Université de Paris VI - Pierre et Marie Curie

Document de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches

Spécialité : **Mathématiques**

Présenté par Jean-François DELMAS

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES SUPERPROCESSUS

Soutenue le 13 mars 2003 devant le jury composé de

Monsieur Jean BERTOIN,
Monsieur Donald DAWSON, Rapporteur,
Monsieur Eugène DYNKIN,
Monsieur Bernard LAPEYRE,
Monsieur Jean-François LE GALL,
Monsieur Yves LE JAN, Rapporteur,
Monsieur Leonid MYTNIK, Rapporteur,
Monsieur Marc YOR.

Remerciements

Magicien ou fabuleux conteur, Jean-François LE GALL expose les mathématiques de sorte que tout apparaisse limpide et naturel. Cette clarté est le fruit du travail ou du talent ou des deux, je ne sais, mais elle vous incite à parcourir vous aussi le chemin si évidemment simple de la recherche. Je ne regrette pas d'avoir succombé à cette incitation, et je suis particulièrement heureux que Jean-François LE GALL ait accepté de guider mes premiers pas. Je lui suis redevable de tout ce qu'il m'a enseigné avec beaucoup de patience durant la thèse : recherche de la rigueur, de la clarté et du travail d'orfèvre. Depuis, je m'essaye à reproduire cette rigueur, ce travail finement ciselé, et avec trop peu de succès cette clarté magique.

En acceptant de lire attentivement ce mémoire et d'évaluer ce travail, les rapporteurs Donald DAWSON, Yves LE JAN et Leonid MYTNIK m'honorent grandement. Je voudrais également remercier vivement Yves LE JAN pour sa participation au jury.

Rien ne m'est aussi agréable que de savoir Jean BERTOIN parmi les membres du jury. J'ai eu l'occasion de découvrir et d'apprécier sa gentillesse et sa décontraction.

C'est avec un immense plaisir que je désire remercier Eugène DYNKIN pour sa présence dans ce jury. Bien que nous ne nous soyons rencontrés que peu de fois, j'ai beaucoup appris au cours de mes longs monologues avec ses travaux.

Il aurait fallu écrire une histoire différente sans l'accueil chaleureux de Bernard LAPEYRE au CERMICS. Je le remercie pour nos nombreuses discussions, pour son attention bienveillante, et je suis heureux qu'il soit présent à ce jury.

Gratitude et reconnaissance sont les mots qui me viennent pour remercier Marc YOR de prendre le temps pour toujours répondre à mes questions et pour participer aujourd'hui à ce jury.

Voici venu le temps de remercier mes coauteurs, Romain ABRAHAM, Jean-Stéphane DHERSIN, Klaus FLEISCHMANN et Pascal VOGT, sans lesquels je n'aurais pas eu le courage ni même l'envie de continuer la recherche. Cette dernière m'est trop souvent solitaire, et se retrouver pour discuter et réfléchir ensemble la rend plus conviviale et plus sociable. Même si je crains fort d'être souvent confus, parfois obstiné, peut-être pénible ou intransigeant, j'éspère n'avoir rebuté aucun d'entre vous et que nous aurons encore de nombreuses occasions de travailler ensemble.

Grâce à l'École Nationale des Ponts et Chaussées et plus particulièrement au CERMICS, dans un cadre de qualité et entouré de personnes compétentes et serviables, j'ai pu effectuer les travaux détaillés dans ce mémoire. Ces institutions m'ont également encouragé à participer à l'enseignement. J'avoue en retirer beaucoup de satisfaction, et j'espère que les élèves eux aussi profitent quelque peu de mes efforts. Il est temps de remercier tout ceux qui ont rendu supportables voire plutôt agréables ces années, en acceptant de discuter, d'échanger, d'aider et de donner. Car je crois qu'il faut un peu de mystère pour que pétillent nos yeux, je remercie : Jacques sans lequel je travaillerais encore sur parchemin, Sylvie au contrôle, Sarah et mes tympans brisés, Jean-François toujours aussi impressionnant, Erwan et ses colères et ses sourires, Christiane sa main dans ma main, Mohamed toujours là, Gautier qui monte et qui descend, Ronan et ses galons, Jean et Mexico underground, Marie-Laure à S-F, Béatrice que je vois peu mais à qui je pense, Benjamin sur un nouveau chemin plein de surprise et de joie, les ans qui passent sans répit, les marins qui s'en vont avec les rêves qui nous hantent, Amélie jolie jolie, Bernard et sa main de fer dans un gant de velours, Didier très chaleureux, quelques informaticiens perdus sur une planète, quelques analystes sur d'autres planètes, Romain et ses images en noir et blanc, Laurent et son garage et ses histoires, Alain et sa carte de famille nombreuse, Céleste si indispensable, Jean avec son pipo toujours et encore, Isabelle qui construit une nouvelle maison, Diana qui se souvient loin des yeux, Héloïse déjà grande, Ginger petite fleur encore frêle, Emmanuel et ses cartouches, Laurent et sa selle en gruyère, Renaud et sa boisson gazeuse préférée, Jean-Philippe toujours prêt à rendre service, Jean-Pierre et ses textes littéraires, Mumu la main sur le cœur, Vickie déjà si indépendante, Klaus et ses polices, Illias toujours courant, Jean toujours roulant, Sylvie et sa maison de poupées, Jean-Sté et ses activités secrètes, et enfin Alice toujours présente.

Ces quelques mots pour remercier Benjamin JOURDAIN non seulement de sa bonne humeur mais aussi de nos conversations à bâtons rompus ou à cœurs entrouverts. Je ne peux clore ces remerciements sans évoquer Jean-Stéphane DHERSIN, avec qui j'ai beaucoup de plaisir à débattre des serpents et des superprocessus, à débattre des probabilités, à débattre de bien d'autres choses encore, mais aussi à ne pas débattre pour simplement parler ou passer le temps.

A celle qui m'entoure et me sourit le matin et me sourit le soir, à celle avec qui chaque jour nous construisons un peu plus haut un peu plus loin, à celle qui m'entoure d'un peu plus loin mais depuis aussi longtemps que je me souvienne, à ceux qui m'entourent de leurs bras et s'abandonnent complètement dans ce geste, à ceux qui me secouent du quotidien et me réveillent parfois vraiment trop tôt, à tous ceux là, je voudrais dire encore une fois merci.

Table des matières

1 Introduction

L'objet de ce mémoire est de présenter mes travaux concernant les superprocessus ainsi que le contexte dans lequel ils s'inscrivent. À l'aide d'un exemple, je décrirai dans un premier temps de manière très simple et très imprécise les superprocessus. Puis je donnerai un bref historique. Dans un deuxième temps, je présenterai plus en détail les superprocessus, le serpent brownien et leurs liens avec les équations aux dérivées partielles (EDP). Enfin j'exposerai mes travaux en distinguant trois aspects des superprocessus : leurs propriétés trajectorielles (paragraphe 3), leurs liens avec les EDP non linéaires (paragraphe 4) et enfin les modèles avec interaction ou catalyse (paragraphe 5).

1.1 Les superprocessus pour les néophytes

Nous présentons dans ce qui suit un modèle simple d'évolution de population qui sert d'exemple générique à la construction des superprocessus.

Considérons à l'instant 0, une population de N_0 individus. Ces individus se déplacent de manière aléatoire dans l'espace et indépendamment les uns des autres. Les déplacements aléatoires peuvent par exemple être modélisés par des mouvements browniens indépendants. À un instant τ, fixé, chaque individu entame un processus de division, correspondant par exemple à une reproduction asexuée. Cette division aléatoire est décrite par un "mécanisme de branchement" : avec 50% de chance cette division donne deux nouveaux individus et avec 50% de chance la division est un échec, et dans ce cas l'individu disparaît. On parle de "branchement critique" car le nombre moyen d'individu obtenu après une division est exactement un. Les échecs ou réussites des divisions sont indépendantes pour chacun des différents individus. Après cet instant τ, où ont eu lieu les divisions, les nouveaux individus se déplacent de manière aléatoire jusqu'à l'instant 2τ, où l'on réitère le processus de division et ainsi de suite jusqu'à la nuit des temps. En fait, il est bien connu que dans ce modèle, la population disparaît au bout d'un temps aléatoire fini.

À un instant t, la population est constituée de N_t individus dont les positions aléatoires sont notées $x_t^1, \ldots, x_t^{N_t}$. Le but est d'étudier l'évolution de la population et des positions des individus de la population quand la population initiale est grande et quand le temps τ entre les divisions successives est très petit.

Si l'on s'intéresse seulement à l'évolution de la taille de la population et pas du tout aux déplacements dans l'espace des individus, il suffit de regarder le processus $(N_{k\tau}, k \in \{0, 1, \ldots\})$. L'étude de ce processus remonte à 1874, où Galton et Watson [67] désiraient calculer la probabilité d'extinction des noms de famille de la noblesse anglaise.

1.2 Un peu d'histoire

Avec l'idée que nous désirons étudier une population de grande taille dont les divisions des individus se succèdent rapidement, il est naturel d'affecter chaque individu d'un poids $1/N_0$, de sorte que la population initiale a un poids total de un. Considérons de plus que le temps entre deux divisions est donné par $\tau = 1/N_0$. Alors quand N_0 croît vers l'infini, le processus qui décrit l'évolution de la masse de la population $(M_t = N_t/N_0, t \geq 0)$ converge vers un processus appelé "processus de branchement à espace d'état continu" (continuous state branching process (CSBP) en anglais). Ce processus limite a été décrit par Feller [62] en 1951. Il a été généralisé et amplement étudié dans les années 60 par de nombreux auteurs dont Jirina [74], Lamperti [76] et Silverstein [113, 114]. Dans ce dernier papier, l'auteur décrit en plus de l'évolution du nombre d'individus de la population, l'évolution d'un caractère dans la population.

C'est plus précisément Watanabe [120] en 1968 qui introduit le déplacement spatial des individus dans le processus limite. Le processus limite $X = (X_t, t \geq 0)$ décrit l'évolution de la population en tenant compte du déplacement des individus. À l'instant t, X_t est une mesure qui intuitivement décrit la répartition des individus dans l'espace. Ce processus X est appelé "superprocessus". Ce mot anglais aurait dû être traduit par sur-processus, en effet le processus X tient compte du phénomène de branchement en plus du processus qui gouverne le déplacement des individus. Le processus X est donc construit sur celui des déplacements.

Dès ce papier initiateur, Watanabe démontre la convergence du processus qui décrit la répartition de masse de la population dans l'espace (cf. notre exemple ci-dessus) vers un superprocessus que l'on appelle dans ce cas particulier le super mouvement brownien. De plus il établit pour le super mouvement brownien des propriétés de continuité trajectorielle. En 1975, Dawson [21] aborde les superprocessus avec le calcul d'Itô. À la fin des années 80, les superprocessus, appelés également processus de Dawson-Watanabe, deviennent un domaine de recherche très actif.

On peut mettre en évidence trois aspects de la théorie des superprocessus qui assurent leur succès.

1. Le premier qui reprend le fil de l'histoire concerne la modélisation de populations. Cette modélisation devient plus délicate si l'on tient compte de l'interaction possible entre les individus (superprocessus avec interaction) ou entre les individus et le milieu dans lequel ils vivent (superprocessus avec catalyse). Nous renvoyons à l'article de Dawson et Perkins [36] (1999) qui présente des résultats récents concernant les superprocessus avec interaction ou avec catalyse ainsi qu'au cours de Perkins à Saint-Flour en 1999 [105].

2. Les propriétés fines des superprocessus sont étroitement liées aux propriétés d'existence ou d'explosions de solutions d'EDP non linéaires du type $\Delta u = u^\alpha$ avec $\alpha \in]1, 2]$. Cette étude initiée par Dynkin , puis Le Gall ainsi que Dynkin et Kuznetsov a donné des résultats nouveaux concernant par exemple des formules de représentation des solutions de $\Delta u = u^\alpha$. Ces résultats sont très différents des formules de représentation des solutions harmoniques de $\Delta u = 0$. Ces idées ont été reprises et généralisées par la communauté des mathématiciens qui étudient les EDP, voir par exemple la monographie de Véron [119] (1996). Coté probabiliste, nous renvoyons à la monographie de Le Gall [83] (1999) et plus récemment à la monographie de Dynkin [58] (2002). Cette dernière monographie est plus directement centrée sur les avancées récentes concernant l'étude des solutions des équations du type $\Delta u = u^\alpha$. On pourra également consulter les travaux récents de Mselati [93] pour le cas $\alpha = 2$.

3. Tout comme le mouvement brownien apparaît comme limite naturelle de nombreux phénomènes (marches aléatoires, évolutions des cours des actions en bourse, phénomènes physiques microscopiques, ...), les superprocessus et plus particulièrement le super mouvement brownien ou l'ISE (pour "integrated super Brownian excursion"), apparaissent comme limites de différents phénomènes physiques. Nous donnons quelques exemples.

- Le super mouvement brownien apparaît comme limite du processus de contact qui modélise la propagation d'épidémie (voir [52] et [19]).
- Le modèle du "votant" (ou "voter model" en anglais) converge également après renormalisation vers le super mouvement brownien (voir [20] et [14]).
- Les modèles d'arbres aléatoires sur réseaux de $\mathbb{Z}^d$, en grande dimension ($d \geq 8$), convergent vers l'ISE (voir [47], [46] et [115]).
- La composante contenant 0 pour la percolation critique dans $\mathbb{Z}^d$, avec $d \geq 6$, converge avec une normalisation convenable vers l'ISE (voir [69], [70] et [118]).
- L'ISE apparaît également comme objet limite dans des problèmes de combinatoire sur les polyèdres dont les faces ont quatre cotés (voir [18]).
- L'analyse du trafic lourd dans les files d'attente fait intervenir dans certains cas des processus à valeurs mesures (voir [89]).

Enfin, nous terminons ce paragraphe en signalant qu'il existe des liens entre superprocessus et processus de coalescence (voir [12], [8], [6]).

1.3 Quelques monographies de référence

Pour terminer cette présentation je voudrais citer plusieurs textes ou livres de références sur les superprocessus. Le cours de Dawson à Saint-Flour (1991) [22] brosse un excellent tableau de l'étude des superprocessus jusqu'en 1991. Le cours de Perkins à Saint-Flour en 1999 [105] présente plus en détail les superprocessus avec interaction. La monographie de Le Gall [83] (1999) présente les liens entre le super mouvement brownien, et d'autres objets probabilistes qui lui sont reliés : le serpent Brownien (introduit par Le Gall en 1991 [77], voir aussi [78]), l'ISE (introduit par Aldous en 1993 [7]). Elle présente également le rapport étroit entre les propriétés du super mouvement Brownien et les propriétés des solutions d'EDP non linéaires du type $\Delta u = u^2$. La monographie d'Etheridge [60] (2000) présente divers modèles reliés aux superprocessus. Enfin la monographie de Dynkin [58] (2002) étudie en détail les liens entre les superprocessus et les solutions d'EDP non linéaires.

2 Les superprocessus et le serpent brownien

2.1 Les superprocessus

Un superprocessus, $X = (X_t, t \geq 0)$, est un processus à valeurs dans l'espace des mesures sur un espace E. Sa loi est caractérisée par

- Un processus de Markov sous-jacent, $\xi = (\xi_t, t \geq 0)$, à valeurs dans E, qui modélise le mouvement des individus. Dans l'exemple, nous avons choisi un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ pour ξ.
- Une fonction de branchement ψ de la forme
$$\psi(u) = au + bu^2 + \int_{]0,+\infty[} \pi(dr)\ (\mathrm{e}^{-ru} - 1 + ru),$$
où $a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$, et π est une mesure positive σ-finie sur $]0, +\infty[$ telle que l'intégrale $\int_{]0,+\infty[} \pi(dr)\ (r \wedge r^2)$ soit finie. Le cas $a < 0$ (resp. $a = 0$, $a > 0$) correspond à un superprocessus sous-critique (resp. critique, sur-critique). Dans l'exemple du paragraphe 1.1, la fonction de branchement est $\psi(u) = u^2$; elle correspond à $a = 0$, $b = 1$, $\pi = 0$. Il s'agit d'un branchement quadratique. Remarquons également que l'on obtient les fonctions de branchement α-stable $\psi(u) = cu^\alpha$, $c > 0$ en choisissant $a = 0$, $b = 0$ et $\pi(dr) = c' r^{1+\alpha}$, avec un bon choix pour la constante c'.
On peut considérer le cas non homogène où le branchement dépend de la position de l'individu. Dans ce cas les constantes a, b et la mesure π deviennent des fonctions de la variable d'espace. De nombreux travaux initiés par Lamperti [76] mettent en évidence les liens entre la forme des fonctions de branchement et la formule de Lévy-Kintchine pour les processus stables. Plus récemment, on pourra consulter les travaux de Le Gall et Le Jan [85, 84] et la monographie de Duquesne et Le Gall [51].
- Une fonctionnelle additive, $A = (A_t, t \geq 0)$ du processus ξ, qui traduit la vitesse à laquelle a lieu le branchement. Dans l'exemple, à la limite, le branchement a lieu de manière uniforme en temps et en espace : $A_t = t$.

Je renvoie à l'article de Leduc [88] et à la monographie de Dynkin [56] pour le jeu d'hypothèses sur le triplet (ξ, ψ, A). Par souci de simplicité, on suppose que le processus ξ est homogène, et on note $\mathbb{P}_x$ la loi de ξ issu de $\xi_0 = x \in E$.

Le processus X est un processus de Markov à valeurs dans l'espace des mesures finies sur E, noté $\mathcal{M}_f$. On note $(\eta, \varphi) = \int \varphi(x)\ \eta(dx)$ quand $\eta \in \mathcal{M}_f$ et φ est une fonction réelle mesurable bornée définie sur E. On note $\mathbb{P}^X_\eta$ la loi de X issu de $X_0 = \eta \in \mathcal{M}_f$. La loi de X est uniquement déterminée par la transformée de Laplace suivante : pour toute fonction réelle φ positive bornée mesurable définie sur E, on a

$$\mathbb{E}^X_\eta \left[\mathrm{e}^{-(X_t, \varphi)} \right] = \mathrm{e}^{-(\eta, u_t)}, \tag{1}$$

où u est l'unique solution non négative de l'équation intégrale

$$u(t, x) + \mathbb{E}_x \left[\int_0^t dA_s\ \psi(u(t-s, \xi_s)) \right] = \mathbb{E}_x \left[\varphi(\xi_t) \right]. \tag{2}$$

Signalons que les propriétés des superprocessus sont très différentes pour la fonction de branchement $\psi(u) = cu^\alpha$, $\alpha \in]1, 2]$ suivant que $\alpha = 2$ (branchement quadratique) ou $\alpha \in]1, 2[$

(branchement α-stable). Par exemple pour le branchement quadratique, (X_t, φ) possède des moments de tous ordres, alors que pour $\alpha < 2$, (X_t, φ) ne possède pas de moment d'ordre 2.

C'est dans le paragraphe 2.3, que je décrirai les mesures de sortie des superprocessus et leurs liens avec les EDP non linéaires elliptiques.

2.2 Le serpent brownien

On peut représenter certains superprocessus à l'aide du serpent brownien introduit par Le Gall [77] en 1991 (voir aussi [80]). Cet objet probabiliste s'avère être un outil très puissant pour l'étude des superprocessus. En effet il possède une structure plus riche que les superprocessus. En particulier, il décrit toute la généalogie des individus qui interviennent dans les superprocessus. La plupart de mes travaux exposés dans ce mémoire concernant les superprocessus sont établis en utilisant la représentation à l'aide du serpent brownien. Signalons enfin, que le serpent brownien est également l'objet naturel qui permet d'étudier l'ISE.

Nous en donnons ici une présentation rapide. Une trajectoire arrêtée est un couple (w, ζ), où $\zeta \geq 0$ est appelé "temps de vie" et w est une fonction continue définie sur $[0, \zeta]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Par simplicité on note souvent w pour le couple (w, ζ). Enfin le point $x \in \mathbb{R}^d$ est identifié comme la trajectoire de temps de vie nulle issue de x. On note $\mathcal{W}$ l'ensemble des trajectoires arrêtées.

Le serpent brownien, $W = (W_s, s \geq 0)$, est un processus de Markov à valeurs dans l'espace des trajectoires arrêtées $\mathcal{W}$. On note ζ_s le temps de vie de la trajectoire W_s. Le processus des temps de vie $\zeta = (\zeta_s, s \geq 0)$ a pour loi celle du mouvement brownien linéaire issu de 0 et réfléchi en 0. On pose $W_0 = x$. Maintenant, comme W est un processus de Markov, il suffit, pour $s' \geq s \geq 0$, de décrire la loi de $W_{s'}$ conditionnellement à celle de W_s et au temps de vie ζ. Les deux trajectoires W_s et $W_{s'}$ coïncident jusqu'au temps $r = \inf\{\zeta_u; u \in [s, s']\}$. De plus, toujours conditionnellement à ζ, la trajectoire $(W_{s'}(t) - W_{s'}(r), t \in [r, \zeta_{s'}])$ est indépendante de W_s et distribuée suivant la loi d'un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$. On note P_x la loi de W.

Quand le processus des temps de vie ζ est distribué suivant la mesure d'Itô des excursions positives, on note $\mathbb{N}_x$ la "loi" de W. Il s'agit en fait de la mesure d'excursion du serpent brownien hors de la trajectoire triviale x (la trajectoire triviale x est un point régulier pour le serpent). Dans ce cas, on note $\sigma = \inf\{s > 0; \zeta_s = 0\}$ la durée de l'excursion.

Un rôle particulier est joué par le point terminal des trajectoires W_s que l'on note $\hat{W}_s = W_s(\zeta_s)$. Introduisons L_s^t le temps local au niveau t à l'instant s du temps de vie ζ, et $T_1 = \inf\{s \geq 0; L_s^0 = 1\}$. On considère ensuite la mesure aléatoire X_t définie par : pour toute fonction bornée mesurable φ,

$$(X_t, \varphi) = \int_0^{T_1} \varphi(\hat{W}_s) \, dL_s^t,$$

si $t > 0$ et $(X_0, \varphi) = \varphi(x)$. Alors la loi de $(X_t, t \geq 0)$, sous P_x, est celle du super mouvement brownien issu de la masse de Dirac en $x \in \mathbb{R}^d$ (le processus sous-jacent est le mouvement brownien, la fonction de branchement est $\psi(u) = 2u^2$, et la fonctionnelle additive $dA_t = dt$). La structure associée au serpent est plus riche que celle du super mouvement brownien, car on a d'une certaine manière ordonné toutes les trajectoires qui composent le super mouvement brownien, en les "numérotant" de 0 à T_1.

Enfin l'ISE est la loi (à un facteur multiplicatif près) de la mesure aléatoire $\int_0^\infty X_t \, dt$ sous la mesure d'excursion $\mathbb{N}_0$ conditionnellement au fait que l'excursion soit de longueur 1 ($\sigma = 1$).

2.3 Mesure de sortie et EDP elliptique non linéaire

Soit D un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, et $x \in \mathbb{R}^d$. On définit τ_s le temps de sortie de D pour la trajectoire W_s : $\tau_s = \inf\{t \geq 0; W_s(t) \notin D\}$, avec la convention que $\tau_s = \infty$ si la trajectoire W_s ne sort pas de D (i.e. $W_s(t) \in D$ pour $t \in [0, \zeta_s]$).

On définit une fonctionnelle additive du serpent brownien qui compte les trajectoires W_s qui sortent de D pour la première fois par l'approximation suivante :

$$L_s^D = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \mathbf{1}_{\{\tau_u < \zeta_u < \tau_u + \varepsilon\}} \, du.$$

La mesure de sortie de D est la mesure aléatoire sur ∂D, la frontière de D, définie par : pour toute fonction bornée mesurable φ,

$$(X_D, \varphi) = \int_0^{T_1} \varphi(\hat{W}_s) \, dL_s^D$$

(ou avec la définition $(X_D, \varphi) = \int_0^\sigma \varphi(\hat{W}_s) \, dL_s^D$ sous $\mathbb{N}_x$). Si l'ouvert D est régulier, et si φ est une fonction continue positive, alors la fonction définie par

$$u(x) = -\log \mathrm{P}_x \left[\mathrm{e}^{-(X_D, \varphi)} \right] = \mathbb{N}_x \left[1 - \mathrm{e}^{-(X_D, \varphi)} \right]$$

est l'unique solution positive du problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = 4u^2 & \text{dans } D, \\ u = \varphi & \text{sur } \partial D. \end{cases} \tag{3}$$

La représentation des solutions positives de $\Delta u = 4u^2$ dans D à l'aide des mesures de sortie remonte aux travaux de Dynkin [55].

3 Propriétés trajectorielles

On considère le cas du super mouvement brownien $X = (X_t, t \geq 0)$, qui est la limite de l'exemple présenté au paragraphe 1.1. Le processus sous-jacent est le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$, la fonction de branchement est quadratique $\psi(u) = u^2$, et la vitesse à laquelle a lieu le branchement est homogène $A_t = t$. Depuis la fin des années 1980 à nos jours, le super mouvement brownien est l'objet de nombreux travaux de recherche dont nous n'évoquerons qu'une faible partie.

3.1 Propriétés de l'image du super mouvement brownien (voir [39])

Dawson, Iscoe et Perkins [34] en 1989, calculent le module de continuité de S_t, le support de X_t. Ils déterminent les ensembles polaires pour X_t ainsi, entre autre, que la mesure de Hausdorff de l'image ("range" en anglais), $\mathcal{R} = \bigcup_{t>0} S_t$, du super mouvement brownien. Depuis, plusieurs articles concernent l'étude du support ou de l'image du super mouvement brownien, voir par exemple [100, 86, 87, 106, 92]. Une question naturelle est de savoir si l'on peut reconstruire le super mouvement brownien à partir de son support S_t. Pour cela on considère la "saucisse" du super mouvement brownien de taille $\varepsilon > 0$ définie par

$$S_t^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^d; \exists y \in S_t \quad \text{tel que} \quad |x - y| < \varepsilon\}.$$

Tribe [117] et Perkins [102] montrent en 1994 que si $d \geq 3$, alors on a pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}^d$, $\mathbb{P}_{\delta_x}^X$-p.s. pour tout $t > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{2-d} \, |S_t^\varepsilon \cap A| = \alpha_0 (X_t, \mathbf{1}_A),$$

où α_0 est une constante dépendant de la dimension d, $|B|$, où $B \subset \mathbb{R}^d$ est un borélien de $\mathbb{R}^d$, désigne la mesure de Lebesgue de B, et δ_x est la masse de Dirac en $x \in \mathbb{R}^d$. À ma connaissance, le cas de la dimension $d = 2$ reste ouvert (cf la conjecture p.313 de [102]).

Dans [39], nous démontrons un résultat similaire pour l'image du super mouvement brownien ainsi que pour l'image de l'ISE. Si on note la saucisse de l'image du super mouvement brownien par

$$\mathcal{R}^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^d; \exists y \in \mathcal{R} \quad \text{tel que} \quad |x - y| < \varepsilon\},$$

alors on montre que, pour $d \geq 5$, pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}^d$, $\mathbb{P}_{\delta_x}^X$-p.s.,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{4-d} \, |\mathcal{R}^\varepsilon \cap A| = C_0 \int dt \; (X_t, \mathbf{1}_A),$$

où C_0 est une constante qui dépend de la dimension. Le résultat est également vrai en dimension $d = 4$ en remplaçant ε^{4-d} par $\log(1/\varepsilon)$. La démonstration de ce résultat repose sur l'utilisation du serpent brownien et les estimations des probabilités d'atteinte de petites boules de $\mathbb{R}^d$ pour le serpent brownien. En particulier les résultats de Le Gall [79] jouent un rôle important dans ces estimations.

On peut alors démontrer à l'aide du résultat concernant $\mathcal{R}$, que pour $d \geq 5$, l'ensemble aléatoire $\mathcal{R}$ est équivalent en capacité au sens de Pemantle et Peres [97] à l'ensemble $[0, 1]^4$. Ces résultats sont complémentaires des articles de Perkins [100], Le Gall et Perkins [86], Le Gall, Perkins et Taylor [87], Perkins et Taylor [106], concernant l'étude du support du super mouvement brownien.

En ce qui concerne l'étude des équivalences de capacité pour des ensemble aléatoires, signalons les travaux de Pemantle, Peres et Shapiro [98] sur l'image du mouvement brownien et de Rosen [109] pour l'image des processus de Lévy.

Il reste bien sûr de nombreuses questions ouvertes concernant l'étude du super mouvement brownien. Par exemple, Engländer [59] étudie le comportement en temps long de la saucisse du super mouvement brownien dans le cas sur-critique ($\psi(u) = au + bu^2$, avec $a > 0$). En particulier, en temps long, avec une renormalisation convenable, on observe l'ossature qui correspond à la trajectoire d'un mouvement brownien avec branchement suivant des temps exponentiels indépendants, et on ne voit plus le branchement continu. Ce phénomène est certainement dû au fait que l'on regarde un super mouvement brownien sur-critique. Que se passe-t-il si on considère un mouvement brownien usuel, i.e. critique, conditionné à la non extinction ?

3.2 Le super mouvement brownien avec branchement α-stable (voir [38, 4])

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, de nombreux résultats précis sont connus concernant le super mouvement brownien avec un branchement quadratique. En revanche pour un branchement plus général, par exemple les branchements α-stable ($\psi(u) = u^\alpha$, avec $\alpha \in]1, 2[$), on dispose de beaucoup moins de résultats. La dimension de Hausdorff du support de X_t est calculée par Dawson [22] (théorème 9.3.3.1). Dans ce dernier article, ainsi que dans l'article de Fleischmann [63], on peut trouver des résultats concernant l'absolue continuité de X_t par rapport à la mesure de Lebesgue.

En s'appuyant sur la représentation du super mouvement brownien avec branchement α-stable, $X = (X_t, t \geq 0)$, à l'aide d'un serpent brownien, développée par Bertoin, Le Gall et Le Jan [13], qui utilisent une méthode de subordination, nous avons démontré des résultats nouveaux. Par exemple on calcule la dimension de Hausdorff de $\bigcup_{t\in B} \operatorname{supp} X_t$, où B est un compact de $]0, +\infty[$. Ainsi $\mathbb{P}^X_\eta$-p.s. si $B \subset]0, \tau[$, où $\tau = \inf\{t > 0, X_t = 0\}$, est le temps d'extinction de X, alors

$$\dim \overline{\bigcup_{t\in B} \operatorname{supp} X_t} = (\frac{2}{\alpha - 1} + 2 \dim B) \wedge d,$$

où d est la dimension de l'espace. On généralise ainsi des résultats bien connus dans le cas du branchement quadratique (voir par exemple Serlet [111]). En particulier, la dimension de Hausdorff de l'image est

$$\dim \mathcal{R} = (\frac{2}{\alpha - 1} + 2) \wedge d.$$

Après avoir explicité des bornes inférieures et supérieures pour les probabilités d'atteinte des petites boules pour le super mouvement brownien, on démontre en utilisant une technique développée par Perkins [103], que pour $t > 0$, p.s. les composantes connexes du support de X_t sont réduites à des points si $d > 4/(\alpha - 1)$. Ce résultat généralise celui de Tribe [116], et il faut le rapprocher de l'article d'Abraham [1]. Ces deux auteurs traitent le cas $\alpha = 2$.

Enfin, nous donnons des critères sur la dimension d et la mesure μ pour que la mesure aléatoire $\int \mu(dt)\ X_t(dx)$ soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dx

sur $\mathbb{R}^d$ (ce résultat est étendu au cas où le processus de Markov sous-jacent ξ est un processus stable symétrique).

Ces résultats sont établis pour des fonctions de branchement plus générales que les branchements α-stables, sans toutefois pouvoir atteindre la complète généralité. Cette limitation apparaît déjà dans les théorèmes de représentation du super mouvement brownien de Bertoin, Le Gall et Le Jan [13]. Le Gall et Le Jan [85, 84] introduisent des serpents de Lévy qui permettent de représenter les superprocessus avec fonction de branchement général. Il serait intéressant d'utiliser cette approche pour généraliser les résultats de [38] au cas des fonctions de branchement général.

Il découle des résultats présentés, que plus d est petit et plus α est proche de 1, plus la mesure X_t est régulière. En particulier, quand $2/(\alpha-1) > d$, X_t possède une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. On peut alors se demander quelle est la régularité de cette densité en la variable d'espace. Mytnik et Perkins [96] ont répondu à cette question, en démontrant que pour $\alpha \in]1,2[$, alors la densité est continue si $d=1$. En revanche si $d \geq 2$, la densité, quand elle existe, est localement non bornée.

Après avoir étudié les propriétés de X_t, il était naturel, en utilisant les mêmes outils, à savoir un serpent brownien avec subordination, d'établir les propriétés de la mesure de sortie X_D, d'un domaine D. En collaboration avec Abraham [4], nous avons généralisé les résultats d'Abraham et Le Gall [5] concernant les propriétés des mesures de sortie pour le branchement quadratique ($\psi(u) = u^2$) aux branchements α-stables ($\psi(u) = u^\alpha$, avec $\alpha \in]1,2[$). Il apparaît des phénomènes différents suivant que la dimension de l'espace est plus petite ou plus grande que la dimension critique $d_c = (\alpha+1)/(\alpha-1)$. En particulier nous donnons des minorations pour la probabilité que la mesure de sortie X_D charge une petite boule sur la frontière de D. Nous complétons également les résultats de Sheu [112] sur la majoration de ces probabilités en donnant une borne supérieure pour le cas délicat de la dimension critique.

En particulier, cela permet de montrer que la fonction

$$u_\varepsilon(x) = -\log \mathbb{P}^X_{\delta_x}[X_D(B_\varepsilon) = 0], \quad x \in D,$$

où B_ε est une petite boule de ∂D de rayon $\varepsilon > 0$, est l'unique solution positive de

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\Delta u = u^\alpha & \text{in } D, \\ \lim_{x\to y, x\in D} u(x) = 0 & \text{où } y \in \partial D \backslash \overline{B}_\varepsilon, \\ \lim_{x\to y, x\in D} u(x) = \infty & \text{où } y \in B_\varepsilon. \end{cases}$$

De plus nous donnons le comportement de $u_\varepsilon(x)$ quand $\varepsilon \downarrow 0$.

Nous démontrons également que la mesure de sortie possède une densité si et seulement si $d < d_c$, complétant ainsi les résultats de Sheu [112] qui ne traite pas la dimension critique $d = d_c$. Nous calculons la dimension de Hausdorff de la mesure de sortie :

$$\dim \operatorname{supp} X_D = \frac{2}{\alpha-1} \wedge (d-1) \quad \text{p.s. sur } \{X_D \neq 0\},$$

et nous démontrons que les composantes connexes de la mesure de sortie sont réduites à des points en grande dimension ($d > 2d_c - 1$).

Une question légitime concerne l'étude de la régularité de la densité de la mesure de sortie en dimension petite ($d < d_c$). Le Gall [82] a montré que dans le cas du branchement quadratique pour $d = 2$, la mesure de sortie possède une densité continue p.s. Ce résultat implique une bijection entre les solutions positives de $\Delta u = u^2$ dans un domaine régulier D, et les traces sur la frontière décrite par un couple, (Γ, ν), où Γ est un fermé de ∂D et ν est une mesure borélienne sur $\partial D \backslash \Gamma$. On s'attend donc à avoir un résultat du même type pour le branchement α-stable en dimension sous critique. Toutefois la description des solutions positives de $\Delta u = u^\alpha$ en fonction de la trace en dimension sous-critique établie par Marcus et Véron [91], pour $\alpha > 1$, limite l'intérêt de cette étude. On peut aussi consulter [96] concernant la régularité de la densité du super mouvement brownien α-stable.

3.3 Un calcul de moment pour le support de l'ISE (voir [40])

L'article de Chassaing et Schaeffer [18] montre que le support de l'ISE, en dimension 1, apparaît naturellement comme limite de certains problèmes de combinatoires. En dimension 1, le support de l'ISE est un segment contenant 0 : $[-L, R]$. En particulier, il devenait intéressant de calculer la loi jointe de (L, R). Des méthodes combinatoires élaborées par Bousquet-Mélou et Virag donnent le premier moment de R (et donc de L, car par symétrie, R et $-L$ ont même loi). Comme le souligne Aldous [7], peu de résultats sont connus sur la loi de (L, R). L'avantage de travailler avec le serpent brownien, est de pouvoir utiliser des EDP pour calculer certaines probabilités. Ce lien avec les EDP n'existe pas pour l'ISE. En utilisant le lien entre ISE et serpent brownien, puis en résolvant des EDP (en fait des équations différentielles ordinaires car la dimension de l'espace est 1), liées au serpent, on peut calculer une transformée de Laplace modifiée de la loi du couple (L, R). Puis à partir de cette transformée de Laplace, on peut expliciter la moyenne et la variance de R ainsi que la covariance de L et R. Les calculs sont élémentaires, mais ils reposent sur les propriétés spécifiques du serpent brownien, essentiellement la propriété de Markov spécial introduite par Le Gall [81].

4 Liens entre EDP et super mouvement brownien ou serpent brownien

En 1968, Watanabe [120] souligne le lien entre les superprocessus et les équations aux dérivées partielles (EDP) qui découlent de (2). Dans le cas $dA_t = dt$, en notant L le générateur infinitésimal de ξ (ainsi $L = \Delta/2$, si ξ est le mouvement brownien), alors on obtient sous des hypothèses raisonnables que u, définie dans (1), est solution positive de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = Lu - \psi(u) \quad \text{sur }]0, +\infty[\times \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) = \varphi(x). \end{cases}$$

4.1 Points réguliers pour le super mouvement brownien , points réguliers pour le serpent brownien (voir [41, 42])

Si on regarde le super mouvement brownien ($dA_t = dt$, $\psi(u) = 2u^2$, $L = \Delta/2$), Dynkin [55] démontre que la solution positive maximale, u_M, de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\Delta}{2} u - 2u^2, \tag{4}$$

dans un ouvert $Q \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, peut s'écrire sous la forme

$$u_M(t, x) = -\log \mathbb{P}^X_{t,\delta_x}(\mathcal{G} \subset Q),$$

où $\mathcal{G} = \cup_{s>t}\{s\} \times \operatorname{supp} X_s$ est le graphe du super mouvement brownien issu de la masse de Dirac, δ_x, à l'instant t. Un point (t, x) est dit G-régulier si et seulement si $\mathbb{P}^X_{t,\delta_x}(\mathcal{G} \subset Q) = 0$ (intuitivement, le graphe du super mouvement brownien sort immédiatement de Q). Cette définition est à rapprocher de la définition de points réguliers pour un processus (voir par exemple [71] pour les points réguliers du mouvement brownien). En particulier, un point (t, x) est G-régulier si la solution maximale explose en ce point :

$$\lim_{(s,y)\to(t,x);(s,y)\in Q} u_M(s, y) = +\infty.$$

Dans [41], en collaboration avec Dhersin, nous démontrons qu'un point (t, x) est G-régulier pour un ouvert Q si et seulement si $\mathrm{Cap}_{(t,x)}(Q^c \cap\,]t, +\infty[\times \mathbb{R}^d) = +\infty$, pour une certaine capacité parabolique explicite mais non homogène en espace-temps (d'où la dépendance de la capacité en (t, x)). Plus précisément, on démontre que

$$\frac{1}{4} \mathrm{Cap}_{(t,x)}(Q^c \cap\,]t, +\infty[\times \mathbb{R}^d) \le u_M(t, x) \le C_0 \,\mathrm{Cap}_{(t,x)}(Q^c \cap\,]t, +\infty[\times \mathbb{R}^d), \tag{5}$$

pour une constante C_0 dépendant de d seulement. La majoration repose sur une analyse de l'EDP avec des techniques comparables à celles développées dans [9]. La minoration repose sur des résultats de [79] concernant les probabilités d'atteinte du serpent brownien.

Remarquons enfin que les inégalités (5) permettent de caractériser les ensembles compacts, A, G-polaires, i.e. tels que la solution positive maximale de (4) dans A^c soit nulle. On retrouve ainsi les résultats de Dynkin [54] établis avec une capacité (homogène) équivalente à celle utilisée dans (5).

Nos résultats étendent les résultats établis par Dhersin et Le Gall [48] concernant le test de Wiener pour le super mouvement brownien. Il s'agit également d'une généralisation du test de Kolmogorov pour le super mouvement brownien démontré par Dhersin et Le Gall [49]. Dans cet article, les auteurs considèrent le cas particulier des domaines Q de la forme $\{(t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^d; |x| < \sqrt{t}h(t)\}$, où h est une fonction décroissante de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$. Et ils étudient la G-régularité de $(0,0)$. En particulier, ils démontrent que $(0,0)$ est G-régulier si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_{0+}^{\varepsilon} \frac{dt}{t^2}\, h(t)^{d+2}\, \mathrm{e}^{-h(t)^2/2} = +\infty. \tag{6}$$

Étant donné que l'on peut représenter le super mouvement brownien à l'aide d'une collection dénombrable d'excursions de serpents browniens, il semble clair que le graphe d'une excursion donnée du serpent brownien est "plus petit" que le graphe du super mouvement brownien. Toujours en collaboration avec Dhersin [42], nous démontrons un critère de Kolmogorov pour le serpent brownien qui ressemble à celui du super mouvement brownien. Plus exactement, si on considère le temps

$$T = \inf\{t > 0; \rho_t > \sqrt{t}h(t)\},$$

où $\rho_t = \sup\{|\hat{W}_s|; \zeta_s = t\}$, est le rayon du graphe du serpent brownien au niveau t, alors nous montrons que $\mathbb{N}_0[T > 0] = 0$ si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_{0+}^{\varepsilon} \frac{dt}{t}\, h(t)^{d+2}\, \mathrm{e}^{-h(t)^2/2} = +\infty.$$

Si l'intégrale ci-dessus est convergente pour un $\varepsilon > 0$, alors $\mathbb{N}_0[T = 0] = 0$. La différence entre le test de Kolmogorov pour le serpent brownien et le super mouvement brownien se voit dans la puissante de t au dénominateur.

Nous démontrons de plus que l'intégrale $\int_{0+}^{\varepsilon} \frac{dt}{t}\, h(t)^{d+2}\, \mathrm{e}^{-h(t)^2/2}$ est convergente pour un $\varepsilon > 0$ (resp. divergente pour tout $\varepsilon > 0$) si et seulement si l'intégrale

$$\int_{0+}^{\varepsilon} u_M(t, B_t)\, dt,$$

où $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien issu de 0, est convergente (resp. divergente). Ceci est à mettre en regard avec les résultats de Pitman et Yor [107] et de Jeulin [72, 73] sur la convergence d'intégrales de fonctions du mouvement brownien.

4.2 Problème de Neumann non linéaire (voir [3])

Une littérature importante considère les solutions positives du problème elliptique

$$\frac{\Delta}{2} u = 2u^2 \quad \text{dans } D \subset \mathbb{R}^d, \tag{7}$$

où D est un ouvert régulier borné. Nous avons rappelé au paragraphe 2.3 que l'on peut représenter l'unique solution positive de (7) avec condition de type Dirichlet : $u = \varphi$ sur ∂D, où $\varphi \geq 0$ est continue, par

$$u(x) = \mathbb{N}_x \left[1 - \mathrm{e}^{-(X_D, \varphi)}\right].$$

Abraham [2] donne une formule de représentation des solutions positives de (7) avec condition frontière mixte de type Dirichlet-Neumann. Pour des raisons techniques, il n'était pas possible de considérer une condition de Neumann seulement. En effet, pour l'équation de la chaleur $\Delta u = 0$ dans D, avec condition de Neumann $\partial u/\partial n = \varphi$, où $\partial/\partial n$ désigne la dérivée normale extérieure à D, la formule de représentation probabiliste de u s'écrit

$$u(x) = \frac{1}{2} \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x \int_0^t \varphi(B_s)\, dl_s,$$

où $B = (B_t, t \geq 0)$ est sous $\mathbb{P}_x$ un mouvement brownien réfléchi dans D, issu de $x \in \bar{D}$ et $(l_s, s \geq 0)$ le temps local de B sur la frontière ∂D (voir [15]). L'intégrale qui apparaît dans le membre de droite n'est pas absolument convergente. Ce problème technique a des conséquences pour l'EDP non-linéaire (7).

En collaboration avec Abraham [3], nous définissons une fonctionnelle additive du serpent brownien, avec pour processus sous-jacent B, par l'approximation suivante :

$$L_s^{\text{Neumann}} = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \mathbf{1}_{\{\hat{W}_u \in D_\varepsilon\}}\, du,$$

où $D_\varepsilon = \{x \in D; d(x, \partial D) \leq \varepsilon\}$ est un épaississement de taille ε de ∂D. La fonctionnelle additive L^{Neumann} croît aux temps s pour lesquels W_s meurt sur ∂D. Rappelons que la mesure de sortie de D pour le serpent brownien est construite à l'aide de la fonctionnelle additive L_s qui croît aux temps s pour lesquels W_s meurt à son premier temps d'atteinte de ∂D. Intuitivement, il semble que le support de dL_s est un sous-ensemble du support de dL_s^{Neumann}.

Nous considérons ensuite la mesure définie sous la mesure d'excursion du serpent issu du point $x \in D$, $\mathbb{N}_x$, par : pour toute fonction φ mesurable positive,

$$(Z_D, \varphi) = \int_0^\sigma \varphi(\hat{W}_s)\, dL_s^{\text{Neumann}}.$$

Nous démontrons que la fonction

$$u(x) = \mathbb{N}_x \left[1 - \mathrm{e}^{-(Z_D,\varphi)}\right], \quad \varphi \geq 0,$$

φ étant continue, est l'unique solution faible positive de (7) avec condition $\partial u/\partial n = \varphi$ sur ∂D. Cela signifie que pour toute fonction test ϕ, de classe C^2 dans D et C^1 dans $\bar{D}$, aux dérivées d'ordre 2 bornées dans D, on a

$$\int_D \Delta\phi v - 4 \int_D \phi v^2 = \int_{\partial D} \frac{\partial \phi}{\partial n} v - \int_{\partial D} \phi\varphi, \tag{8}$$

où $\int_D f = \int_D f(x)\, dx$ et $\int_{\partial D} f = \int_{\partial D} f(x)\, \sigma(dx)$, $\sigma(dx)$ étant la mesure de surface sur ∂D. Nous démontrons que la fonction u est continue dans $\bar{D}$.

Comme l'intégrale $\int_0^\infty \varphi(B_s)\, dl_s$ est divergente (sauf si $\varphi = 0$), on ne peut espérer avoir une équation intégrale du type (2) pour u avec second membre $\mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty \varphi(B_s)\, dl_s\right]$. En revanche, nous montrons que u est solution dans $\bar{D}$ de l'équation intégrale

$$v + 2G(v^2) - \frac{\int_D v}{\int_D \mathbf{1}} = \frac{1}{2} G\varphi\sigma, \tag{9}$$

où $Gh(x) = \int_D G(x,y)h(y)\ dy$, $Gh\sigma(x) = \int_{\partial D} G(x,y)h(y)\ \sigma(dy)$ et G le noyau de Green du processus B. Toutefois, il existe des solutions positives de l'équation (9) qui ne sont pas solutions faibles de (7) avec condition $\partial u/\partial n = \varphi$ sur ∂D. Nous démontrons que si v est une solution positive de l'équation (9) et de l'équation intégrale

$$4 \int_D v^2 = \int_{\partial D} \varphi,$$

alors v est l'unique solution faible positive de (7) avec condition $\partial u/\partial n = \varphi$ sur ∂D. Cette dernière condition n'est autre qu'une condition de compatibilité. C'est un cas particulier de (8) avec $\phi = \mathbf{1}$.

Enfin, dans une deuxième partie nous nous intéressons aux propriétés de la mesure Z_D. Ainsi nous établissons que la mesure Z_D qui est portée par ∂D, est absolument continue par rapport à la mesure de surface sur ∂D en dimension petite : $d = 2$ ou $d = 3$. Enfin, $\mathbb{N}_x$-p.p., la dimension de Hausdorff du support de Z_D est plus grande que 3 pour $d \geq 4$ si $Z_D \neq 0$. Il est raisonnable de penser que la dimension de Hausdorff est exactement 3 pour $d \geq 4$ si $Z_D \neq 0$. Remarquons que la mesure Z_D est plus régulière que la mesure de sortie X_D.

5 Superprocessus avec interaction

En ce qui concerne les superprocessus avec interaction, on peut distinguer deux types différents d'interactions.

Dans le premier cas il s'agit d'une interaction du milieu sur les individus. On parle dans ce cas de catalyse. En particulier il n'y a pas d'interaction entre les individus. On conserve dans ce cas les propriétés de branchement (chaque individu se déplace et se reproduit de manière indépendante des précédents). Le rôle du milieu intervient en fait au travers de la fonctionnelle dA_t qui gouverne le branchement. Pour un branchement homogène, on a $dA_t = dt$. Pour un branchement hétérogène, on peut regarder une catalyse aléatoire (branchement aléatoire en milieux aléatoires) ou une catalyse déterministe mais non homogène. Dans ce cas l'ensemble de catalyse peut être réduit à un ensemble petit (de mesure de Lebesgue nul par exemple).

Dans le deuxième cas, les particules interagissent entre elles, et modifient ainsi leurs déplacements et le branchement.

Il existe ensuite de nombreuses variantes au sein de ces modèles concernant les interactions entre deux superprocessus (voir par exemple les articles [95, 35, 61, 32, 16, 17]).

Nous renvoyons à l'article de Dawson et Perkins [36] (1999) et à l'article de Dawson et Fleischmann [29] (2000) qui présentent des résultats récents concernant les superprocessus avec interaction ou avec catalyse ainsi qu'au cours de Perkins à Saint-Flour en 1999 [105].

5.1 Catalyse déterministe (voir [37])

Les modèles de catalyse déterministe sont des cas particuliers de superprocessus où la fonctionnelle additive dA_t est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue dt. Les superprocessus avec des fonctionnelles additives générales ont été introduits par Dynkin [53]. Dawson et Fleischmann [24, 25] (voir aussi les articles écrits par divers auteurs [64, 57, 30, 33, 26, 31]), puis Fleischmann et Le Gall [66] considèrent le cas où le branchement à lieu en un seul point y_0. Le processus sous-jacent est le mouvement brownien en dimension $d = 1$. En particulier, un nouveau phénomène apparaît : le superprocessus possède une densité, $x(y, t)$, par rapport à la mesure de Lebesgue (voir aussi les résultats de Zhao [122] concernant un mécanisme de branchement non singulier, mais localisé dans l'espace). De plus, en dehors de l'ensemble de catalyse, cette densité est très régulière. Elle est même solution de l'équation de la chaleur parabolique :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}^2 y} \quad \text{sur }]0, +\infty[\times\mathbb{R}\backslash\{y_0\}.$$

Les conditions à la frontière $]0, \infty[\times\{y_0\}$ (en distinguant $y < y_0$ et $y > y_0$) sont en revanche aléatoires. Ce résultat est très différent de celui obtenu par Konno et Shiga [75], concernant l'existence et la régularité de la densité du super mouvement brownien en dimension 1 (dans cet article, le branchement est homogène $dA_t = dt$).

Dans [37], nous construisons comme limite d'un système de particules avec branchement, un super mouvement brownien, X, avec processus sous-jacent, un mouvement brownien $B = (B_t, t \geq 0)$ dans $\mathbb{R}^d$, un branchement quadratique $\psi(u) = u^2$ et une fonctionnelle additive générale dA_t de B, déterminée par sa mesure de Revuz ν. (Dans le cas particulier de la catalyse réduite à un point, ν est un multiple de la masse de Dirac en y_0 et la fonctionnelle dA_t considérée dans [24, 25, 66] est le temps local du mouvement brownien en y_0.) L'ensemble de catalyse est le support fermé D de la mesure de ν. Ainsi aucun phénomène de branchement n'a lieu en dehors de l'ensemble de catalyse.

Nous démontrons sous des hypothèses peu restrictives, l'existence du temps local de collision (introduit par Barlow, Evans et Perkins [10] pour deux super mouvements browniens), entre le super mouvement brownien X et la mesure de Revuz, μ, du temps local (au sens de Maisonneuve [90]) de B sur D. Intuitivement, ce temps local de collision, Γ, est défini par

$$\Gamma(dt, dy) = \lim_{\varepsilon \to 0} dt \int_{y,z \in \mathbb{R}^d} X_t(dy)\ p_\varepsilon(y,z)\ \mu(dz),$$

où $p_r(y,z)$ est la densité de transition de B à l'instant r. Remarquons la mesure Γ est supportée par $]0,\infty[\times D$. On peut alors donner une formule de représentation hors de l'ensemble de catalyse du superprocessus $X_t(dy)$, issu de $X_0 = \eta$, qui s'interprète de la manière suivante dans la vision “système de particules avec branchement” :

– Contribution des particules qui n'ont pas encore atteint l'ensemble de catalyse D :

$$dy \int q_t(z,y)\ \eta(dz),$$

  où q_t est la densité du noyau de transition du mouvement brownien tué lorsqu'il atteint D . Rappelons que la fonction q est solution de l'équation de la chaleur parabolique dans D^c.

– Les particules qui ont atteint l'ensemble de catalyse sont soumises à un phénomène de branchement immédiat. De nouvelles particules sont émises hors de l'ensemble de catalyse suivant l'intensité $\Gamma(dr,dz)$. La loi de leur trajectoire est donnée par la mesure des excursions hors de D. La loi de la position de l'excursion issue de $z \in \partial D$, à l'instant 0, possède une densité en tout point $y \in \partial D$: $h_t(z,y)$. De plus cette fonction est solution de l'équation de la chaleur parabolique dans D^c. La contribution de ces particules à $X_t(dy)$, pour $y \in D^c$ est donc

$$dy \int_{z \in D, r \in]0,t[} h_{t-r}(z,y)\Gamma(dr,dz).$$

On obtient ainsi que pour $y \in D^c$, $t > 0$,

$$X_t(dy) = dy \left[\int q_t(z,y)\ \eta(dz) + \int_{z \in D, r \in]0,t[} h_{t-r}(z,y)\Gamma(dr,dz) \right]. \tag{10}$$

La mesure X_t possède sur D^c une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. De plus, nous vérifions que cette densité est solution de l'équation de la chaleur en dehors de D. Bien sûr les conditions à la frontière $]0,\infty[\times\partial D$ de cette équation sont aléatoires.

La régularité du super mouvement brownien en dehors de l'ensemble de catalyse reste vraie même quand la catalyse est aléatoire (voir les travaux de Fleischmann et Klenke [65]).

La formule de représentation (10) semble un bon outil pour reconstruire les super mouvements browniens avec catalyse. Pour cela, on peut étudier plus en détail la loi de la mesure aléatoire Γ. Dans l'article [66], où l'ensemble de catalyse est réduit à un point y_0, les auteurs démontrent la décomposition de la mesure Γ : $\Gamma(dt,dy) = \lambda(dt)\delta_{y_0}(dy)$, et ils expriment la loi de $\lambda(dt)$ comme la loi de la mesure d'occupation $\int_0^\infty dr\ Z_r(dt)$ d'un superprocessus usuel (branchement quadratique $\phi(u) = u^2$ et fonctionnelle additive $A_t = t$) dont le processus sous-jacent est ($T_t = \inf\{s \geq 0; A_s \geq t\}, t \geq 0$), l'inverse du temps local en y_0 du mouvement brownien. Cette approche peut-être généralisée aux cas traités dans [37] où la mesure de Revuz du temps local de B sur D (au sens de [90]) possède une densité, g, par rapport à la mesure de Revuz de A. (il s'agit de travaux en cours de réalisation de Mörters et Vogt). Entre autre, on peut exprimer le temps local de collision Γ comme la mesure d'occupation $\int_0^\infty dr\ g(y) Z_r(dt, dy)$ d'un superprocessus dont le processus sous-jacent est $((B_{T_t}, T_t), t \geq 0)$, où T_t est l'inverse de la fonctionnelle additive A. Cette expression est un point crucial pour la représentation probabiliste des solutions positives de l'équation dans un ouvert régulier D :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{dans } D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + u^2 = 0 \quad \text{sur } F_1, \\ u = \varphi \quad \text{sur } F_2, \end{cases}$$

où F_1 et F_2 sont deux ouverts relatifs de la frontière de D. La solution (si elle existe) correspond à la log-Laplace de (X_D, φ), où la mesure X_D se décompose sous $\mathbb{P}_\eta^X$ comme suit :

- Contribution des particules qui n'ont pas atteint l'ensemble de catalyse F_1 :

$$\int q(z, dy)\ \eta(dz),$$

  où $q(z, dy)$ est la loi du point d'atteinte de F_2 pour le mouvement brownien issu de z tué lors qu'il atteint F_1 .
- Contribution des particules émises hors de l'ensemble de catalyse suivant l'intensité $\int_0^\infty dr\ g(z) Z_r(dt, dz)$, dont la loi des trajectoires est donnée par la mesure des excursions hors de F_1. On note $h(z, dy)$ la loi du point d'atteinte de F_2 pour l'excursion issue de z tuée lors qu'elle atteint F_1. La contribution de ces particules à $X_D(dy)$, pour $y \in D^c$ est donc

$$\int_{z \in D, r>0, t>0} h(z, dy) g(z)\ dr Z_r(dt, dz).$$

Il est naturel de penser que

$$X_D(dy) = \int_{z \in D, r>0, t>0} h(z, dy) g(z)\ dr Z_r(dt, dz) + \int q(z, dy)\ \eta(dz).$$

Cette question fait partie d'un travail en cours, en collaboration avec Vogt (voir [45]).

5.2 Catalyse aléatoire (voir [44])

L'étude du super mouvement brownien avec catalyse, X, et dont la catalyse est elle même un super mouvement brownien, ρ, est un des premiers modèles de superprocessus avec interaction. Cette interaction est toutefois unilatérale. La catalyse ρ influence le super mouvement brownien X. En revanche le processus X n'a aucune influence sur le processus ρ. L'étude de tels processus a été initiée par Dawson et Fleischmann en 1997 [27, 23, 28, 29]. Elle a donné lieu à une vaste littérature, et ce domaine de recherche est encore très actif (voir par exemple les travaux récents [68, 31]). Rappelons que si la dimension de l'espace est supérieure à 3, alors la mesure X est dégénérée. Elle correspond au flux déterministe de la chaleur.

Dans [44], nous étudions le temps local de collision entre la catalyse ρ et le super mouvement brownien avec catalyse X. Cette étude s'inscrit dans la suite de l'article [37], où je démontre également l'existence du temps local de collision entre le super mouvement brownien et la catalyse, en l'occurrence la mesure de Revuz de la fonctionnelle additive dA_t. En utilisant un calcul de moments, on montre l'existence du temps local de collision défini par

$$L(dt, dy) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} dt\ \rho_t(dy) \int X_t(dz) p_\varepsilon(z, y),$$

où $p_\varepsilon(z, y)$ est la densité du noyau de transition du mouvement brownien à l'instant $\varepsilon > 0$.

Tout comme dans [37], le temps local de collision permet de décrire la mesure de covariance de la mesure martingale associée à X.

En dimension $d = 2$, on peut établir plus de propriétés concernant L. Ainsi, il apparaît un phénomène ergodique : la convergence en loi de $\frac{1}{T} L([0, T], dy)$ vers la mesure de Lebesgue multipliée par une variable aléatoire. On peut, de plus, démontrer la décomposition de la mesure $L(dt, dy)$ par rapport à la mesure de Lebesgue en temps dt, l'absolue continuité de $L([s, t], dy)$ par rapport à la mesure de Lebesgue en espace dy, ... Ces résultats sont à rapprocher de ceux de Barlow, Evans et Perkins [10] concernant le temps local de collision entre deux super mouvements browniens indépendants, et plus récemment les travaux de Mytnik [94] concernant des superprocessus plus généraux. On peut également consulter les travaux de Rosen [108] sur les temps locaux de collision du superprocessus avec lui-même (voir aussi Serlet [110]).

5.3 Interaction entre particules (voir [43])

Dès que dans le modèle décrit au paragraphe 1.1, les particules (ou individus) interagissent entre elles, le problème devient plus délicat.

Utilisant un calcul stochastique sur le superprocessus historique, Perkins [101] introduit en 1992 (voir aussi [104, 99]), comme solution unique d'un problème de martingale, les superprocessus avec interaction entre les particules.

On considère comme point de départ un serpent brownien $(W_s, s \in [0, \tau_1])$ issu de $x \in \mathbb{R}^d$, où τ_1 est le premier instant où le temps local en 0 atteint la valeur 1. On rappelle que la mesure X_t sur $\mathbb{R}^d$ définie par : pour toute fonction φ mesurable, bornée,

$$(X_t, \varphi) = \int_0^{\tau_1} \varphi(\hat{W}_s) dL_s^t, \tag{11}$$

où L_s^t est le temps local au niveau t à l'instant s du temps de vie, a même loi qu'un super mouvement brownien sous $\mathbb{P}_{\delta_x}^X$. L'idée, décrite ici de manière schématique et réductrice, de Perkins consiste à transformer les trajectoires "brownienne" $(W_s(t), t \in [0, \zeta_s])$ en diffusions $(W_s'(t), t \in [0, \zeta_s])$, solution d'équation différentielle stochastique :

$$d_t W_s'(t) = \sigma_t d_t W_s(t) + b_t dt.$$

Les coefficients σ_t et b_t sont des fonctions du "passé" du serpent $(W_s(t'), s \in [0, \tau_1], t' \in [0, t \wedge \zeta_s])$. Ensuite, on compte chaque particule avec un poids non uniforme, en définissant la mesure Y_t par : pour toute fonction φ mesurable, bornée,

$$(Y_t, \varphi) = \int_0^{\tau_1} \varphi(\hat{W}_s') g_t(s)\ dL_s^t,$$

où $g_t(s)$ est une fonction du passé du serpent qui décrit le poids de chaque trajectoire W_s. En particulier, les fonctions σ_t, b_t et g_t peuvent dépendre de la mesure Y_t elle même. Cela permet ainsi de modéliser l'interaction spatiale des particules. Sous de bonnes hypothèses sur les fonctions σ_t, b_t et g_t, Perkins montre l'existence d'un tel superprocessus $(Y_t, t \geq 0)$, et le caractérise comme l'unique solution d'un problème de martingale.

Remarquons que dans cette démarche, on transforme le serpent brownien sans modifier la structure du branchement décrite par le processus des temps de vie.

Dhersin et Serlet [50] (voir aussi Watanabe [121]) proposent au contraire de modifier l'évolution (suivant la variable s) du processus des temps de vie ζ_s en fonction par exemple de la trajectoire W_s. À l'aide d'un changement de temps sur la trajectoire W_s, ils reconstruisent un super mouvement brownien dont la fonctionnelle de branchement est de la forme $dA_t = c(B_t)dt$, où $(B_s, s \geq 0)$ est le mouvement brownien sous-jacent. Dans cette approche, les auteurs modifient la structure du branchement décrite par le processus des temps de vie. En particulier, le superprocessus obtenu $(Z_t, t \geq 0)$ est toujours décrit par une formule du type (11), mais L^t ne désigne plus le temps local du temps de vie au niveau t, mais le temps local du processus de temps de vie sur l'ensemble $\{s; \zeta_s = \phi_t(s)\}$. La quantité $\phi_t(s)$ s'interprète comme un temps de sortie associé à la trajectoire W_s. On peut donc voir Z_t, comme une mesure de sortie. Ceci est à rapprocher des méthodes de subordination développées par Bertoin, Le Gall et Le Jan [13], où l'on transforme un serpent brownien afin d'obtenir un super mouvement brownien avec un mécanisme de branchement différent.

Dans [43], en collaboration avec Dhersin, nous essayons de combiner ces deux approches. Plus précisément, nous considérons un serpent brownien usuel $(W_s, s \geq 0)$ issu de x, de processus de temps de vie $\zeta = (\zeta_s, s \in [0, \tau_1])$, où τ_1 est le premier instant où le temps local de ζ en 0 atteint le niveau 1. Notre but est de construire une famille de courbes aléatoires $\phi = (\phi_t, t \geq 0)$, et de remplacer le temps local au niveau t dans (11) par le temps local le long de la courbe $\phi_t = (\phi_t(s), s \in [0, \tau_1])$. Par cette procédure, nous changeons ainsi la structure de branchement associée au temps de vie. En parallèle, nous désirons également remplacer les trajectoires sous-jacentes, W_s, du serpent brownien par des diffusions construites à partir de W_s. On note X_t^ϕ le superprocessus obtenu ainsi à l'instant t. En fait nous considérons une version discrète des équations suivantes :

- Transformation de la trajectoire W_s par une équation différentielle stochastique et changement de temps ϕ :

$$d_t\tilde{W}_s(t) = \sigma(X_t^\phi, \tilde{W}_s(t))d_tW_s(\phi_t(s)) + b(X_t^\phi, \tilde{W}_s(t))d_t\phi_t(s).$$

- Équation différentielle pour le changement de temps :

$$d_t\phi_t(s) = \theta(X_t^\phi, \tilde{W}_s(t))dt \quad (\text{pour } \phi_t(s) \leq \zeta_s).$$

- Définition de la mesure aléatoire X_t^ϕ : pour toute fonction φ mesurable, bornée,

$$(X_t^\phi, \varphi) = \int_0^{\tau_1} \varphi(\hat{\tilde{W}}_s)dL_s^{\phi_t},$$

  où $L_s^{\phi_t}$ est le temps local du processus de temps de vie ζ, le long de la courbe ϕ_t. Et $\hat{\tilde{W}}_s$ désigne le point terminal de la trajectoire $\tilde{W}_s$.

Comme X_t^ϕ intervient dans la définition de la courbe ϕ_t, il est clair que la valeur $\phi_t(s)$ dépend du serpent brownien avant l'instant s mais aussi du serpent brownien après l'instant s. À cause des interactions, la courbe ϕ_t, n'est pas adaptée à la filtration habituelle $\sigma(W_r, r \le s)$ du serpent brownien. Cela diffère très nettement des travaux consacrés jusqu'à présent aux serpent brownien.

Dans [43], en supposant que les fonctions $\sigma(\mu,x), b(\mu,x)$ et $\theta(\mu,x)$ définies sur $(\mu,x) \in \mathcal{M}_f \times \mathbb{R}^d$ sont continues et bornées, nous démontrons que la suite de mesures $(X^{\phi,\varepsilon}, \varepsilon \ge 0)$, obtenue pour un schéma de discrétisation de pas ε des équations ci-dessus, est tendue. De plus, tous points limites de cette suite, $X^\phi = (X_t^\phi, t \ge 0)$ est solution du problème de martingale suivant : pour toute fonction bornée de classe C^2 et aux dérivées bornées, φ, on a $X_0^\phi = \delta_x$, et

$$(X_t^\phi, \varphi) = (X_0^\phi, \varphi) + \int_0^t (X_s^\phi, \theta(X_s^\phi) A(X_s^\phi)\varphi)\, ds + M(\varphi)_t,$$

où $A(\mu,\cdot)$ est le générateur infinitésimal de la diffusion avec dérive $b(\mu,\cdot)$ et coefficient de diffusion $\sigma(\mu,\cdot)$, et où $M(\varphi)$ est une martingale continue de variation quadratique

$$\langle M(\varphi)\rangle_t = \int_0^t (X_s^\phi, \theta(X_s^\phi)\varphi^2)\, ds.$$

De plus X^ϕ possède une version continue.

Sauf dans des cas pathologiques, qui reviennent à supprimer l'interaction entre les particules, nous n'avons pas démontré l'unicité des solutions au problème de martingale ci-dessus (voir [104] pour des questions similaires).

Signalons, que ce procédé de transformation sur le serpent brownien peut également s'appliquer à des processus de fragmentation. Il pourrait permettre de généraliser les travaux de Bertoin [11].

6 Conclusion

Comme nous l'avons déjà souligné dans l'introduction, les superprocessus et plus particulièrement le super mouvement brownien, sont des objets naturels qui apparaissent dans de nombreux phénomènes limites (physique, combinatoire, biologie,...). De plus leurs liens avec les équations aux dérivées partielles permettent d'étudier ces dernières avec un regard différent de celui de la communauté des analystes. Ces deux thèmes, objets limites naturels et liens avec les équations aux dérivées partielles, sont à la source de la popularité des superprocessus.

Notre contribution concerne trois thèmes majeurs de l'étude des superprocessus : propriétés trajectorielles, lien entre EDP et superprocessus, et enfin superprocessus avec interaction. Comme nous l'avons souligné dans les paragraphes précédents, ces thèmes sont toujours l'objet d'une recherche active.

7 Travaux

7.1 Articles soumis ou publiés

- R. ABRAHAM and J.-F. DELMAS. Solutions of $\Delta u = 4u^2$ with Neumann's condition using the Brownian snake. *soumis*, 2002.
- R. ABRAHAM and J.-F. DELMAS. Some properties of the exit measure of super Brownian motion. *Probab. Th. Rel. Fields*, 122(1) :71–107, 2002.
- J.-F. DELMAS. Super-mouvement brownien avec catalyse. *Stoch. and Stoch. Rep.*, 58(3-4) :303–347, 1996.
- J.-F. DELMAS. Path properties of superprocesses with a general branching mechanism. *Ann. Probab.*, 27(3) :1099–1134, 1999.
- J.-F. DELMAS. Some properties of the range of super-Brownian motion. *Probab. Th. Rel. Fields*, 114(4) :505–547, 1999.
- J.-F. DELMAS. Computation of moments for the length of the one dimensional ISE support. *soumis*, 2002.
- J.-F. DELMAS and J.-S. DHERSIN. Characterization of G-regularity for super-Brownian motion and consequences for parabolic partial differential equations. *Ann. Probab.*, 27(2) :731–750, 1999.
- J.-F. DELMAS and J.-S. DHERSIN. Kolmogorov's test for the Brownian snake. *Ann. Probab.*, 29(1) :305–316, 2001.
- J.-F. DELMAS and J.-S. DHERSIN. Super Brownian motion with interaction. *accepté à Stoch. Proc. and Appl.*, 2002.
- J.-F. DELMAS and K. FLEISCMANN. On the hot spots of a catalytic super-Brownian motion. *Probab. Th. Rel. Fields*, 121(3) :389–421, 2001.

7.2 Travaux en cours

- J.-F. DELMAS and P. VOGT. Non linear Neumann's condition for the heat equation : a probabilistic representation using catalytic super-brownian motion.

Références

[1] R. ABRAHAM. On the connected components of super-Brownian motion and of its exit measure. *Stoch. Process. and Appl.*, 60 :227–245, 1995.

[2] R. ABRAHAM. Reflecting Brownian snake and a Neumann-Dirichlet problem. *Stoch. Process. and Appl.*, 89 :239–260, 2000.

[3] R. ABRAHAM and J.-F. DELMAS. Solutions of $\Delta u = 4u^2$ with Neumann's condition using the Brownian snake. *soumis*, 2002.

[4] R. ABRAHAM and J.-F. DELMAS. Some properties of the exit measure of super Brownian motion. *Probab. Th. Rel. Fields*, 122(1) :71–107, 2002.

[5] R. ABRAHAM and J.-F. LE GALL. Sur la mesure de sortie du super mouvement brownien. *Probab. Th. Rel. Fields*, 99 :251–275, 1994.

[6] R. ABRAHAM and L. SERLET. Poisson snake and fragmentation. *Preprint*, 2002.

[7] D. ALDOUS. Tree based models for random distribution of mass. *J. Statist. Phys.*, 73(3-4) :625–641, 1993.

[8] D. ALDOUS and J. PITMAN. The standard additive coalescent. *Ann. Probab.*, 26(4) :1703–1726, 1998.

[9] P. BARAS and M. PIERRE. Problèmes paraboliques semi-linéaires avec données mesures. *Appl. Ann.*, 18 :111–149, 1984.

[10] M. T. BARLOW, S. N. EVANS, and E. A. PERKINS. Collision local times and measure-valued process. *Canad. J. of Math.*, 43(5) :897–938, 1991.

[11] J. BERTOIN. Self-similar fragmentations. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 38(3) :319–340, 2000.

[12] J. BERTOIN and J.-F. LE GALL. The Bolthausen-Sznitman coalescent and the genealogy of continuous-state branching processes. *Probab. Th. Rel. Fields*, 117(2) :249–266, 2000.

[13] J. BERTOIN, J.-F. LE GALL, and Y. LE JAN. Spatial branching processes and subordination. *Canad. J. of Math.*, 49(1) :24–54, 1997.

[14] M. BRAMSON, T. COX, and J.-F. LE GALL. Super-Brownian limits of voter model clusters. *preprint*, 2001.

[15] G. A. BROSAMLER. A probabilistic solution of the Neumann problem. *Math. Scand.*, 38 :137–147, 1976.

[16] K. BURDZY and J.-F. LE GALL. Super-Brownian motion with reflecting historical paths. *Probab. Th. Rel. Fields*, 121(4) :447–491, 2001.

[17] K. BURDZY and L. MYTNIK. Super-Brownian motion with reflecting historical paths II, convergence of approximations. *Preprint*, 2002.

[18] P. CHASSAING and G. SCAHEFFER. Random planar lattices and Integrated Super-Brownian Excursion. In *Proceedings of Mathematics and Computer Science*, 2002.

[19] T. COX, R. DURRETT, and E. A. PERKINS. Rescaled particle systems converging to super-Brownian motion. In M. Bramson, editor, *Perplexing problems in probability. Festschrift in honor of Harry Kesten*, Prog. Probab., pages 269–284. Birkhäuser, 1999.

[20] T. COX, R. DURRETT, and E. A. PERKINS. Rescaled voter models converge to super-Brownian motion. *Ann. Probab.*, 28 :185–234, 2000.

[21] D. A. DAWSON. Stochastic evolution equations and related measure processes. *J. multivariate Analysis*, 5 :1–52, 1975.

[22] D. A. DAWSON. Measure-valued markov processes. In *École d'été de probabilité de Saint-Flour 1991*, volume 1541 of *Lect. Notes Math.*, pages 1–260. Springer Verlag, Berlin, 1993.

[23] D. A. DAWSON and K. FLEISCHMANN. Critical branching in a highly fluctuating random medium. *Probab. Th. Rel. Fields*, 90 :241–274, 1991.

[24] D. A. DAWSON and K. FLEISCHMANN. Diffusion and reaction caused by point catalysts. *SIAM J. Appl. Math.*, 52(1) :163–180, 1992.

[25] D. A. DAWSON and K. FLEISCHMANN. A super-Brownian motion with a single point catalyst. *Stoch. Process. and Appl.*, 49 :3–40, 1994.

[26] D. A. DAWSON and K. FLEISCHMANN. Super-Brownian motion in higher dimensions with absolutely continuous measure states. *J. Theor. Probab.*, 8(1) :179–206, 1995.

[27] D. A. DAWSON and K. FLEISCHMANN. A continuous super-Brownian motion in a super-Brownian medium. *J. Theor. Probab.*, 10(1) :213–276, 1997.

[28] D. A. DAWSON and K. FLEISCHMANN. Longtime behavior of a branching process controlled by branching catalysts. *Stoch. Process. and Appl.*, 71(2) :241–257, 1997.

[29] D. A. DAWSON and K. FLEISCHMANN. Catalytic and mutually catalytic branching. In *Infinite Dimensional Stochastic Analysis*, pages 145–170, Amsterdam, 2000. Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences.

[30] D. A. DAWSON, K. FLEISCHMANN, Y. LI, and C. MUELLER. Singularity of super-Brownian local time at a point catalyst. *Ann. Probab.*, 23(1) :37–55, 1995.

[31] D. A. DAWSON, K. FLEISCHMANN, and C. MUELLER. Finite time extinction of superprocesses with catalysts. *Ann. Probab.*, 28(2) :603–642, 2000.

[32] D. A. DAWSON, K. FLEISCHMANN, L. MYTNIK, E. A. PERKINS, and J. XIONG. Mutually catalytic branching in the plane : uniqueness. *Preprint WIAS*, 641, 2001.

[33] D. A. DAWSON, K. FLEISCHMANN, and S. ROELLY. Absolute continuity of the measure states in a branching model with catalysts. In *Seminar on Stoch. Process 1990*, volume 24 of *Progr. Probab.*, pages 117–160. Birkhäuser, Boston, 1991.

[34] D. A. DAWSON, I. ISCOE, and E. A. PERKINS. Super-Brownian motion : path properties and hitting probabilites. *Probab. Th. Rel. Fields*, 83 :135–205, 1989.

[35] D. A. DAWSON and E. A. PERKINS. Long-time behavior and coexistence in a mutually catalytic branching model. *Ann. Probab.*, 26(3) :1088–1138, 1998.

[36] D. A. DAWSON and E. A. PERKINS. Measure-valued processes and renormalization of branching particle systems. In R. A. Carmona, editor, *Stochastic partial differential equations : six perspectives*, volume 64, pages 45–106. AMS, 1999.

[37] J.-F. DELMAS. Super-mouvement brownien avec catalyse. *Stoch. and Stoch. Rep.*, 58(3-4) :303–347, 1996.

[38] J.-F. DELMAS. Path properties of superprocesses with a general branching mechanism. *Ann. Probab.*, 27(3) :1099–1134, 1999.

[39] J.-F. DELMAS. Some properties of the range of super-Brownian motion. *Probab. Th. Rel. Fields*, 114(4) :505–547, 1999.

[40] J.-F. DELMAS. Computation of moments for the length of the one dimensional ISE support. *soumis*, 2002.

[41] J.-F. DELMAS and J.-S. DHERSIN. Characterization of G-regularity for super-Brownian motion and consequences for parabolic partial differential equations. *Ann. Probab.*, 27(2) :731–750, 1999.

[42] J.-F. DELMAS and J.-S. DHERSIN. Kolmogorov's test for the Brownian snake. *Ann. Probab.*, 29(1) :305–316, 2001.

[43] J.-F. DELMAS and J.-S. DHERSIN. Super Brownian motion with interactions. *soumis*, 2002.

[44] J.-F. DELMAS and K. FLEISCMANN. On the hot spots of a catalytic super-Brownian motion. *Probab. Th. Rel. Fields*, 121(3) :389–421, 2001.

[45] J.-F. DELMAS and P. VOGT. Non linear Neumann's condition for the heat equation : a probabilistic representation using catalytic super-Brownian motion. *work in progress*, 2002.

[46] E. DERBEZ and G. SLADE. Lattice trees and super-Brownian motion. *Canad. Math. Bull.*, 40(1) :19–38, 1997.

[47] E. DERBEZ and G. SLADE. The scaling limit of lattice trees in high dimension. *Comm. Math. Phys*, 193 :69–104, 1998.

[48] J.-S. DHERSIN and J.-F. LE GALL. Wiener's test for super-Brownian motion and the Brownian snake. *Probab. Th. Rel. Fields*, 108(1) :103–129, 1997.

[49] J.-S. DHERSIN and J.-F. LE GALL. Kolmogorov's test for super-Brownian motion. *Ann. Probab.*, 26(3) :1041–1056, 1998.

[50] J.-S. DHERSIN and L. SERLET. A stochastic calculus approach for the Brownian snake. *Canad. J. of Math.*, 52(1) :92–118, 2000.

[51] T. DUQUESNE and J.-F. LE GALL. *Random trees, Lévy processes and spatial branching processes*, volume 281. Astérisque, 2002.

[52] R. DURRETT and E. A. PERKINS. Rescaled contact processes converge to super-Brownian motion in two or more dimensions. *Probab. Th. Rel. Fields*, 114(3) :309–399, 1999.

[53] E. DYNKIN. Branching particle systems and superprocesses. *Ann. Probab.*, 19 :1157–1194, 1991.

[54] E. DYNKIN. Superdiffusions and parabolic nonlinear differential equations. *Ann. Probab.*, 20 :942–962, 1992.

[55] E. DYNKIN. Superprocesses and partial differential equations. *Ann. Probab.*, 21 :1185–1262, 1993.

[56] E. DYNKIN. *An introduction to branching measure-valued processes*, volume 6 of *CRM Monograph series*. Amer. Math. Soc., Providence, 1994.

[57] E. DYNKIN. Branching with a single point catalyst. In *Stochastic analysis (Ithaca, NY, 1993)*, volume 57 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 423–425, 1995.

[58] E. DYNKIN. *Diffusions, superdiffusions and partial differential equations*, volume 50 of *Colloquium Publications*. American Mathematical Society, 2002.

[59] J. ENGLÄNDER. On the volume of the supercritical super-Brownian sausage conditioned on survival. *Stoch. Process. and Appl.*, 88(2) :225–243, 2000.

[60] A. M. ETHERIDGE. *An introduction to superprocesses*, volume 20 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, 2000.

[61] S. N. EVANS and E. A. PERKINS. Collision local times, historical stochastic calculus, and competing superprocesses. *Electron. J. Probab.*, 3(5) :120 pp, 1998. (electronic).

[62] W. FELLER. Diffusion processes in genetics. In *Proc. Berkeley Sympos. Math. Statist. Probability*, pages 227–246, 1951.

[63] K. FLEISCHMANN. Critical behavior of some measure-valued processes. *Math. Nachr.*, 135 :131–147, 1988.

[64] K. FLEISCHMANN. Critical branching caused by interaction with point catalysts. In *Probability theory and mathematical statistics*, volume I, pages 350–359, 1990.

[65] K. FLEISCHMANN and A. KLENKE. Smooth density field of catalytic super-Brownian motion. *Ann. Appl. Probab.*, 9(2) :298–318, 1999.

[66] K. FLEISCHMANN and J.-F. LE GALL. A new approach to the single point catalytic super-Brownian motion. *Probab. Th. Rel. Fields*, 102 :63–82, 1995.

[67] F. GALTON and H. W. WATSON. On the probability of the extinction of families. *J. Roy. Anthropol. Inst.*, 4 :138–144, 1874.

[68] A. GREVEN, A. KLENKE, and A. WAKOLBINGER. Interacting fisher-wright diffusions in a catalytic medium. *Probab. Th. Rel. Fields*, 120(1) :85–117, 2001.

[69] T. HARA and G. SLADE. The scaling limit of the incipient infinite cluster in high-dimensional percolation. I : Critical exponents. *J. Math. Phys.*, 39(5-6) :1075–1168, 2000.

[70] T. HARA and G. SLADE. The scaling limit of the incipient infinite cluster in high-dimensional percolation. II : Integrated Super-Brownian Excursion. *J. Math. Phys.*, 41(3) :1244–1293, 2000.

[71] K. ITÔ and H. P. McKean. *Diffusion processes and their sample paths*. Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[72] T. JEULIN. *Semi-martingales et grossissement d'une filtration*, volume 833 of *Lect. Notes Math.* Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1980.

[73] T. JEULIN. Sur la convergence absolue de certaines intégrales. In *Séminaires de probabilités XVI*, volume 920 of *Lect. Notes Math.*, pages 248–256. Springer Verlag, Berlin, 1982.

[74] M. JIRINA. Stochastic branching processes with continuous state space. *Czech. Math. J.*, 83(8) :292–312, 1958.

[75] N. KONNO and T. SHIGA. Stochastic partial differential equations for some measure-valued diffusions. *Probab. Th. Rel. Fields*, 1988.

[76] J. LAMPERTI. Continuous state branching process. *Bull. Am. Math. Soc.*, 73 :382–386, 1967.

[77] J.-F. LE GALL. Brownian excursions, trees and measure-valued branching processes. *Ann. Probab.*, 19(4) :1399–1439, 1991.

[78] J.-F. LE GALL. A class of path-valued Markov processes and its applications to superprocesses. *Probab. Th. Rel. Fields*, 95 :25–46, 1993.

[79] J.-F. LE GALL. Hitting probabilities and potential theory for the Brownian path-valued process. *Ann. Inst. Four.*, 44 :277–306, 1994.

[80] J.-F. LE GALL. A path-valued Markov process and its connections with partial differential equations. In *Proceedings in First European Congress of Mathematics*, volume II, pages 185–212. Birkhäuser, Boston, 1994.

[81] J.-F. LE GALL. The Brownian snake and solutions of $\Delta u = u^2$ in a domain. *Probab. Th. Rel. Fields*, 102 :393–432, 1995.

[82] J.-F. LE GALL. A probabilistic Poisson representation for positive solutions of $\Delta u = u^2$ in a planar domain. *Comm. Pure Appl. Math.*, 50(1) :69–103, 1997.

[83] J.-F. LE GALL. *Spatial branching processes, random snakes and partial differential equations*. Lectures in Mathematics, ETH Zürich. Birkhäuser, 1999.

[84] J.-F. LE GALL and Y. LE JAN. Branching processes in Lévy processes : Laplace functionals of snake and superprocesses. *Ann. Probab.*, 26 :1407–1432, 1998.

[85] J.-F. LE GALL and Y. LE JAN. Branching processes in Lévy processes : The exploration process. *Ann. Probab.*, 26 :213–252, 1998.

[86] J.-F. LE GALL and E. A. PERKINS. The exact Hausdorff measure of the support of two dimensional super-Brownian motion. *à paraitre*, 1994.

[87] J.-F. LE GALL, E. A. PERKINS, and S. J. TAYLOR. The packing measure of the support of super-Brownian motion. *Stoch. Process. and Appl.*, 59(1) :1–20, 1995.

[88] G. LEDUC. The complete characterization of a general class of superprocess. *Probab. Th. Rel. Fields*, 116 :317–358, 2000.

[89] V. LIMIC. A LIFO queue in heavy traffic. *Ann. Appl. Probab.*, 11 :301–332, 2001.

[90] B. MAISONNEUVE. Exit systems. *Ann. Probab.*, 3 :399–411, 1975.

[91] M. MARCUS and L. VÉRON. The boundary trace of positive solutions of semilinear elliptic equations : The subcritical case. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 144(3) :201–231, 1998.

[92] P. MÖRTERS. The average density of super-Brownian motion. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 37 :71–100, 2001.

[93] B. MSELATI. *Classification et représentation probabiliste des solutions positives de $\Delta u = u^2$ dans un domaine"*. PhD thesis, Université Paris VI, Juillet 2002.

[94] L. MYTNIK. Collision measure and collision local time for (α, d, β) superprocesses. *J. Theor. Probab.*, 11(3) :733–763, 1998.

[95] L. MYTNIK. Uniqueness for a mutually catalytic branching model. *Probab. Th. Rel. Fields*, 112(2) :245–253, 1998.

[96] L. MYTNIK and E. A. PERKINS. Regularity and irregularity of $(1+\beta)$-stable super Brownian motion. *to appear*, 2002.

[97] R. PEMANTLE and Y. PERES. Galton-Watson trees with the same mean have the same polar sets. *Ann. Probab.*, 23(3) :1102–1124, 1995.

[98] R. PEMANTLE, Y. PERES, and J. W. SHAPIRO. The trace of spatial Brownian motion is capacity-equivalent to the unit square. *Probab. Th. Rel. Fields*, 106(3) :379–400, 1996.

[99] Y. PERES. École d'été de St-Flour, 1997. In preparation.

[100] E. A. PERKINS. The Hausdorff measure of the closed support of super-Brownian motion. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 25(2) :205–224, 1989.

[101] E. A. PERKINS. Measure-valued branching-diffusions with spatial interactions. *Probab. Th. Rel. Fields*, 1992.

[102] E. A. PERKINS. The strong Markov property of the support of super-Brownian motion. In *The Dynkin Festschrift*, volume 34 of *Progr. Probab.*, pages 307–326, Boston, 1994. Birkhäuser.

[103] E. A. PERKINS. Measure-valued branching diffusions and interactions. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, pages 1036–1045. Birkhäuser, Basel, 1995.

[104] E. A. PERKINS. *On the martingale problem for interactive measure-valued branching diffusions*, volume 549. Mem. Am. Math. Soc., 1995.

[105] E. A. PERKINS. Dawson-Watanabe superprocesses and measure-valued diffusions. In *École d'été de probabilité de Saint-Flour 1999*, volume 1781 of *Lect. Notes Math.*, pages 125–329. Springer Verlag, 2002.

[106] E. A. PERKINS and S. J. TAYLOR. The multifractal structure of super-Brownian motion. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 1998.

[107] J. PITMAN and M. YOR. Some divergent integrals of Brownian motion. *Adv. Appl. Probab.*, Spec. Suppl. 1986 :109–116, 1986.

[108] J. ROSEN. Self-collisions of superprocesses : renormalization and limit theorems. *Stoch. Process. and Appl.*, 80(1) :25–53, 1999.

[109] J. ROSEN. Capacitary moduli for Lévy processes and intersections. *Stoch. Process. and Appl.*, 89 :269–285, 2000.

[110] L. SERLET. On the Hausdorff measure of multiple points and collision points of super-Brownian motion. *Stoch. and Stoch. Rep.*, 1995.

[111] L. SERLET. Some dimension results for super-Brownian motion. *Probab. Th. Rel. Fields*, 101(3) :371–391, 1995.

[112] Y.-C. SHEU. On states of exit measure for superdiffusions. *Ann. Probab.*, 24(1) :268–279, 1996.

[113] M. SILVERSTEIN. A new approach to local times. *J. Math. Mech.*, 17 :1023–1054, 1968.

[114] M. SILVERSTEIN. Continuous state branching semi-groups. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.*, 14 :96–112, 1969.

[115] G. SLADE. Scaling limits and super-Brownian motion. *Notices A.M.S.*, To appear.

[116] R. TRIBE. The connected components of the closed support of super-Brownian motion. *Probab. Th. Rel. Fields*, 89 :75–87, 1991.

[117] R. TRIBE. A representation for super-Brownian motion. *Stoch. Process. and Appl.*, 51 :207–219, 1994.

[118] R. van der HOFSTAD and G. SLADE. Convergence of critical oriented percolation to super-Brownian motion above 4+1 dimensions. *To appear*, 2002.

[119] L. VÉRON. *Singularities of solutions of second order quasilinear equations*. Number 353 in Pitman Research Notes in Mathematics Series. Longman, 1996.

[120] S. WATANABE. A limit theorem of branching and continous state branching processes. *J. Math. Kyoto Univ.*, 8(1) :141–167, 1968.

[121] S. WATANABE. Killing operations in super-diffusions by Brownian snakes. In *Trends in probability and related analysis (Taipei, 1998)*, pages 177–190, River Edge, 1999. World Sci. Publishing.

[122] X.-L. ZHAO. Some absolute continuities of superdiffusions and super-stable processes. *Stoch. Process. and Appl.*, 50 :21–35, 1994.

Résumé

Nous présentons des travaux sur l'étude des superprocessus. Ils abordent plusieurs thématiques. La première concerne les propriétés trajectorielles des super mouvements browniens avec branchement quadratique ou branchement α-stable. La deuxième se concentre sur les liens entre équations aux dérivées partielles non linéaires et super mouvement brownien. Plus particulièrement, on peut distinguer l'étude de la régularité des points pour le super mouvement brownien, et l'étude de formules de représentation des solutions d'EDP non-linéaires. Enfin la troisième thématique concerne les super processus avec interactions soit de type catalyse (interaction avec le milieu) soit de type interaction entre les particules.

Abstract

In this report, we present some works on superprocesses. They can be divided according to three different subjects. The first one deals with path properties of super Brownian motion with quadratic or α-stable branching mechanism. The second one involves the link between non linear partial differential equations and superprocess. In particular we study the regularity of points for the super Brownian motion. We also present some probabilistic representation formula for solutions to non linear partial differential equations. Eventually, the last topic concerns superprocess with interaction which can be of two type : interaction with the media, called catalytic interaction, or interaction between particles.