# Espaces de Hilbert

## 1 Espaces de Hilbert

### 1.1 Formes bilinéaires continues

**Définition 1.1.** (Forme bilinéaire)
Soient $V$ et $W$ deux $\mathbb{R}$-ev normés. Une forme bilinéaire sur $V \times W$ est une application $a : V \times W \to \mathbb{R}$ telle que

- Pour tout $v \in V$, l'application $a(v, \cdot) : W \to \mathbb{R}$ est linéaire;
- Pour tout $w \in W$, l'application $a(\cdot, w) : V \to \mathbb{R}$ est linéaire.

**Définition 1.2.** (Forme bilinéaire continue)
*Soient $V$ et $W$ deux $\mathbb{R}$-ev. Une forme bilinéaire $a : V \times W \to \mathbb{R}$ est continue sur $V \times W$ s'il existe une constante $c < \infty$ telle que*

$$\forall (v, w) \in V \times W,\ |a(v, w)| \leq c\|v\|_V \|w\|_W.$$

*On note* $\|a\|_{(V\times W)'} = \sup_{(v,w)\in V\times W,\ v\neq 0,\ w\neq 0} \frac{|a(v,w)|}{\|v\|_V \|w\|_W}$.

### 1.2 Produit scalaire

Soit $V$ un $\mathbb{R}$-ev.

**Définition 1.3.** (Produit scalaire)
*Un produit scalaire sur $V$ est une forme bilinéaire sur $V$, notée $(\cdot, \cdot)_V : V \times V \to \mathbb{R}$, et vérifiant les trois propriétés suivantes:*

*(i)* *symétrie:* $\forall v, w \in V,\ (v, w)_V = (w, v)_V$,

*(ii)* *positivité:* $\forall v \in V,\ (v, v)_V \geq 0$,

*(iii)* $(v, v)_V = 0 \iff v = 0$.

**Proposition 1.1.** (Cauchy-Schwartz) *Soit $(\cdot, \cdot)_V$ un produit scalaire sur $V$. L'application $v \in V \mapsto \|v\|_V = \sqrt{(v, v)_V}$ définit une norme sur $V$ appelée norme induite. Elle vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz:*

$$\forall v, w \in V,\ |(v, w)_V| \leq \|v\|_V \|w\|_V.$$

**Remarque:** Cette inégalité montre que la forme bilinéaire $(v, w) \in V \times V \mapsto (v, w)_V$ est continue, autrement dit que le produit scalaire est une forme bilinéaire continue.

**Preuve:**

- Montrons d'abord l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Soient $v, w \in V$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(v + \lambda w, v + \lambda w)_V \geq 0$. Or si on développe ce produit scalaire on obtient

  $$(v + \lambda w, v + \lambda w)_V = \|v\|^2 + 2\lambda(v, w)_V + \lambda^2\|w\|^2.$$

  Il s'agit d'un polynôme du second degré en $\lambda$. Comme il est toujours positif ou nul, son discriminant est forcément négatif ou nul ce qui implique:

  $$4|(v, w)_V|^2 \leq 4\|v\|^2\|w\|^2,$$

  ce qui entraine Cauchy-Schwartz en prenant la racine carrée de cette expression.

- Montrer que c'est une norme: la "linéarité" et la positivité sont évidentes; L'inégalité triangulaire découle de Cauchy-Schwartz. En effet, soient $v, w \in V$.

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \|v\|^2 + 2(v, w)_V + \|w\|^2, \\ &\leq \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2, \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2. \end{aligned}$$

### 1.3 Espaces de Hilbert

**Définition 1.4.** (Espace de Hilbert)

*Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (donc normé), et complet pour la norme induite.*

Un espace de Hilbert est donc un cas particulier d'un espace de Banach (la norme est définie à partir d'un produit scalaire).

**Exemple:** Soit $l_2 = \{\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R};\ \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 < \infty\}$.

On considère l'application qui à $u, v \in l_2$ associe $(u, v) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n v_n$. Ce nombre est bien défini (en effet, $|u_n v_n| \leq u_n^2/2 + v_n^2/2$ donc la série est absolument convergente donc convergente).

L'application $(\cdot, \cdot)$ est donc bien définie, symétrique, définie et positive: c'est un produit scalaire sur $l_2$. La norme induite est $\|u\|_{l_2} = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2}$.

$l_2$ muni de cette norme est un espace complet, donc un espace de Hilbert.

## 2 Théorème de projection orthogonale

### 2.1 Le théorème

Faire un dessin pour comprendre ce que c'est en dimension finie. Insister sur le fait qu'on ne fait que généraliser en dimension infinie une notion triviale en dimension finie.

**Théorème 2.1.** (Projection orthogonale)

*Soit $H$ un espace de Hilbert, et $K$ un sous-espace vectoriel fermé non vide de $H$. Pour tout $u \in H$, il existe un unique $\overline{u} \in K$, appelé projection orthogonale de $u$ sur $K$, et noté $P_K u$, tel que*

$$\|P_K u - u\|_H = \inf_{w\in K} \|w - u\|_H. \tag{1}$$

*De plus, $P_K u$ est caractérisé par*

$$P_K u \in K \ \textit{et}\ \forall w \in K,\ (P_K u - u, w) = 0. \tag{2}$$

**Remarque:** Si $u \in K$, $P_K u = u$. Faire le dessin.

**Preuve:**

- **Formule de la médiane:** (vraie ici car la norme dérive d'un produit scalaire)

$$\frac{1}{2}\|s + t\|_H^2 + \frac{1}{2}\|s - t\|_H^2 = \|s\|_H^2 + \|t\|_H^2.$$

- **Existence:** Soit $w_n \in K$ une suite minimisante: $I = \inf_{w\in K} \|w - u\|_H = \lim_n \|w_n - u\|_H$.

  On applique l'égalité de la médiane à $s = w_n - u$ et $t = w_{n+p} - u$:

$$\frac{1}{2}\|w_{n+p} + w_n - 2u\|_H^2 + \frac{1}{2}\|w_{n+p} - w_n\|_H^2 = \|w_{n+p} - u\|_H^2 + \|w_n - u\|_H^2,$$

  donc

$$\frac{1}{2}\|w_{n+p} - w_n\|_H^2 = \|w_{n+p} - u\|_H^2 + \|w_n - u\|_H^2 - \frac{1}{2}\|w_{n+p} + w_n - 2u\|_H^2,$$

  d'où

$$\begin{aligned}
\|w_{n+p} - w_n\|_H^2 &= 2\left(\|w_{n+p} - u\|_H^2 + \|w_n - u\|_H^2 - 2\left\|\frac{1}{2}(w_{n+p} + w_n) - u\right\|_H^2\right) \\
&\leq 2\left(\|w_{n+p} - u\|_H^2 + \|w_n - u\|_H^2 - 2(\inf_{w\in K} \|w - u\|_H)^2\right).
\end{aligned}$$

  Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N$ tel que

$$\forall n > N,\ \|w_n - u\|_H^2 \leq \varepsilon + (\inf_{w\in K} \|w - u\|_H)^2.$$

Donc, $\forall n > N$, $\forall p > 0$,
$$\|w_{n+p} - w_n\|_H^2 \leq \varepsilon,$$
et la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

L'espace $H$ étant complet, $\lim_{n\to\infty} w_n = \overline{u}$ et comme $K$ est fermé, $\overline{u} \in K$. De plus, $\|\overline{u} - u\|_H = \inf_{w\in K} \|w - u\|_H$ par continuité de la norme sur $H$. Ceci montre l'existence d'une solution pour (1).

- **Unicité:** Soit $w_1$ et $w_2$ deux solutions. On prend $s = w_1 - u$ et $t = w_2 - u$. On a
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|w_1 - w_2\|_H^2 &= I^2 + I^2 - \frac{1}{2}\|w_1 + w_2 - 2u\|_H^2, \\
&= I^2 + I^2 - 2\left\|\frac{w_1 + w_2}{2} - u\right\|_H^2, \\
&\leq I^2 + I^2 - 2I^2 = 0.
\end{aligned}$$

- **Caractérisation:** On veut montrer l'équivalence entre (1) et (2). Soit $w \in K$. $P_K u + tw \in K$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc $\phi(t) = \|P_K u + tw - u\|_H^2$ est minimale en $t = 0$. On développe $\phi$:
$$\phi(t) = \|P_K u + tw - u\|_H^2 = \|P_K u - u\|_H^2 + 2t(P_K u - u, w)_H + t^2\|w\|_H^2.$$
C'est un trinôme, donc la minimalité en 0 implique que $\phi'(0) = 0$, soit (2).

Réciproquement,
$$\begin{aligned}
\|u - w\|_H^2 &= \|u - P_K u + P_K u - w\|_H^2 \\
&= \|u - P_K u\|_H^2 + \|P_K u - w\|_H^2 + 2(u - P_K u, P_K u - w) \\
&= \|u - P_K u\|_H^2 + \|P_K u - w\|_H^2 \\
&\geq \|u - P_K u\|_H^2.
\end{aligned}$$

## 2.2 Conséquence

**Théorème 2.2.** *$P_K$ est une application linéaire de $H$ dans $K$ et $\|P_K\|_{\mathcal{L}(H,K)} = 1$ (si $K \neq \{0\}$).*

**Preuve:**

- La linéarité vient de la caractérisation (2). En effet; $P_K u + P_K v$ est dans $K$ et vérifie, pour tout $w \in K$,
$$(P_K u - u, w) = 0 \text{ et } (P_K v - v, w) = 0.$$
Donc $(P_K u + P_K v - (u + v), w) = 0$ donc $P_K(u + v) = P_K u + P_K v$.

- Soit $u \in H$. Comme $P_K u \in K$, on a
$$\|u\|_H^2 = \|(u - P_K u) + P_K u\|_H^2 = \|u - P_K u\|_H^2 + \|P_K u\|_H^2 \geq \|P_K u\|_H^2.$$
Donc $P_K$ est continue, et
$$\|P_K\|_{\mathcal{L}(H,K)} = \sup_{u\in H,\ u\neq 0} \frac{\|P_K u\|_H}{\|u\|_H} \leq 1.$$

- Si $K \neq \{0\}$, soit $w \in K \setminus \{0\}$. On a $P_K w = w$, donc $\|w\|_H = \|P_K w\|_H$. Donc
$$\|P_K\|_{\mathcal{L}(H,K)} = \sup_{u\in H,\ u\neq 0} \frac{\|P_K u\|_H}{\|u\|_H} \geq \frac{\|P_K w\|_H}{\|w\|_H} = 1.$$

## 3 Théorème de Riesz

A tout $u \in H$, on peut associer l'application $\phi : w \in H \mapsto (u, w) \in \mathbb{R}$, qui est une application linéaire continue de $H$ dans $\mathbb{R}$, et donc un élément de $H'$. Est-ce qu'on atteint ainsi tous les éléments de $H'$? Le théorème de Riesz dit que oui.

**Théorème 3.1.** (Riesz)
*Soit $H$ un espace de Hilbert. Etant donné $\phi \in H' = \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$, il existe $u \in H$ unique tel que*

$$\forall w \in H, \ \phi(w) = (u, w)_H.$$

*De plus, on a $\|u\|_H = \|\phi\|_{H'}$. En d'autres termes, l'application de $H'$ dans $H$ qui à $\phi$ associe $u$ permet d'identifier l'espace de Hilbert $H$ avec son dual.*

**Rappel:** $\|\phi\|_{H'} = \sup_{w \in H,\, w \neq 0} \frac{|\phi(w)|}{\|w\|_H}$.
**Preuve:**

- **Existence:** Soit $\phi \in H'$ et posons $K = \mathrm{Ker}(\phi) = \{w \in H, \ \phi(w) = 0\}$. $K$ est par construction un sous-espace vectoriel fermé de $H$. Si $K = H$, on en déduit que $\phi = 0$ si bien que $\phi = 0$ peut être trivialement représentée par $u = 0$.

  Si $K \neq H$, on peut trouver $v_0 \in H$ avec $v_0 \notin K$, donc $\phi(v_0) \neq 0$. Posons

  $$v_1 = P_K v_0 \text{ et } v = \frac{v_1 - v_0}{\|v_1 - v_0\|_H}.$$

  Faire un dessin de ce qu'est $v$. En particulier, on a $\|v\|_H = 1$ et $(v, z)_H = 0$ pour tout $z \in K$.

  Posons
  $$u = \phi(v) v.$$

  Montrons que $u$ est un représentant de $\phi$. Pour tout $w \in H$, on peut écrire $w = \lambda v + z$ avec $\lambda = \phi(w)/\phi(v)$, ce qui définit $z$. On calcule $\phi(z) = \phi(w) - \lambda\phi(v) = 0$, donc $z \in \mathrm{Ker}(\phi) = K$. On obtient donc

  $$(u, w)_H = \lambda(u, v)_H + (u, z)_H = \frac{\phi(w)}{\phi(v)} \phi(v)(v, v)_H + \phi(v)(v, z)_H = \phi(w).$$

  Donc $u$ est un représentant de $\phi$.

- **Unicité:** L'unicité du représentant est immédiate: si $u_1$ et $u_2 \in H$ sont deux représentants de $\phi$, on a $(u_1 - u_2, w)_H = 0$ pour tout $w \in H$ si bien que $u_= u_2$.

- **Egalité des normes:** Par construction de $u$, on a $\phi(w) = (u, w)_H$. On a

  $$\|\phi\|_{H'} = \sup_{w \in H,\, w \neq 0} \frac{|\phi(w)|}{\|w\|} = \sup_{w \in H,\, w \neq 0} \frac{|(u, w)_H|}{\|w\|_H}.$$

  Par Cauchy-Schwartz, $|(u, w)_H| \leq \|u\|_H \|w\|_H$, donc $\|\phi\|_{H'} \leq \|u\|$.

  Par ailleurs, en prenant $w = u$,

  $$\|\phi\|_{H'} = \sup_{w \in H,\, w \neq 0} \frac{|(u, w)_H|}{\|u\|} \geq \frac{|(u, u)_H|}{\|u\|} = \|u\|.$$

  D'où l'égalité.

## 4 Bases hilbertiennes

**Définition 4.1.** (Ensemble dense)
*Un sous-ensemble $A$ de $V$ est dit dense dans $V$ si tout élément $v \in V$ est la limite d'une suite $(a_n)$ de points de $A$.*

**Définition 4.2.** (Bases hilbertiennes)

*Soit $H$ un Hilbert. On appelle base hilbertienne de $H$ une suite $(e_n)$ d'éléments de $H$ tels que*

*(i) Pour tout $n$, $\|e_n\| = 1$ et $(e_n, e_m) = 0$ si $n \neq m$;*

*(ii) L'espace vectoriel engendré par la famille $(e_n)$ est dense dans $H$.*

***Remarque:*** En dimension finie, on généralise la notion de base orthonormée. En dimension infinie, un espace de Hilbert peut ne pas avoir de base hilbertienne. Cependant, tous les espaces de Hilbert qu'on rencontrera dans ce cours auront une base hilbertienne.

**Proposition 4.1.** *Soit $H$ un espace de Hilbert admettant une base hilbertienne $(e_n)$ et soit $u \in H$. On pose $u_n = (u, e_n)$. Alors les séries $\sum_n u_n e_n$ et $\sum_n u_n^2$ sont convergentes dans $H$ et $\mathbb{R}$ respectivement, et*

$$u = \sum_n u_n e_n, \ \|u\|_H^2 = \sum_n u_n^2.$$

**Preuve:** Soit $H_n$ engendré par $(e_0, \cdots, e_n)$ et $P_n$ la projection orthogonale de $H$ sur $H_n$. Soit $\overline{P}_n u = \sum_{m=0}^n u_m e_m$. On voit que $\overline{P}_n u \in H_n$ et

$$\forall 0 \leq k \leq n, \ (\overline{P}_n u - u, e_k) = 0,$$

donc $\overline{P}_n u$ n'est autre que la projection de $u$ sur $H_n$. Donc

$$P_n u = \overline{P}_n u = \sum_{m=0}^n u_m e_m.$$

On a $\|P_n u\|^2 = \sum_{m=0}^n u_m^2$. On sait aussi que $\|P_n u\| \leq \|u\|$, donc $\sum_{m=0}^n u_m^2$ est convergente. On a $\|P_{n+p}u - P_n u\|_H^2 = \sum_{m=n+1}^{n+p} u_m^2$. Comme la série $\sum u_m^2$ converge, la suite $P_n u$ est de Cauchy, donc converge vers $\overline{u} \in H$: $\overline{u} = \sum u_m e_m$. Comme $P_n u$ converge vers $\overline{u} \in H$, on a $(P_n u - \overline{u}, e_m) \to_n 0$. Or $(P_n u, e_m) = u_m$ donc $(u, e_m) = u_m = (\overline{u}, e_m)$ donc $(u - \overline{u}, e_m) = 0$. La famille engendrée par la base est dense: $u = \overline{u}$. Par définition, $\overline{u}$ est la limite de $P_n u$ donc $u = \lim_n P_n u$. On avait $\|P_n u\|^2 = \sum_{m=0}^n u_m^2$, ce qui donne à la limite $\|u\|^2 = \sum u_m^2$.

# 5 Espace $L^2(\Omega)$

**Théorème 5.1.** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$. L'application*

$$f \in L^2(\Omega), g \in L^2(\Omega) \mapsto (f,g)_{L^2} = \int_\Omega f(x) g(x) \, dx$$

*est un produit scalaire. Muni de ce produit scalaire, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert. La norme induite est*

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{(f,f)_{L^2}} = \sqrt{\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx}.$$

**Remarque:** La fonction $x \mapsto f(x)g(x)$ est intégrable. En effet,

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}(|f(x)|^2 + |g(x)|^2).$$

Donc le nombre $(f,g)_{L^2}$ est bien défini. L'application $f, g \mapsto (f,g)_{L^2}$ est bien symétrique, positive, définie:

$$\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \ pp.$$

C'est donc un produit scalaire. On admet que $L^2(\Omega)$ est complet pour la norme induite.