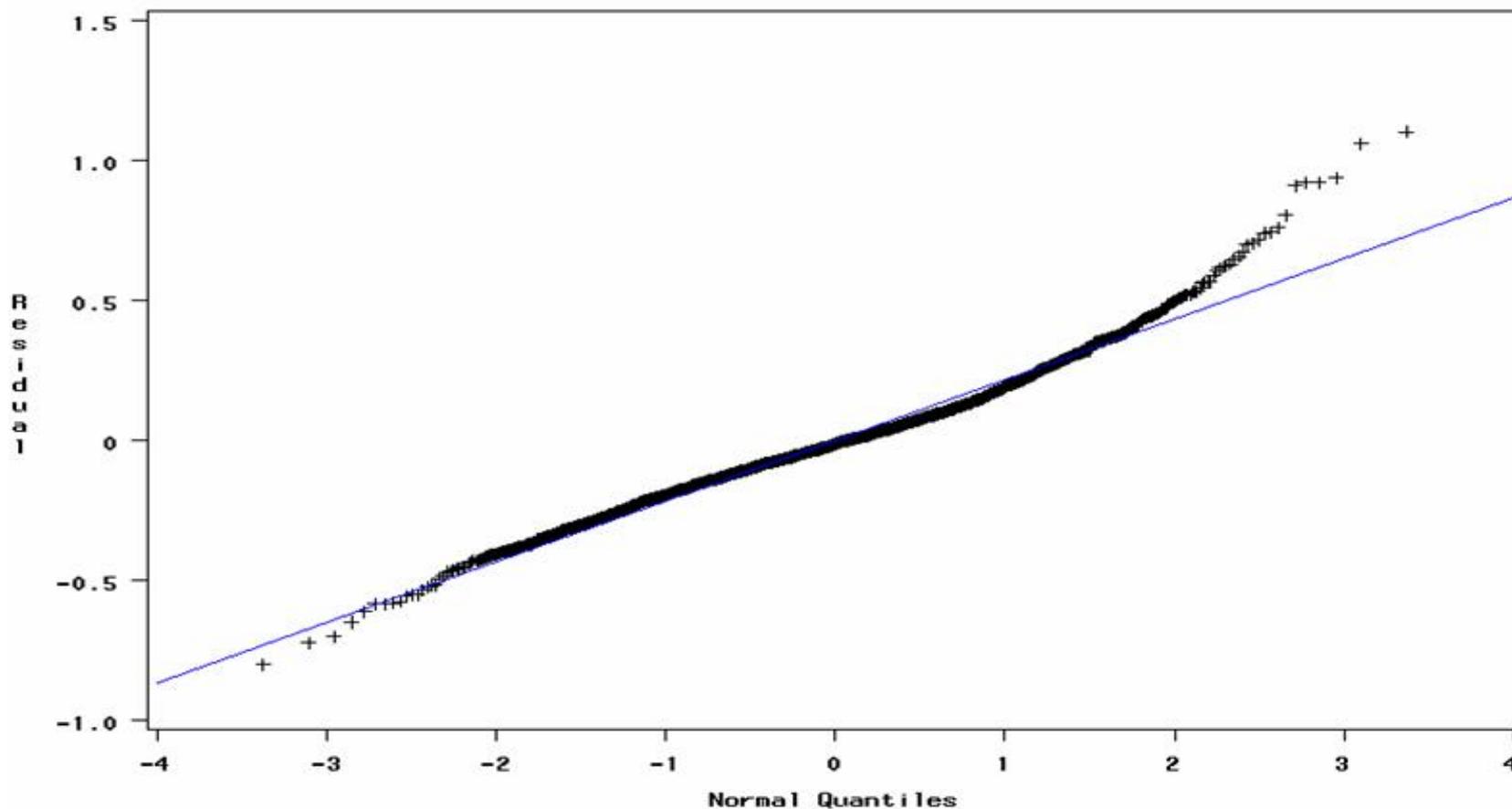
$$K = \frac{E(X^4)}{E(X^2)^2} - 3$$

Statistiques sur les résidus de la régression

Moments des résidus				
Axe1				
N	moyenne	Ecart-type	skewness	Kurtosis
1686	0	0.216706	0.562897	1.92253328
Axe2				
N	moyenne	Ecart-type	skewness	Kurtosis
1686	0	0.067066	0.14516	3.00804337
Axe3				
N	moyenne	Ecart-type	skewness	Kurtosis
1686	0	0.031789	-0.05715	3.90608971

Normalité des résidus

Représentation des facteurs





Construction des intervalles de confiance sur le taux

- L'on connaît parfaitement la loi du facteur on peut donc à chaque date t calculer le fractile à 99% qui lui est associée.
- En résumé:

$$y_i(t) = y_i^\infty + x_1(t)F_{1,i} + x_2(t)F_{2,i} + x_3(t)F_{3,i}$$

$$dx_i(t) = a_i(b_i - x_i(t))dt + \sigma_i dW_i(t)$$

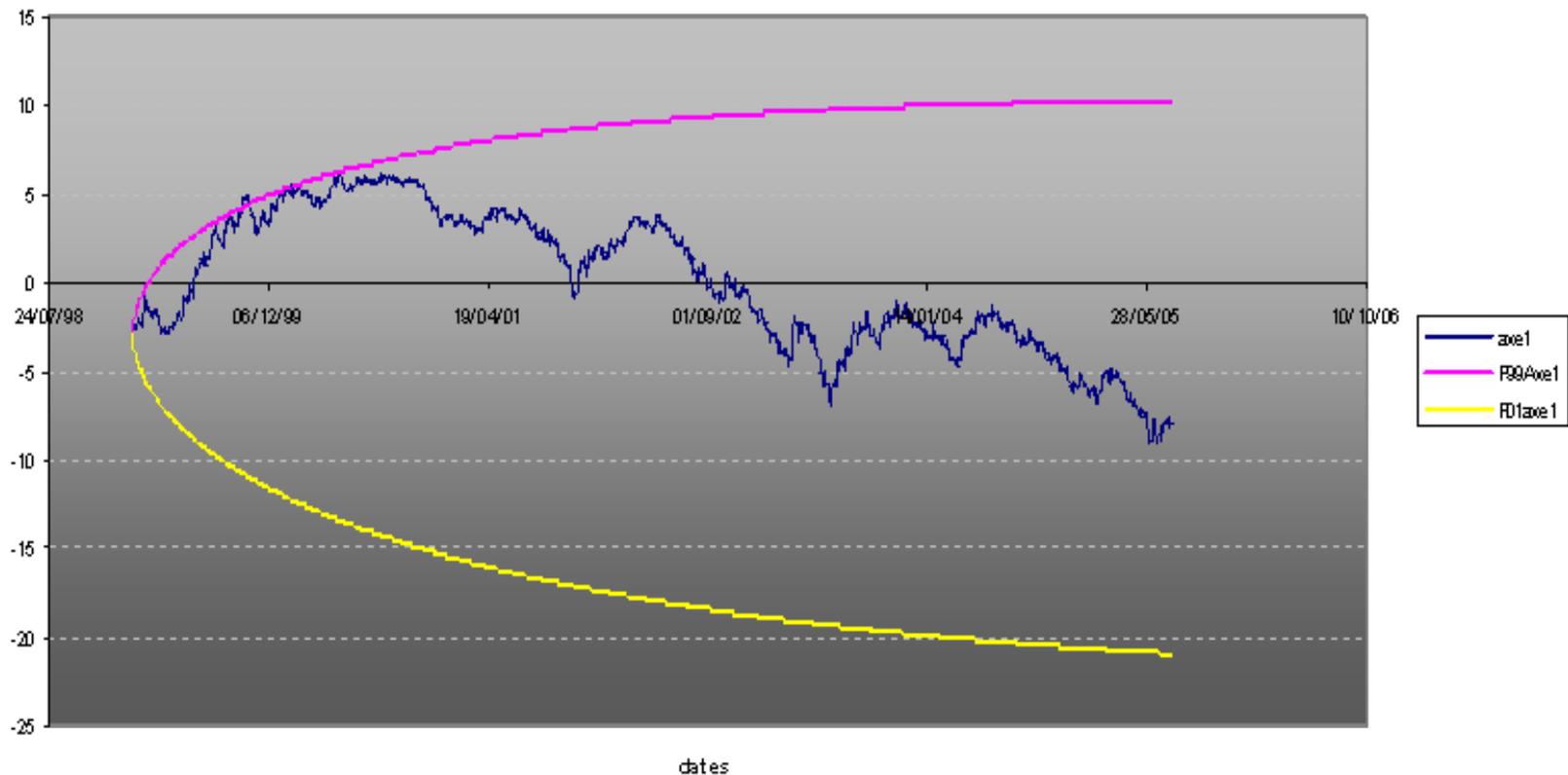
- $y_i(t)$ suit une loi normale de variance

$$(\sigma_1(t)F_{1,i})^2 + (\sigma_2(t)F_{2,i})^2 + (\sigma_3(t)F_{3,i})^2$$

$$\sigma_i^2(t) = \frac{\sigma_i^2}{2a_i} (1 - e^{-2a_i t})$$

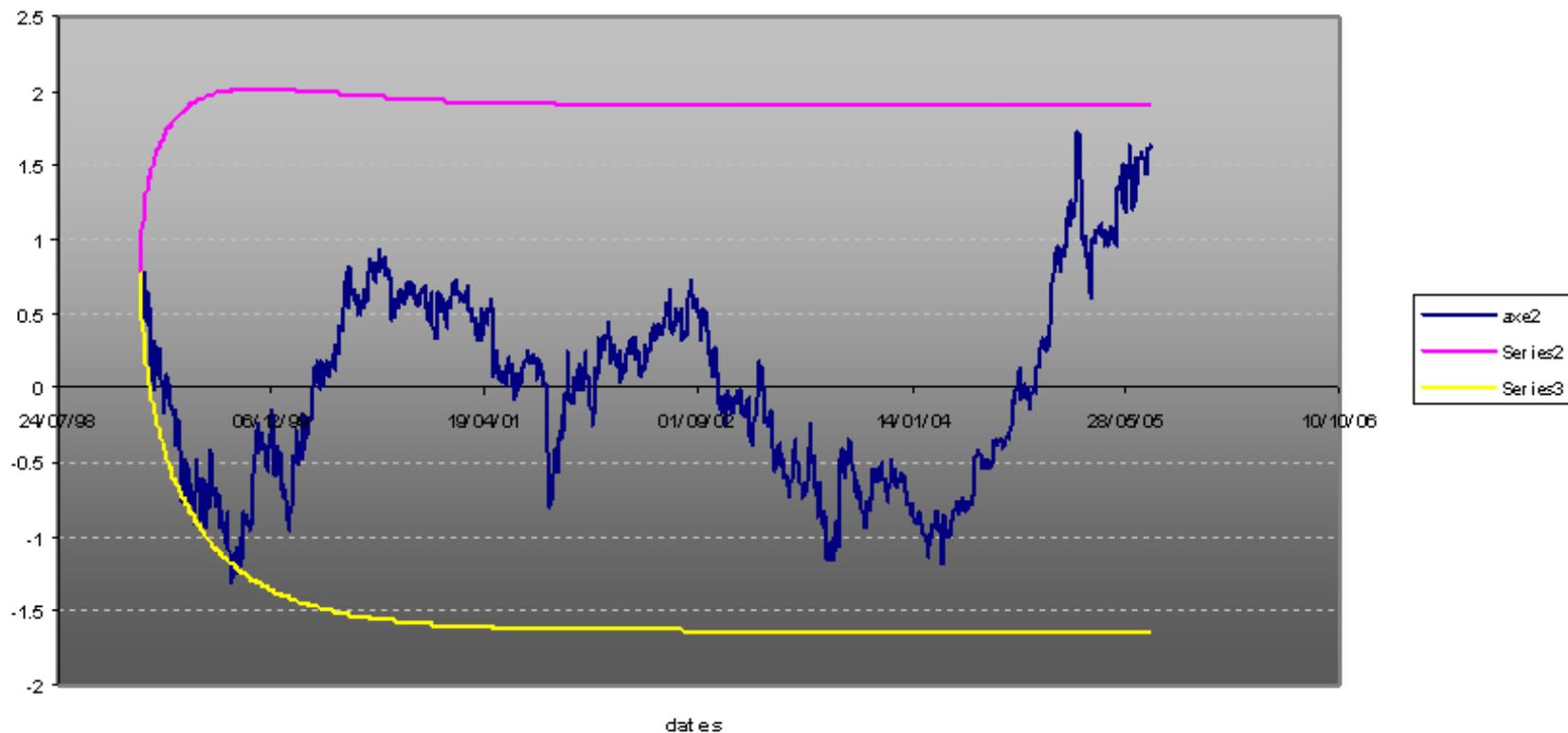
Intervalle de confiance sur les facteurs

intervalle de confiance sur l'axe 1



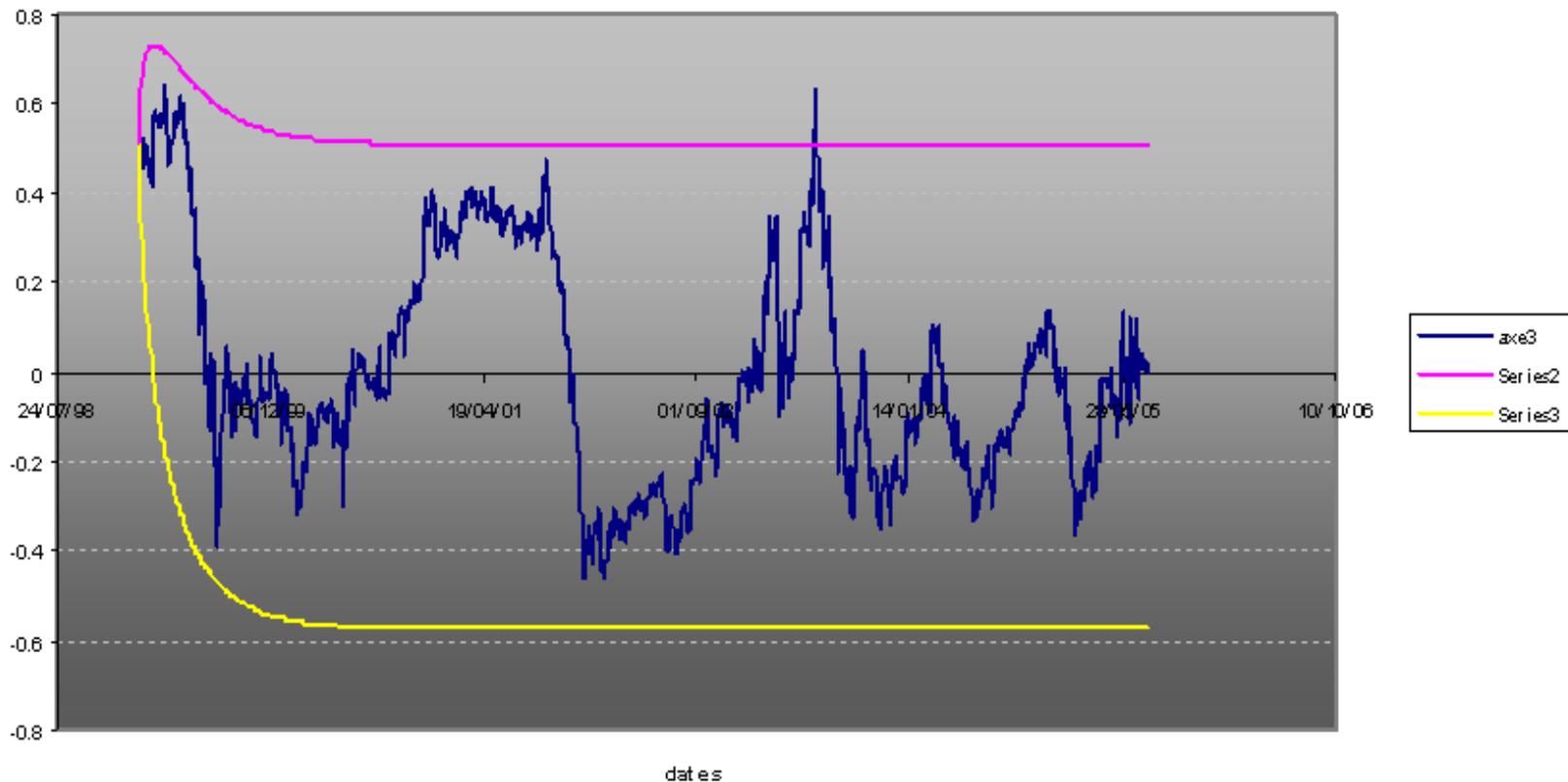
Intervalle de confiance sur les facteurs

Intervalle de confiance Axe2



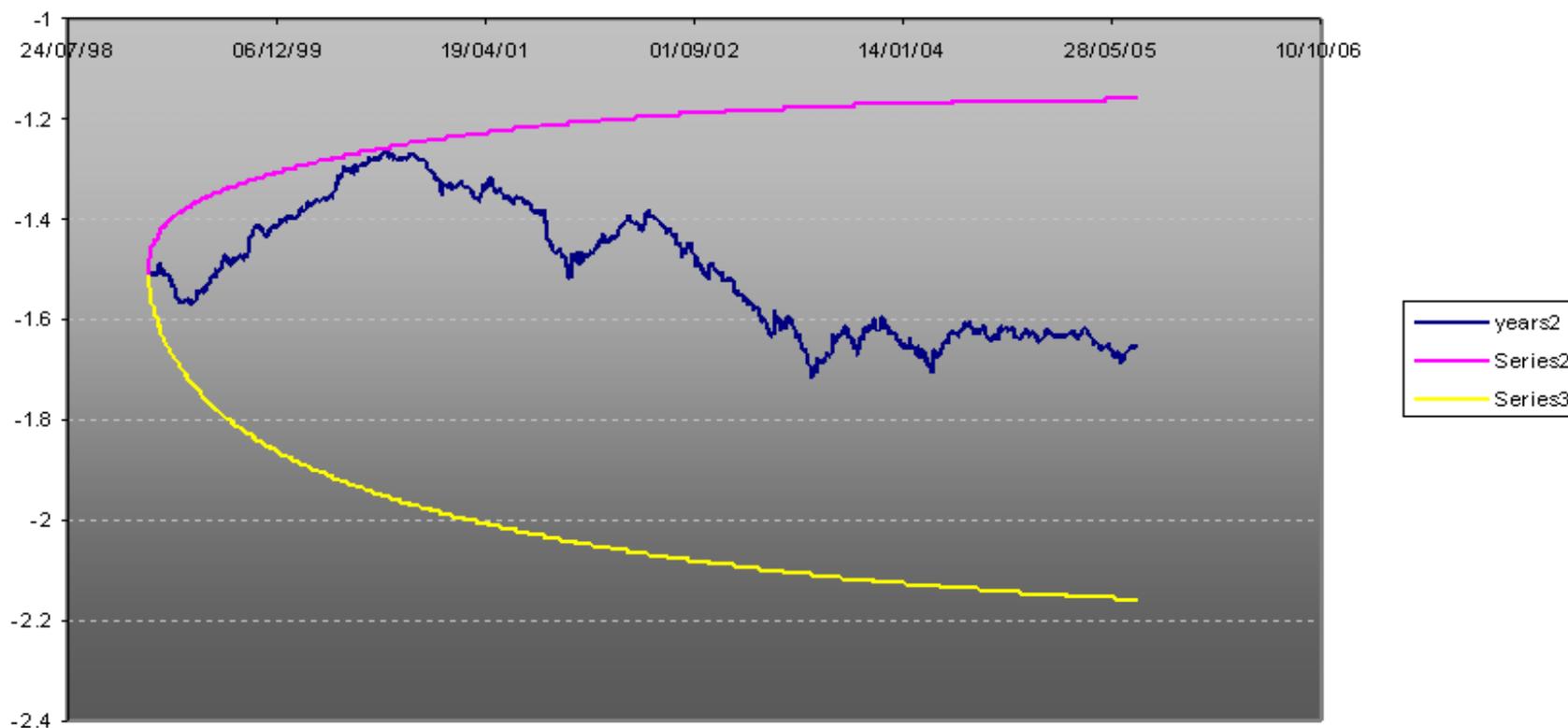
Intervalle de confiance sur les facteurs

Intervalle de confiance axe3



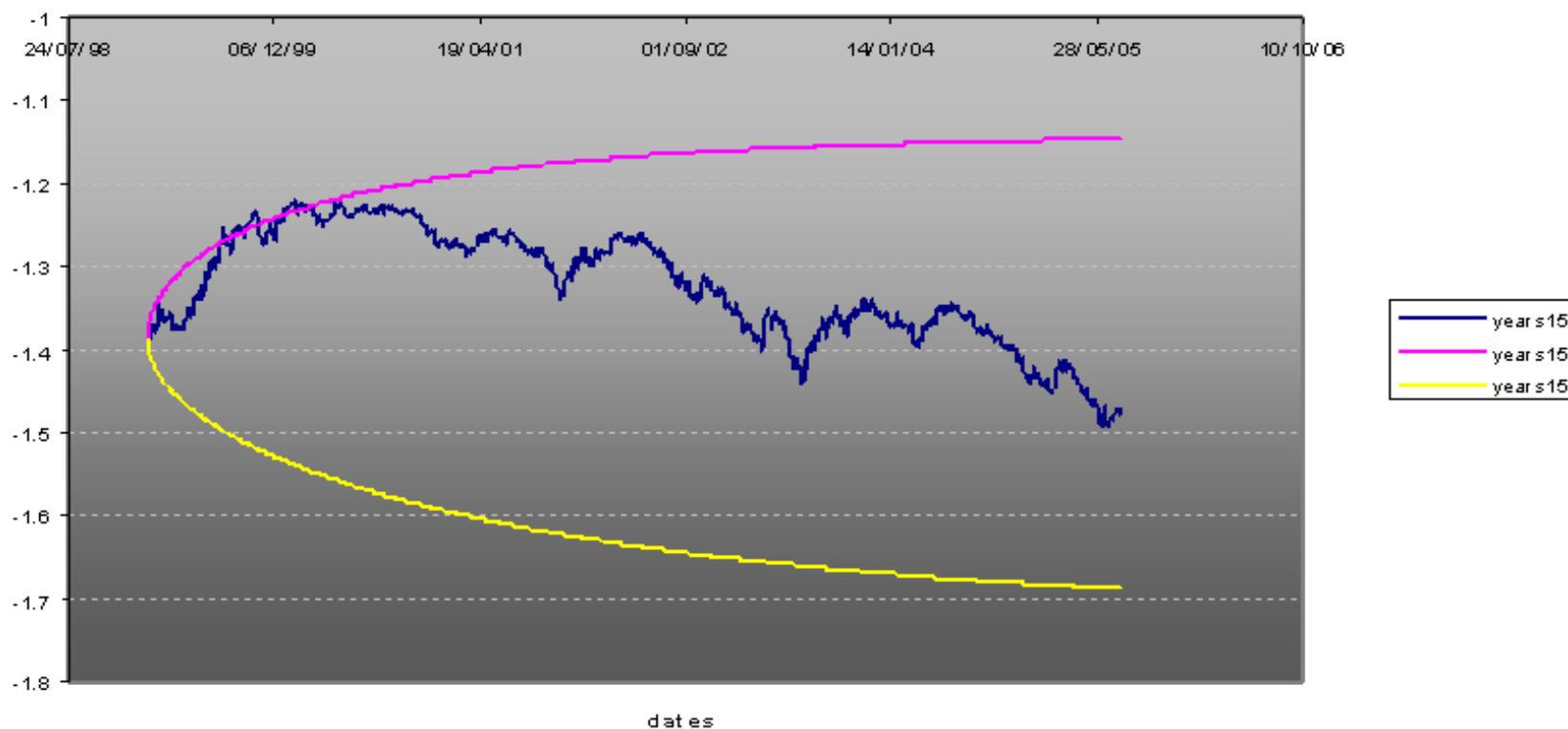
construction des intervalles de confiance sur le taux 2 ans

Back-Testing sur le taux 2 an en log



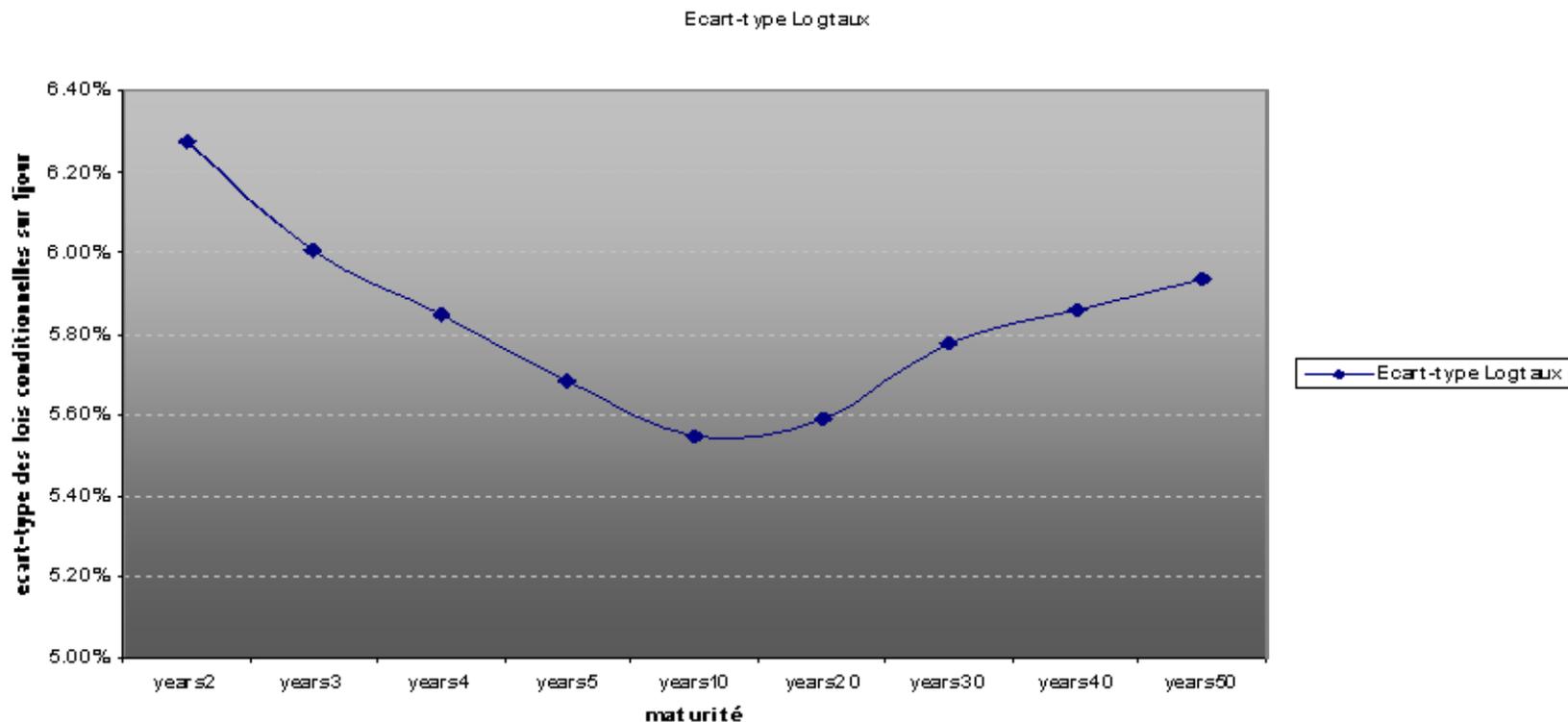
construction des intervalles de confiance sur le taux 15 ans

back-testing taux 15ans



Evolution des volatilités court-terme théoriques

- On peut représenter l'évolution des volatilités court terme en fonction des maturités.





Conclusion

- L'hypothèse d'une volatilité constante dans le modèle décrivant la dynamique des facteurs ne nous permet pas d'aboutir à des intervalles de confiance pertinents. Un modèle à un facteur (une seule source d'incertitude) est insuffisant pour décrire et mettre en relief les scénarios extrême. Il faut aussi modéliser la volatilité.
- De nombreuses études s'y sont pencher: GARCH, modèles SABR, etc..



Plan

I. Introduction

II. Le pilotage opérationnel des activités de la banque

1. Le capital économique v.s réglementaire
2. Bâle I/II

III. Le risque de remplacement et mesure de l'exposition

1. Principes généraux
2. Exemples de calculs d'exposition
3. Cadre juridique et réduction des risques

IV. Calibration d'un modèle de taux

V. Les sujets de recherche



Les sujets de recherche

- Méthodes de pricing rapide pour les produits à exercices anticipés et path-dependant.
- Modèles de diffusion des sous-jacents permettant de capter les queues de distribution épaisses, à changement de régime, reproduisant les bonnes structures de corrélation ...
- Approche globale du risque de crédit : calcul de l'exposition conditionnée au défaut (« wrong and right way exposure »).
- Diffusion des corrélations (options sur basket equity, tranches de CDO ...)
- Rémunération du risque de crédit (« Credit value adjustment »).
- Méthodes de réduction du risque optimale (échéanciers d'appels de marge)



Conclusion

- **Mission de RISQ: « contribuer au développement et à la rentabilité du groupe en garantissant que le dispositif de maîtrise des risques est solide et efficace »**
 - ▶ Rôle proactif
 - ▶ Prendre des risques, oui mais en connaissance de cause
 - ▶ Enjeu in fine: Risk reward / volatilité des résultats pour l'actionnaire
- **La gestion intégrée du risque de remplacement est un des enjeux futurs pour l'ingénierie financière.**



Remerciements

- Les organisateurs de cette formation au sein de la chaire Polytechnique-Ponts-Société Générale.
- Mes collègues de RISQ/CMC/MOD et plus particulièrement Sébastien Bruneau, Claire Chanteloup, Khalid Yaqobi et Stéphane N'Guessan.