# Espaces $L^p$

Dans tout ce chapitre on se place dans un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^d$. Tous les concepts présentés se généralisent sans difficulté à un borélien quelconque de $\mathbb{R}^d$.

## 1 Préliminaires

Soit $p$ un réel de $[1, +\infty[$.

**Définition 1.1.** (Espaces $\mathcal{L}^p(\Omega)$)
On définit l'espace vectoriel

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \{f \text{ mesurables sur } \Omega, \int_\Omega |f|^p < +\infty\}.$$

**Définition 1.2.** (Fonctions égales presque partout)
*Soient $f$ et $g$ deux fonctions mesurables. On dit que $f$ et $g$ sont égales presque partout si $\{x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x)\}$ est un ensemble négligeable.*

**Théorème 1.1.** (admis) *Soit $f$ une fonction de $\mathcal{L}^1(\Omega)$ telle que $\int_\Omega |f| = 0$. Alors $f$ est nulle presque partout sur $\Omega$.*

**Attention!** Mais on n'a pas forcément $f = 0$ partout!

## 2 Espace $L^1(\Omega)$

La relation "$f = g$ presque partout" est une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^1(\Omega)$. On peut donc considérer l'espace quotient, qui est l'ensemble des classes d'équivalence.

**Définition 2.1.** (Espace $L^1(\Omega)$ )
*L'espace vectoriel $L^1(\Omega)$ est le quotient de $\mathcal{L}^1(\Omega)$ par la relation d'équivalence "égalité presque partout dans $\Omega$".*

Autrement dit,

$$L^1(\Omega) = \left\{ f \text{ définie sur } \Omega \text{ à un ensemble négligeable près, telle que } \int_\Omega |f(x)|\,dx < +\infty \right\}.$$

"Se donner un élément de $L^1(\Omega)$, c'est se donner un ensemble de fonctions qui sont égales presque partout." La valeur de la fonction en un point n'a aucune signification. Si $f = g$ pp, alors on considèrera que c'est le même objet/élément dans $L^1(\Omega)$.

Pour $f \in L^1(\Omega)$, la quantité $\int_\Omega f(x)\,dx$ est bien définie. En effet, si $g$ est une autre fonction, et $f = g$ pp, alors $\int_\Omega f(x)\,dx = \int_\Omega g(x)\,dx$.

**Remarque:** On utilisera (abusivement) le terme de fonction pour désigner les éléments de $L^1(\Omega)$. On dira abusivement qu'une fonction $f$ est dans $L^1(\Omega)$ pour dire "la classe d'équivalence de $f$ pour la relation "égalité presque partout" est dans $L^1(\Omega)$".

**Théorème 2.1.** *Muni de la norme définie par*

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)|\,dx,$$

*l'espace vectoriel $L^1(\Omega)$ est un espace de Banach.*

**Remarque:** L'application $f \mapsto \int_\Omega |f(x)|\,dx$ est bien une norme:

- l'inégalité triangulaire est vraie
- $\|\lambda f\|_{L^1(\Omega)} = |\lambda| \|f\|_{L^1(\Omega)}$

- On a bien l'équivalence (cf le théorème précédent)

$$\int_\Omega |f(x)|\, dx = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \text{ presque partout.}$$

**Remarque:** C'est un des avantages à travailler avec Lebesgue plutôt que Riemann. On a ici un espace complet. Avec Riemann, on aurait pu faire la même construction de norme, mais l'espace résultant n'aurait pas été complet.

# 3 Espaces $L^p(\Omega)$ et $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$

On généralise ici les espaces précédemment présentés. Soit $p$ un réel, $p \geq 1$.

## 3.1 Espaces $L^p(\Omega)$

De même que pour $L^1(\Omega)$, on quotiente $\mathcal{L}^p(\Omega)$ par la relation d'équivalence "égalité presque partout".

**Définition 3.1.** (Espaces $L^p(\Omega)$ )
*L'espace vectoriel $L^p(\Omega)$ est le quotient de $\mathcal{L}^p(\Omega)$ par la relation d'équivalence "égalité presque partout dans $\Omega$".*

Autrement dit, on a

$$L^p(\Omega) = \left\{ f \text{ définie sur } \Omega \text{ à un ensemble négligeable près, telle que } \int_\Omega |f(x)|^p\, dx < +\infty \right\}.$$

**Théorème 3.1.** *Muni de la norme définie par*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_\Omega |f(x)|^p\, dx \right)^{1/p},$$

*l'espace vectoriel $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.*

**Théorème 3.2.** (Inégalité de Hölder, admis)
*Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 < p < +\infty$. Soit $q \in ]1, \infty[$ tel que $1/p + 1/q = 1$. Soit $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$. Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

**Remarque:** Pour $p = q = 2$, on l'appelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Théorème 3.3.** *On suppose $\Omega$ borné. Soit $q > p \geq 1$. Alors $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.*

**Preuve:** Comme $\Omega$ est borné dans $\mathbb{R}^d$, il existe $K > 0$ tel que $\Omega \subset [-K, K]^d$ et on a alors

$$\mu(\Omega) \leq \mu([-K, K]^d) = (2K)^d < +\infty.$$

Par ailleurs, soit $f \in L^q(\Omega)$. En notant $\alpha = \frac{q}{p} > 1$ et $\alpha^*$ tel que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^*} = 1$, on peut appliquer l'inégalité de Hölder de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(x)|^p\, dx &= \int_\Omega |f(x)|^p \times 1\, dx, \\
&\leq \||f|^p\|_{L^\alpha(\Omega)} \|1\|_{L^{\alpha^*}(\Omega)}, \\
&= \left( \int_\Omega |f(x)|^{p\alpha}\, dx \right)^{1/\alpha} \left( \int_\Omega 1^{\alpha^*}\, dx \right)^{1/\alpha^*}, \\
&= \|f\|^{q/\alpha}_{L^q(\Omega)} (\mu(\Omega))^{1/\alpha^*} < +\infty.
\end{aligned}$$

Ainsi, $f \in L^p(\Omega)$. CQFD

### 3.2 Espaces $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$

**Définition 3.2.** (Espaces $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ et espaces $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$)

*Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On dit que $f$ est localement intégrable sur $\Omega$ si, pour tout compact $K$ inclus dans $\Omega$, la fonction $f$ est intégrable sur $K$. On note*

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) = \{f \text{ mesurable sur } \Omega \text{ telle que } f \in L^1(K) \text{ pour tout compact } K \subset \Omega\},$$

*l'espace vectoriel des fonctions localement intégrables sur $\Omega$.*

*De même,*

$$L^p_{\text{loc}}(\Omega) = \{f \text{ mesurable sur } \Omega \text{ telle que } f \in L^p(K) \text{ pour tout compact } K \subset \Omega\},$$

**Remarque:** On a bien sûr $L^p(\Omega) \subset L^p_{\text{loc}}(\Omega)$.

**Exemple:** La fonction de Heaviside est $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ mais pas $L^1(\mathbb{R})$.

**Proposition 3.1.**

- *Soit $q > p \geq 1$. Alors $L^q_{\text{loc}}(\Omega) \subset L^p_{\text{loc}}(\Omega)$.*
- *Soit $p \geq 1$. Alors $L^p(\mathbb{R}^d) \subset L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.*

**Définition 3.3.** (Convergence dans $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$)

*Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ et $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$. On dit que $f_n$ converge vers $f$ dans $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ si, pour tout compact $K \subset \Omega$, la suite $f_n|_K$ converge vers $f|_K$ dans $L^p(K)$.*

## 4 Espace $L^\infty(\Omega)$

**Définition 4.1.** (Fonction essentiellement bornée)

*On dit qu'une fonction $f$ est essentiellement bornée sur $\Omega$ si il existe un réel positif $M$ tel que*

$$\mu\left(\{x \in \Omega \mid |f(x)| \geq M\}\right) = 0.$$

*On note $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions essentiellement bornées sur $\Omega$.*

**Remarque:** En dehors d'un ensemble de mesure nulle, on a $|f(x)| < M$.

**Exemple:** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

n'est pas bornée mais est essentiellement bornée ($\mathbb{Q}$ est négligeable dans $\mathbb{R}$).

Encore une fois, pour avoir un espace de Banach, on va devoir quotienter $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$.

**Définition 4.2.** (Espace $L^\infty(\Omega)$)

*L'espace vectoriel $L^\infty(\Omega)$ est le quotient de $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ par la relation d'équivalence "égalité presque partout".*

Autrement dit,

$$L^\infty(\Omega) = \{f \text{ définie sur } \Omega \text{ à un ensemble négligeable près, telle que } f \text{ soit essentiellement bornée}\}.$$

**Théorème 4.1.** *Muni de la norme définie par*

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{M \geq 0 \mid \mu\left(\{x \in \Omega \mid |f(x)| \geq M\}\right) = 0\},$$

*l'espace vectoriel $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach.*

**Théorème 4.2.** *Pour $f \in L^\infty(\Omega)$, on a:*

$$\text{Pour presque tout } x \in \Omega,\ |f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)},$$

*et $\|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ est le plus petit réel satisfaisant cette propriété.*

**Théorème 4.3.** *Si $f$ est continue sur $\Omega$ et essentiellement bornée, alors*

$$\text{Pour tout } x \in \Omega,\ |f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

**Remarque:** C'est le "pour tout" qui est important ici.

**Théorème 4.4.** *Si $f \in L^1(\Omega)$ et $g \in L^\infty(\Omega)$, alors le produit $fg$ est dans $L^1(\Omega)$ et*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} \|g\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

**Remarque:** Ceci étend l'inégalité de Hölder au cas $p = 1$, $q = +\infty$.

# 5 Convolution dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

**Proposition-Définition 5.1.** *Soient $f$ et $g$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. La fonction notée $f * g$ définie presque partout sur $\mathbb{R}^d$ par*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\, dy$$

*est appelée la convolée de $f$ et $g$ (ou le produit de convolution). La fonction $f * g$ est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et on a*

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$