Jean-François DELMAS,
Benjamin JOURDAIN

Modèles aléatoires.

Applications aux sciences de l'ingénieur et du vivant.

Erratum

28 mars 2019

Springer
Berlin Heidelberg New York
Hong Kong London
Milan Paris Tokyo

Table des matières

1.6 Théorème central limite : p. 23-26

On peut dans certains cas préciser la vitesse de convergence dans le théorème ergodique. C'est l'objet de ce paragraphe.

On considère une chaîne de Markov sur E, $X = (X_n, n \geq 0)$, irréductible, récurrente positive, de matrice de transition P et de probabilité invariante π. Rappelons la notation introduite à la fin du paragraphe précédent : si g est une fonction définie sur E^2 soit positive, soit telle que $\sum_{y \in E} |g(x,y)|\, P(x,y) < \infty$, alors on note

$$Pg(x) = \sum_{y \in E} P(x,y) g(x,y).$$

Théorème 1.6.1. *Soit g une fonction définie sur E^2 à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $(\pi, P|g|) < \infty$ et il existe $x \in E$ avec $s(x)^2 = \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{T(x)} [g(X_{k-1}, X_k) - (\pi, Pg)]\Big)^2 \big| X_0 = x\Big]$ fini. On note $\sigma^2 = \pi(x)s(x)^2$. Pour toute loi initiale de X_0, on a*

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(X_{k-1}, X_k) - (\pi, Pg)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\textit{Loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Si on choisit g de la forme $g(x,y) = f(y)$, alors on a $(\pi, Pg) = (\pi, f)$ dès que f est positive ou $(\pi, |f|)$ est fini. Le corollaire suivant est une conséquence directe du théorème précédent.

Corollaire 1.6.2. *Si $(\pi, |f|) < \infty$ et s'il existe $x \in E$ tel que $s(x)^2 = \mathbb{E}[(\sum_{k=1}^{T(x)} [f(X_k) - (\pi, f)])^2 | X_0 = x] < \infty$, alors on a*

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) - (\pi, f)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\textit{Loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

où $\sigma^2 = s(x)^2 \pi(x)$.

Démonstration du théorème 1.6.1. On reprend les notations de la démonstration du théorème 1.5.6. On pose pour $n \geq 1$

$$G(Y_n) = \sum_{r=1}^{T_n} [g(X_{S_{n-1}+r-1}, X_{S_{n-1}+r}) - (\pi, Pg)].$$

Les variables aléatoires $(G(Y_n), n \geq 2)$ sont indépendantes, de même loi et de carré intégrable avec, pour $n \geq 2$, $\mathbb{E}[G(Y_n)^2] = s(x)^2$. La définition $\pi(x) = 1/\mu(x)$ et la deuxième égalité du lemme 1.5.12 impliquent que pour $n \geq 2$, $\mathbb{E}[G(Y_n)] = 0$. On déduit du théorème central limite que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=2}^{n} G(Y_k) \xrightarrow[n\to\infty]{\textbf{Loi}} \mathcal{N}(0, s(x)^2).$$

Toujours en utilisant la notation $n(m)$ définie dans (1.9), on a $S_{n(m)} \leq m < S_{n(m)+1}$, et

$$\sqrt{m}\left[\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} g(X_{i-1}, X_i) - (\pi, Pg)\right] = \frac{I_1(m)}{\sqrt{m}} + \frac{I_2(m)}{\sqrt{m}} + \frac{I_3(m)}{\sqrt{m}},$$

où, avec les conventions $a \wedge b = \min(a, b)$ et une somme indicée par un ensemble vide est nulle, on a posé

$$\begin{aligned}
I_1(m) &= \sum_{r=1}^{T_1 \wedge m} [g(X_{r-1}, X_r) - (\pi, Pg)],\\
I_2(m) &= \sum_{k=2}^{n(m)} G(Y_k),\\
I_3(m) &= \sum_{i=S_{n(m)}+1}^{m} [g(X_{i-1}, X_i) - (\pi, Pg)].
\end{aligned}$$

Comme p.s. T_1 est fini, on a que $\lim_{m\to\infty} I_1(m)$ est fini et donc p.s. $\lim_{m\to\infty} I_1(m)/\sqrt{m} = 0$.

Montrons que $(I_3(m)/\sqrt{m}, m \geq 1)$ converge en probabilité vers 0. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\xi_i = g(X_{i-1}, X_i) - (\pi, Pg)$ pour $i \geq 1$. On a

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(|I_3(m)|/\sqrt{m} > \varepsilon)\\
&\quad \le \mathbb{P}\left(\sum_{i=S_{n(m)}+1}^{m} |\xi_i| > \sqrt{m}\varepsilon\right)\\
&\quad = \sum_{r=1}^{m-1} \mathbb{P}\Big(\sum_{i=m-r+1}^{m} |\xi_i| > \sqrt{m}\varepsilon,\\
&\qquad\qquad X_{m-r} = x,\ X_{m-r+\ell} \neq x \quad \text{pour} \quad \ell \in \{1,\dots,r\}\Big)\\
&\quad = \sum_{r=1}^{m-1} \mathbb{P}(X_{m-r} = x)\mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{r} |\xi_i| > \sqrt{m}\varepsilon,\\
&\qquad\qquad X_\ell \neq x \quad \text{pour} \quad \ell \in \{1,\dots,r\} | X_0 = x\Big)\\
&\quad \le \sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{T_1} |\xi_i| > \sqrt{m}\varepsilon, T_1 > r | X_0 = x\right)\\
&\quad = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^{T_1} |\xi_i| > \sqrt{m}\varepsilon\}} \sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_1 > r\}} | X_0 = x\right]\\
&\quad \le \mathbb{E}\left[T_1 \mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^{T_1} |\xi_i| > \sqrt{m}\varepsilon\}} | X_0 = x\right],
\end{aligned}
$$

où l'on a utilisé la propriété de Markov pour la deuxième égalité. Remarquons que p.s. $\lim_{m\to\infty} T_1 \mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^{T_1} |\xi_i| > \sqrt{m}\varepsilon\}} = 0$, $T_1 \mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^{T_1} |\xi_i| > \sqrt{m}\varepsilon\}} \le T_1$ et $\mathbb{E}[T_1 | X_0 = x] < +\infty$. On déduit du théorème de convergence dominée que $\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\left[T_1 \mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^{T_1} |\xi_i| > \sqrt{m}\varepsilon\}} | X_0 = x\right] = 0$, et donc $(I_3(m)/\sqrt{m}, m \ge 1)$ converge en probabilité vers 0.

Comme $\lim_{m\to\infty} n(m)/m = \pi(x)$ p.s., d'après (1.10), on déduit de la proposition B.5 la convergence en loi de $(I_2(m)/\sqrt{m}, m \ge 1)$ vers une gaussienne $\mathcal{N}(0, s(x)^2\pi(x))$. On déduit du théorème de Slutsky A.3.12 que $(I_1(m) + I_2(m) + I_3(m))/\sqrt{m}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, s(x)^2\pi(x))$.

On a démontré ce résultat, pour toute loi initiale de X_0. □

Pour $y \in E$, on pose $s(y)^2 = \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{T(y)} [g(X_{k-1}, X_k) - (\pi, Pg)]\Big)^2 \big| X_0 = y\Big]$. On peut montrer que si $s(x)^2$ est fini alors $s(y)^2$ est fini pour tout $y \in E$ et que $\pi(x)s(x)^2 = \pi(y)s(y)^2$. En particulier la variance asymptotique σ^2 du théorème précédent ne dépend pas de x.

On peut expliciter la valeur de la variance asymptotique σ^2 dans le cas particulier, qui nous sera utile au chapitre 6, où $g(x,y) = h(x,y) - Ph(x)$. Remarquons que, si $(\pi, P|h|) < \infty$, alors on a $(\pi, Pg) = (\pi, Ph) - (\pi, P(Ph)) = 0$, car π est une probabilité invariante.

Comme $(P(x,y), y \in E)$ est une probabilité sur E, on déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$(Ph)^2(x) = \Big(\sum_{y \in E} P(x,y)h(x,y) \Big)^2 \leq \sum_{y \in E} P(x,y)h(x,y)^2 = Ph^2(x).$$

En particulier si $(\pi, Ph^2) < \infty$ alors $(\pi, (Ph)^2) < \infty$.

Proposition 1.6.3. *Soit h une fonction définie sur E^2 à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $(\pi, Ph^2) < \infty$. Pour toute loi initiale de X_0, on a*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} [h(X_{k-1}, X_k) - Ph(X_{k-1})] \xrightarrow[n\to\infty]{\textit{Loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

où $\sigma^2 = (\pi, Ph^2) - (\pi, (Ph)^2)$.

Remarque 1.6.4. Sous certaines hypothèses, on peut calculer explicitement la valeur de σ^2, grâce à la proposition précédente, dans le cas particulier du corollaire 1.6.2, où $g(x,y) = f(y)$.

Pour une fonction F, on définit $PF(x) = \sum_{z \in E} P(x,z)F(z)$ soit si F est positive soit si cette somme est absolument convergente. Remarquons que si $(\pi, |F|)$ est fini alors, comme π est une probabilité invariante, on a $(\pi, P|F|)$ fini. Ainsi $P|F|$, et donc PF, sont bien définis.

Soit f telle que $(\pi, |f|) < \infty$. On dit qu'une fonction F est solution de l'équation de Poisson pour f si : $(\pi, |F|) < \infty$ et pour tout $x \in E$,

$$F(x) - PF(x) = f(x) - (\pi, f).$$

Les solutions de l'équation de Poisson sont définies à une constante additive près.

Si l'on suppose qu'il existe une solution F de l'équation de Poisson pour f, telle que $(\pi, F^2) < \infty$, alors on peut appliquer la proposition 1.6.3 avec $h(x,y) = F(y)$ et en déduire que

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(X_k) - (\pi, f) \right) \xrightarrow[n\to\infty]{\textbf{Loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

où $\sigma^2 = (\pi, Ph^2) - (\pi, (Ph)^2) = (\pi, F^2) - (\pi, (PF)^2)$. En pratique on utilise le TCL pour donner un intervalle de confiance pour l'estimation de (π, f) par la simulation de $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(X_k)$. La variance σ^2, qui intervient dans l'intervalle de confiance, ne peut être directement estimée sur la simulation d'une seule réalisation car cela nécessite de résoudre l'équation de Poisson. Cette difficulté nous conduira à utiliser la proposition 1.6.3 plutôt que le résultat apparemment plus naturel du corollaire 1.6.2. $\Diamond$

11.1 Statistique d'ordre, estimation des quantiles : p. 310-311

Démonstration de la proposition 11.1.8. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On rappelle la notation $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i \leq x\}}$. On déduit de l'égalité (11.2) que

$$\left\{X_{(k(n),n)} \leq x \quad \text{à partir d'un certain rang}\right\} = \left\{\frac{S_n(x)}{k(n)} \geq 1 \quad \text{à partir d'un certain rang}\right\}.$$

La loi forte des grands nombres assure que $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(x)}{n} = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{X_i \leq x\}}\right] = F(x)$ presque sûrement. De plus on a $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{k(n)} = \frac{1}{p}$ et donc $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(x)}{k(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n(x)}{n} \frac{n}{k(n)} = \frac{F(x)}{p}$ presque sûrement. En particulier, on a si $F(x) > p$, *i.e.* si $x > x_p$:

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n(x)}{k(n)} \geq 1 \text{ à partir d'un certain rang}\right) = 1.$$

Cela implique donc que si $x > x_p$:

$$\mathbb{P}\left(X_{(k(n),n)} \leq x \quad \text{à partir d'un certain rang}\right) = 1.$$

Cela signifie que p.s. $\limsup_{n\to\infty} X_{(k(n),n)} \leq x_p$. En considérant l'évènement $\left\{X_{(k(n),n)} > x \quad \text{à partir d'un certain rang}\right\}$ et en utilisant des arguments similaires, on obtient que p.s. $\liminf_{n\to\infty} X_{(k(n),n)} \geq x_p$. On en déduit que p.s. $\lim_{n\to\infty} X_{(k(n),n)} = x_p$. □

13.1 Coquilles

page 42, ligne 17 : Soit $(z_n, n \geq 1)$ une suite positive
page 207, figure 7.3 : $Nx \to -2N(x\log(x) + (1-x)\log(1-x))$
page 307, ligne 16 : $(X_n, n \geq 1)$
page 309, ligne 14 : $(1 - F(y))^{n-k}$
page 309, ligne 15 : $\int_{-\infty}^{x}$
page 312, lignes 13, 14 et 15 : $O(n^{-3/2})$

B

Une variante du théorème central limite : p. 407 (compléments)

L'inégalité suivante est utile pour la prochaine proposition.

Lemme B.4 (Inégalité de Kolmogorov)**.** *Soit* $(X_k, k \in \{1, \ldots, , n\})$ *des variables aléatoires réelles indépendantes, de carré intégrable et centrées. On pose* $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$ *pour* $1 \leq k \leq n$*. Soit* $x > 0$*. On a*

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq x\right) \leq \frac{1}{x^2}\,\mathbb{E}[S_n^2].$$

Démonstration. On pose $A = \{\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq x\}$. On considère $A_1 = \{|S_1| \geq x\}$ et pour $k \in \{2, \ldots, n\}$, $A_k = \{|S_k| \geq x\} \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right)^c$. Remarquons que $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$ et que les ensembles $A_1, \ldots, A_n$ sont 2 à 2 disjoints. On en déduit que

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) \leq \sum_{k=1} \frac{1}{x^2}\,\mathbb{E}\left[S_k^2 \mathbf{1}_{A_k}\right].$$

Comme $S_k^2 \leq S_k^2 + (S_n - S_k)^2 = S_n^2 - 2S_k(S_n - S_k)$ et $\mathbb{E}\left[S_k(S_n - S_k)\mathbf{1}_{A_k}\right] = 0$, car $S_n - S_k$ est indépendant de $(X_1, \ldots, X_k)$ et $\mathbb{E}[S_n - S_k] = 0$ puisque les variables $X_{k+1}, \ldots, X_n$ sont centrées, on obtient que

$$\mathbb{P}(A) \leq \sum_{k=1} \frac{1}{x^2}\,\mathbb{E}\left[S_k^2 \mathbf{1}_{A_k}\right] \leq \sum_{k=1} \frac{1}{x^2}\,\mathbb{E}\left[S_n^2 \mathbf{1}_{A_k}\right] \leq \frac{1}{x^2}\,\mathbb{E}\left[S_n^2\right].$$

□

La proposition suivante permet de généraliser le TCL.

Proposition B.5. *Soit* $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$ *des variables aléatoires réelles, indépendantes, de même loi, de carré intégrable et telles que* $\mathbb{E}[X_1] = 0$*. Soit* $(\tau_n, n \in \mathbb{N}^*)$ *une suite de variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{N}^*$ *telle que* $(\tau_n/n, n \in \mathbb{N}^*)$

converge en probabilité vers une constance $c > 0$. *On pose* $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$. *La suite de variables aléatoires* $(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\tau_n} X_k, n \in \mathbb{N}^*)$ *converge en loi vers une variable aléatoire de loi gaussienne* $\mathcal{N}(0, c\sigma^2)$ *:*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\tau_n} X_k \quad \xrightarrow[n\to\infty]{\textbf{\textit{Loi}}} \mathcal{N}(0, c\sigma^2).$$

Démonstration. On note $[x]$ la partie entière de x, $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. On montre d'abord que $(S_{\tau_n} - S_{[cn]})/\sqrt{n}$ converge en probabilité vers 0 quand n tend vers l'infini.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\alpha > 0$. On a, en utilisant l'inégalité de Kolmogorov :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|S_{\tau_n} - S_{[cn]}|/\sqrt{n} > \varepsilon\right) &\leq \mathbb{P}(|\tau_n - [cn]| \geq \alpha n) \\
&\quad + \mathbb{P}\left(\max_{[cn]-\alpha n \leq k \leq [cn]+\alpha n} |S_k - S_{[cn]}| > \varepsilon\sqrt{n}\right) \\
&\leq \mathbb{P}(|\tau_n - [cn]| \geq \alpha n) + 2\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq \alpha n} |S_k| > \varepsilon\sqrt{n}\right) \\
&\leq \mathbb{P}(|\tau_n - [cn]| \geq \alpha n) + 2\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq \alpha n} |S_k| > \varepsilon\sqrt{n}\right) \\
&\leq \mathbb{P}(|\tau_n/n - [cn]/n| \geq \alpha) + 2\frac{\alpha\sigma^2}{\varepsilon^2}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|S_{\tau_n} - S_{[cn]}|/\sqrt{n} > \varepsilon\right) \leq 2\frac{\alpha\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Et comme α est arbitraire, la limite ci-dessus est donc nulle. Ceci assure bien que $(S_{\tau_n} - S_{[cn]})/\sqrt{n}$ converge en probabilité vers 0 quand n tend vers l'infini. On déduit du théorème de Slutsky A.3.12 que $S_{\tau_n}/\sqrt{n}$ et $S_{[cn]}/\sqrt{n}$ converge en loi vers la même limite. Le TCL assure que la limite de $S_{[cn]}/\sqrt{n}$ est la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, c\sigma^2)$. Ceci termine la démonstration de la proposition. □