Analyse numérique et optimisation
TD5 – 04/03/2014
A. Ern et A. de Bouard – Groupes 5 & 12

Espaces de Sobolev

Exercice 1 : espaces de Sobolev en dimension 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, borné ou non borné. L'objectif de cet exercice est d'étudier quelques propriétés des fonctions dans $H^1(I)$.

1. On considère d'abord le cas $I = \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|\phi\|_{H^1(\mathbb{R})}.$$

(Indication : observer que $|\phi(x)|^2 = 2\int_{-\infty}^x \phi(s)\phi'(s)ds$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.) En déduire que toute fonction de $H^1(\mathbb{R})$ admet un représentant continu qui tend vers zéro à l'infini et que

$$\forall u \in H^1(\mathbb{R}), \qquad \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{H^1(\mathbb{R})}.$$

2. Soit maintenant I un intervalle borné de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une constante C_I telle que pour tout $\phi \in C^\infty(I) \cap H^1(I)$,

$$\|\phi\|_{L^\infty(I)} \leq C_I \|\phi\|_{H^1(I)}.$$

(Indication : écrire la différence $|\phi(x)|^2 - |\phi(y)|^2$ comme une intégrale entre x et y.) En utilisant la densité de $C_c^\infty(\overline{I}) = C^\infty(\overline{I})$ dans $H^1(I)$, en déduire que toute fonction de $H^1(I)$ admet un représentant continu sur I, qui se prolonge par continuité aux extrémités de I et qui tend vers zéro à l'infini si I est non borné, et que

$$\forall u \in H^1(I), \qquad \|u\|_{L^\infty(I)} \leq C_I \|u\|_{H^1(I)}.$$

On admet que ce résultat est également valable sur un intervalle non borné.

3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, borné ou non borné. Montrer que pour tout $u \in H^1(I)$,

$$\forall (x,y) \in I \times I, \qquad |u(x) - u(y)| \leq \|u'\|_{L^2(I)} |x-y|^{1/2}.$$

On dit que u est Höldérienne d'exposant 1/2.

4. On considère l'intervalle borné $I =]a, b[$. On se donne un maillage de I de la forme

$$a = x_0 < x_1 \ldots < x_J < x_{J+1} = b.$$

Pour tout $0 \leq j \leq J$, on pose $K_j =]x_j, x_{j+1}[$. On définit l'espace (de Sobolev brisé)

$$H^1(\{K_j\}) := \{v \in L^2(I);\ \forall 0 \leq j \leq J,\ v_j := v|_{K_j} \in H^1(K_j)\}.$$

a) Soit $v \in H^1(I)$. Montrer que $v|_{K_j} \in H^1(K_j)$ et que l'on a $(v|_{K_j})' = (v')|_{K_j}$. En déduire que $H^1(I) \subset H^1(\{K_j\})$.

b) Toute fonction v dans $H^1(\{K_j\})$ se prolonge par continuité aux extrémités de chaque intervalle K_j (théorème de trace 4.3.13) ; on pose

$$v_j(x_j^+) = \lim_{s \to 0^+} v_j(x_j + s), \qquad v_j(x_{j+1}^-) = \lim_{s \to 0^+} v_j(x_{j+1} - s),$$

et on introduit les sauts

$$[\![v]\!](x_j) = v_j(x_j^+) - v_{j-1}(x_j^-) \qquad \forall 1 \leq j \leq J.$$

Montrer qu'une fonction $v \in H^1(\{K_j\})$ est dans $H^1(I)$ si et seulement si

$$[\![v]\!](x_j) = 0 \qquad \forall 1 \leq j \leq J,$$

et que dans ces conditions

$$v'|_{K_j} = v_j' \qquad \forall 0 \leq j \leq J.$$

Exercice 2 : inégalité de Poincaré–Wirtinger

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, connexe, borné, régulier de classe C^1. Soit Φ une forme linéaire continue sur $H^1(\Omega)$ telle que $\Phi(1_\Omega) \neq 0$ où 1_Ω est la fonction constante égale à un sur Ω.

1. Montrer qu'il existe une constante C_Ω telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \qquad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^d} + |\Phi(v)|\right).$$

   (Indication : raisonner par l'absurde et utiliser le théorème de Rellich.)

2. En déduire que si $\Phi(1_\Omega) = 1$, alors

$$\forall v \in H^1(\Omega), \qquad \|v - \Phi(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

3. Application : montrer l'inégalité de Poincaré–Wirtinger :

$$\forall v \in H^1(\Omega), \qquad \|v - \langle v\rangle_\Omega\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^d},$$

   où $\langle v\rangle_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v(x)dx$ désigne la valeur moyenne de v sur Ω.

Exercice 3 : caractérisation par différences finies

L'objectif de cet exercice est de caractériser les fonctions de $H^1(\mathbb{R}^d)$ par une propriété de leurs translations en espace. Pour tout $h \in \mathbb{R}^d$, $\tau_h u$ désigne la translatée de u définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ par $(\tau_h u)(x) = u(x-h)$.

1. Montrer que $\tau_h u \in H^1(\mathbb{R}^d)$.

2. Montrer qu'il existe une constante C (pouvant dépendre de u) telle que

$$\forall h \in \mathbb{R}^d, \qquad \|u - \tau_h u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C|h|. \tag{1}$$

   (Indication : on commencera par montrer cette inégalité pour $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ puis on utilisera un argument de densité.)

3. Montrer que, réciproquement, si une fonction $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ vérifie la condition (1) pour une certaine constante C, alors u est dans $H^1(\mathbb{R}^d)$.

Corrigé

Remarque. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$; alors, $C^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ est dense dans $H^1(\Omega)$ (théorème de Meyers–Serrin) (si Ω est borné, on peut simplement utiliser $C^\infty(\Omega)$). Par ailleurs, $C_c^\infty(\overline{\Omega})$ est l'espace des fonctions $C^\infty(\overline{\Omega})$ à support borné dans le fermé $\overline{\Omega}$ (donc, $C_c^\infty(\overline{\Omega}) = C^\infty(\overline{\Omega})$ si Ω est borné). Pour avoir un résultat de densité, il faut faire une hypothèse sur la régularité de la frontière de Ω. Par exemple (théorème 4.3.5 du poly), si Ω est un ouvert borné régulier, ou si $\Omega = \mathbb{R}^d$, ou si $\Omega = \mathbb{R}^d_+$, $C_c^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

Exercice 1 : espaces de Sobolev en dimension 1

1. Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|\phi(x)|^2 = 2 \int_{-\infty}^{x} \phi(s)\phi'(s)ds,$$

si bien qu'en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\begin{aligned}|\phi(x)|^2 &\leq 2 \left(\int_{-\infty}^{x} |\phi(s)|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{x} |\phi'(s)|^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq 2\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\phi'\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|\phi'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|\phi\|^2_{H^1(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|\phi\|_{H^1(\mathbb{R})}.$$

Soit maintenant $u \in H^1(\mathbb{R})$. Comme $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $H^1(\mathbb{R})$, on peut trouver une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $C_c^\infty(\mathbb{R})$ qui tend vers u dans $H^1(\mathbb{R})$. La suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy dans $H^1(\mathbb{R})$, elle l'est également dans $L^\infty(\mathbb{R})$ si bien qu'elle converge uniformément vers une fonction $v \in L^\infty(\mathbb{R})$. Comme en outre chaque fonction ϕ_n est continue et tend vers zéro à l'infini, il en est de même de v. Il reste à montrer que $v = u$ presque partout sur $\mathbb{R}$. On sait que $\phi_n \to u$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et $\phi_n \to v$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$. On en déduit que, pour toute fonction $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} v(x)\psi(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\psi(x)dx.$$

Ceci montre que $v \in L^2(\mathbb{R})$ et que

$$\forall \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \qquad \int_{\mathbb{R}} (u - v)(x)\psi(x)dx = 0,$$

Par suite, $v - u = 0$ presque partout sur $\mathbb{R}$ (corollaire 4.2.2 du poly).

2. Pour tout $\phi \in C_c^\infty(\overline{I}) = C^\infty(\overline{I})$ et tout $(x, y) \in I \times I$, on a

$$|\phi(x)|^2 - |\phi(y)|^2 = 2 \int_{y}^{x} \phi'(s)\phi(s)ds \leq \|\phi\|^2_{H^1(I)}.$$

On exploite maintenant le fait que I est borné pour intégrer cette inégalité sur I par rapport à la variable y, ce qui donne

$$|I||\phi(x)|^2 \leq \|\phi\|^2_{L^2(I)} + |I|\|\phi\|^2_{H^1(I)} \leq (1 + |I|)\|\phi\|^2_{H^1(I)},$$

d'où l'inégalité demandée avec $C_I = (1 + |I|^{-1})^{1/2}$. Dans le cas où l'intervalle I n'est pas borné, on utilise le fait qu'il existe un opérateur de prolongement continu $P : H^1(I) \to H^1(\mathbb{R})$, si bien que pour tout $\phi \in C^\infty(I) \cap H^1(I)$,

$$\|\phi\|_{L^\infty(I)} \leq \|P\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|P\phi\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq C_P\|\phi\|_{H^1(I)},$$

où C_P est le module de continuité de l'opérateur P (qui dépend de I). Le reste de la question se traite comme la question précédente en utilisant un argument de densité.

3. Soit $\phi \in C_c^\infty(\overline{I})$. On a pour tout $(x,y) \in I \times I$ avec $x \geq y$,

$$|\phi(x) - \phi(y)| = \left|\int_y^x \phi'(s)ds\right| \leq \left(\int_y^x |\phi'(s)|^2 ds\right)^{1/2} \left(\int_y^x ds\right)^{1/2} \leq \|\phi'\|_{L^2(I)}(x-y)^{1/2}.$$

Donc, pour tout $(x,y) \in I \times I$,

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq \|\phi'\|_{L^2(I)}|x-y|^{1/2}.$$

On conclut en utilisant la densité de $C_c^\infty(\overline{I})$ dans $H^1(I)$.

4. On considère l'espace de Sobolev brisé $H^1(\{K_j\})$.
   a) Soit $v \in H^1(I)$ et v' la dérivée faible de v dans $L^2(I)$. Soit $0 \leq j \leq J$. Il est clair que $v|_{K_j} \in L^2(K_j)$. De plus, pour tout $\phi \in C_c^\infty(K_j)$, en prolongeant ϕ par zéro sur I, on obtient une fonction $P\phi \in C_c^\infty(I)$ si bien que

$$\int_{K_j} v|_{K_j}(x)\phi'(x)dx = \int_I v(x)(P\phi)'(x)dx = -\int_I v'(x)(P\phi)(x)dx = -\int_{K_j} v'(x)\phi(x)dx,$$

   ce qui montre que $v|_{K_j}$ admet une dérivée faible dans $L^2(K_j)$ et que cette dérivée faible vaut $v'|_{K_j}$. Par suite, $v|_{K_j} \in H^1(K_j)$. L'inclusion $H^1(I) \subset H^1(\{K_j\})$ est alors évidente.

   b) Soit $v \in H^1(\{K_j\})$. On pose $v_j = v|_{K_j}$. Pour tout $\phi \in C_c^\infty(I)$, on a

$$\begin{aligned}\int_I v(x)\phi'(x)dx &= \sum_{j=0}^J \int_{K_j} v_j(x)\phi'(x)dx \\ &= -\sum_{j=0}^J \int_{K_j} (v_j)'(x)\phi(x)dx + \sum_{j=0}^J [v_j\phi]_{x_j}^{x_{j+1}},\end{aligned}$$

   où on a utilisé la formule d'intégration par parties du théorème 4.3.15 du poly dans chaque intervalle K_j. En utilisant le fait que ϕ est continue et s'annule aux extrémités de I, la deuxième somme du membre de droite se réarrange, ce qui donne

$$\int_I v(x)\phi'(x)dx = -\sum_{j=0}^J \int_{K_j} (v_j)'(x)\phi(x)dx + \sum_{j=1}^J [\![v]\!](x_j)\phi(x_j).$$

   On définit la fonction $w \in L^2(I)$ telle que $w|_{K_j} = (v_j)'$ pour tout $0 \leq j \leq J$. Par suite,

$$\int_I v(x)\phi'(x)dx = -\int_I w(x)\phi(x)dx + \sum_{j=1}^J [\![v]\!](x_j)\phi(x_j).$$

   Supposons d'abord que tous les sauts de v sont nuls. Alors, la formule ci-dessus montre que v admet une dérivée faible dans $L^2(I)$ et que $v' = w$. Réciproquement, si v est dans $H^1(I)$, alors v est continue, si bien que ses sauts sont nuls. On peut aussi raisonner directement sur la formule ci-dessus. De par la question a), on a $v' = w$. Il s'en suit que

$$\sum_{j=1}^J [\![v]\!](x_j)\phi(x_j) = 0,$$

   d'où l'on conclut à la nullité des sauts en prenant une fonction ϕ égale à un en un point x_j et dont le support est inclus dans $]x_{j-1}, x_{j+1}[$.

Exercice 2 : inégalité de Poincaré–Wirtinger

1. En raisonnant par l'absurde, supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on puisse trouver une fonction $v_n \in H^1(\Omega)$ telle que
$$\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)^d} + |\Phi(v_n)| < \frac{1}{n}\|v_n\|_{L^2(\Omega)}.$$
Sans perte de généralité, on peut supposer que $\|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ si bien que
$$\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)^d} + |\Phi(v_n)| < \frac{1}{n}.$$
On obtient donc que ∇v_n tend vers 0 dans $L^2(\Omega)^d$ et que $\Phi(v_n)$ tend vers 0 dans $\mathbb{R}$. En particulier, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$, donc, de par le théorème de Rellich, on peut en extraire une sous-suite (encore notée $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour simplifier) qui converge vers une fonction $v \in L^2(\Omega)$ telle que $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Comme ∇v_n tend vers 0 dans $L^2(\Omega)^d$, il s'en suit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans $H^1(\Omega)$ et donc converge dans $H^1(\Omega)$ vers une certaine fonction $w \in H^1(\Omega)$. Par unicité de la limite dans $L^2(\Omega)$, $v = w$. Donc, $v \in H^1(\Omega)$ et $\nabla v = 0$ ce qui implique, comme Ω est connexe, que v est constante. Enfin, en vertu de la continuité de la forme linéaire Φ sur $H^1(\Omega)$, il vient $\Phi(v) = 0$. L'hypothèse $\Phi(1_\Omega) \neq 0$ implique que $v = 0$, ce qui contredit $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$.
2. On applique l'inégalité précédente à la fonction $w = v - \Phi(v)$ (plus précisément, à la fonction $w = v - \Phi(v)1_\Omega$) qui est telle que $\Phi(w) = 0$ car $\Phi(1_\Omega) = 1$.
3. L'application linéaire $H^1(\Omega) \ni v \mapsto \langle v\rangle_\Omega \in \mathbb{R}$ est continue puisqu'en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, il vient
$$|\langle v\rangle_\Omega| \leq \frac{1}{|\Omega|}\left(\int_\Omega dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |v(x)|^2 dx\right)^{1/2} = |\Omega|^{-1/2}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq |\Omega|^{-1/2}\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$
De plus, $\langle 1_\Omega\rangle = 1$. Toutes les hypothèses requises sont donc satisfaites.

Exercice 3 : caractérisation par différences finies

1. Il est clair que $\tau_h u \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Montrons que $\tau_h u$ est dérivable au sens faible dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Soit $i \in \{1, \dots, N\}$. Comme $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$, il existe une fonction $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, on a
$$\int_{\mathbb{R}^d} u(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)dx = -\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\phi(x)dx.$$
Par suite, comme $\tau_{-h}\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, il vient
$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \tau_h u(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^d} u(x-h)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} u(y)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(y+h)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} u(y)\frac{\partial \tau_{-h}\phi}{\partial x_i}(y)dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial u}{\partial x_i}(y)\tau_{-h}\phi(y)dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x-h)\phi(x)dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} \tau_h\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)(x)\phi(x)dx.
\end{aligned}$$
D'où $\frac{\partial \tau_h u}{\partial x_i} = \tau_h\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

2. Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $h \in \mathbb{R}^d$,

$$\phi(x+h) - \phi(x) = \int_0^1 \nabla\phi(x+th) \cdot h dt,$$

(cette formule s'obtient en considérant la fonction $f(t) = \phi(x+th)$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^d$) si bien qu'en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, il vient

$$|\phi(x+h) - \phi(x)|^2 \leq |h|^2 \int_0^1 |\nabla\phi(x+th)|^2 dt.$$

En intégrant cette inégalité sur $\mathbb{R}^d$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\phi - \tau_h\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d} |\phi(x+h) - \phi(x)|^2 dx \\
&\leq |h|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^1 |\nabla\phi(x+th)|^2 dt \right) dx \\
&\leq |h|^2 \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\phi(x+th)|^2 dx \right) dt \\
&= |h|^2 \|\nabla\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)^d}.
\end{aligned}$$

Par densité, cette inégalité reste vraie sur $H^1(\mathbb{R}^d)$; d'où l'inégalité (1) avec $C = \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)^d}$.

3. Soit maintenant $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ vérifiant l'inégalité (1). Soit $i \in \{1, \dots, N\}$ et e_i le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$. On constate que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x) dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \lim_{t\to 0} \frac{\phi(x+te_i) - \phi(x)}{t} dx \right| \\
&= \lim_{t\to 0} \left| \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \frac{\phi(x+te_i) - \phi(x)}{t} dx \right| \\
&= \lim_{t\to 0} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y) \frac{1}{t} (\tau_{te_i} u - u)(y) dy \right| \\
&\leq C \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Notons l'utilisation du théorème de convergence dominée pour passer de la première à la deuxième ligne. L'estimation ci-dessus montre que u admet une dérivée faible dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ par rapport à x_i.