Cours MAP434 : Contrôle de modèles dynamiques

Séance 1, 06 mars 2019

Contrôlabilité des systèmes linéaires

Exercice I. Contrôlabilité d'un système linéaire

On considère le système de contrôle linéaire

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - x_2 + x_3 + u_1 + u_2,\\ \dot{x}_2 &= x_1,\\ \dot{x}_3 &= -2x_1 + x_2 - 2x_3 - u_1,\end{aligned}$$

pour tout $t \in [0,T]$, $T > 0$, avec un état $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ et un contrôle $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Question 1. Étudier la contrôlabilité du système dans le cas où $u_2 \equiv 0$ (si bien qu'il ne reste que le contrôle u_1) et dans le cas où $u_1 \equiv 0$ (si bien qu'il ne reste que le contrôle u_2). S'il fallait supprimer un des deux contrôles suite à un problème technique, quel choix feriez-vous ?

Correction: Le système de contrôle s'écrit sous la forme $\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1u_1(t) + B_2u_2(t)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On constate que

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si on supprime le contrôle u_2, la matrice de Kalman s'écrit

$$C_1 = [\, B_1 \ AB_1 \ A^2B_1 \,] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit que cette matrice est de rang 2 (son noyau est de dimension 1), si bien que le système n'est pas contrôlable. Tandis que si on supprime le contrôle u_1, la matrice de Kalman s'écrit

$$C_2 = [\, B_2 \ AB_2 \ A^2B_2 \,] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

On voit que cette matrice est de rang plein (son noyau est réduit à zéro), si bien que le système est contrôlable. En cas de problème technique, il convient donc de supprimer le contrôle u_1.

Question 2. On suppose que l'autre choix est fait et on pose $u = u_1$. Proposer des coordonnées $y = Px$ (avec $y_1 = x_1$ et $y_2 = x_2$) dans lesquelles l'ensemble atteignable

$$\mathcal{A}(T,0) := \{z \in \mathbb{R}^3;\ y_u(0) = 0,\ \exists u \in L^\infty([0,T];\mathbb{R}),\ y_u(T) = z\},$$

a pour équation $y_3 = 0$. Écrire le système de contrôle dans les variables y et vérifier que le sous-système associé aux variables (y_1, y_2) est contrôlable.

Correction: L'ensemble atteignable $\mathcal{A}(T, 0)$ étant l'image de la matrice de Kalman C_1, on a $\mathcal{A}(T, 0) = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + x_3 = 0\}$. On considère le changement de coordonnées

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = x_2, \qquad y_3 = x_1 + x_3.$$

Dans ces coordonnées, le système s'écrit (avec $u = u_1$)

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= -y_2 + y_3 + u,\\
\dot{y}_2 &= y_1,\\
\dot{y}_3 &= -y_3.
\end{aligned}$$

On réécrit le système sous la forme bloc

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \hat{A} & C \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \hat{B} \\ 0 \end{pmatrix} u,$$

avec

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le sous-système dans $\mathbb{R}^2$ associé à $\hat{A}$ et $\hat{B}$ est contrôlable puisque

$$[\,\hat{B}\ \hat{A}\hat{B}\,] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est de rang 2.

Question 3. On considère le système de contrôle en $y = (y_1, y_2, y_3)$ de la question précédente, et un contrôle sous forme de retour d'état, i.e., $u = k_1 y_1 + k_2 y_2$. Proposer des valeurs de k_1 et k_2 pour lesquelles les 3 composantes de y se comportent essentiellement en e^{-t} à un polynôme en t près. (On dit que le système est asymptotiquement stabilisable par retour d'état.)

Correction: Avec le retour d'état $u = k_1 y_1 + k_2 y_2$, on obtient l'EDO

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \hat{A} + \hat{B}K & C \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y,$$

où K est un vecteur ligne d'ordre 2 et $\hat{B}$ un vecteur colonne d'ordre 2 si bien que $\hat{B}K$ est une matrice carrée d'ordre 2. Le choix $k_1 = -2$ et $k_2 = 0$ conduit à

$$\hat{A} + K\hat{B} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dont le polynôme caractéristique vaut $(\lambda + 1)^2$. Pour le système à trois composantes avec le retour d'état ci-dessus, on conclut en observant que la matrice d'ordre 3 correspondante n'admet que -1 pour valeur propre.

Exercice II. Stabilisation par retour d'état

On considère le système linéaire de contrôle

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad \forall t \geq 0, \qquad x(0) = x_0,$$

où x est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, u est à valeurs dans $\mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ et $B \in \mathbb{R}^d$. Ici, on ne fixe pas a priori d'horizon temporel. On suppose que la paire (A, B) satisfait la condition de contrôlabilité de Kalman.

Question 1. *Forme de Brunovski.* On note $P_A(X) = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i$ le polynôme caractéristique de A. On veut montrer que l'on peut trouver une base $(e_1, \ldots, e_d)$ dans laquelle le système de contrôle linéaire se réécrit $\dot{y}(t) = \tilde{A}y(t) + \tilde{B}u(t)$ avec

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{d-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que si A, B se représentent par $\tilde{A}, \tilde{B}$ dans la base $(e_i)_{i=1}^d$ alors forcément, $B = e_d$ et

$$e_i = Ae_{i+1} + a_i e_d \quad \forall 1 \leq i \leq d-1. \tag{1}$$

Montrer que si le système est contrôlable, ces formules définissent effectivement une base de $\mathbb{R}^d$. Enfin, en utilisant le théorème de Cayley–Hamilton, vérifier que A, B se représentent bien par $\tilde{A}, \tilde{B}$ dans la base $(e_i)_{i=1}^d$.

Correction: En effet, $\tilde{B} = \sum_{1\leq i\leq d} \tilde{b}_i e_i = e_d$ si $(\tilde{b}_i)_{1\leq i\leq d} = (0, \ldots, 0, 1)$. Ensuite, on voit que si $i \geq 2$, $Ae_i = e_{i-1} - a_{i-1}e_d$, par conséquent (1) est vraie. Ajoutons qu'on doit aussi avoir $Ae_1 = -a_0 e_d$. On observe alors que si on définit les vecteurs e_i par $e_d = B$ et la formule de récurrence (1), on a

$$\begin{aligned} &\mathrm{Vect}\{e_d\} = \mathrm{Vect}\{B\}, \\ &\mathrm{Vect}\{e_{d-1}, e_d\} = \mathrm{Vect}\{AB, B\}, \\ &\mathrm{Vect}\{e_{d-2}, e_{d-1}, e_d\} = \mathrm{Vect}\{A^2B, AB, B\}, \ldots, \\ &\mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_d\} = \mathrm{Vect}\{A^{d-1}B, \ldots, AB, B\} = \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

puisque le système est contrôlable. Dans ce cas, $(e_i)_{1\leq i\leq d}$ est bien une base de $\mathbb{R}^d$. Pour conclure, il faut s'assurer que $Ae_1 = -a_0 e_d$. Par récurrence, on vérifie que $Ae_1 = A^2 e_2 + a_1 Ae_d = A^3 e_3 + a_2 A^2 e_d + a_1 Ae_d = \cdots = A^d e_d + \sum_{i=1}^{d-1} a_i A^i e_d = P_A(A)e_d - a_0 e_d$. Comme $P_A(A) = 0$ (Cayley–Hamilton), on a bien $Ae_1 = -a_0 e_d$.

Question 2. *Contrôle par retour d'état et placement des pôles.* On considère un contrôle de la forme $u = Lx$, $L \in \mathbb{R}^{1\times d}$ (L est un vecteur ligne). En considérant B dans $\mathbb{R}^{d\times 1}$, le système dynamique est donc la forme

$$\dot{x}(t) = (A + BL)x(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré d, il existe un vecteur ligne L tel que les valeurs propres de $A + BL$ sont les racines (réelles ou complexes) de P. En déduire qu'on peut toujours trouver un contrôle par retour d'état $u = Lx$ qui ramène tout point en zéro en temps éventuellement infini. On dit que le système est asymptotiquement stabilisable par retour d'état.

Correction: On peut supposer P sous la forme $P(X) = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} c_i X^i$. On introduit les composantes $(l_1, \dots, l_d)$ du vecteur ligne L dans la base de Brunowski. Dans cette base, on a

$$A + BL = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 1 \\ l_1 - a_0 & l_2 - a_1 & \dots & l_d - a_{d-1} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} \det(sI - A - BL) &= \det \begin{pmatrix} s & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & s & -1 \\ a_0 - l_1 & a_1 - l_2 & \dots & s + a_{d-1} - l_d \end{pmatrix} \\ &= s^d + (a_{d-1} - l_d)s^{d-1} + (a_{d-2} - l_{d-1})s^{d-2} + \dots + (a_0 - l_1). \end{aligned}$$

Il suffit alors de choisir $l_1 = a_0 - c_0$, $l_2 = a_1 - c_1$ etc., pour avoir $\det(sI - A - BL) = P(s)$. Pour ramener tout point en 0, il suffit de choisir l tel que $P(X) = (X+1)^d$ (par exemple) de sorte que $x(t)$ vérifiera $x(t) = x_0 e^{-t}\pi(t)$ où π est un polynôme de degré au plus $d-1$.

Exercice III. Système de contrôle bilinéaire

On considère un système de contrôle bilinéaire de la forme

$$\dot{X}(t) = u(t)AX(t) + (1 - u(t))BX(t), \quad \forall t \in [0,T], \qquad X(0) = X_0 \in \mathbb{R}^d \tag{2}$$

où $X : [0,T] \to \mathbb{R}^d$, $u \in L^1([0,T];\mathbb{R})$ et A, B sont deux matrices dans $\mathbb{R}^{d\times d}$.

Question 1. On suppose que $u(t) = \chi_E(t) \in \{0,1\}$ est la caractéristique d'un ensemble $E = \bigcup_{i\geq 0}[t_{2i}, t_{2i+1}] \subset [0,T]$ avec $(t_k)_{k\geq 0}$ une suite (strictement) croissante de réels dans $[0,T]$ avec $t_0 = 0$. Donner l'expression de $X(t)$. Montrer que cette expression se simplifie lorsque les matrices A et B commutent, i.e., $[A,B] = AB - BA = 0$.

Correction: En utilisant la formule de Duhamel, il vient

$$X(t) = \begin{cases} e^{(t-t_{2i})A} e^{(t_{2i}-t_{2i-1})B} e^{(t_{2i-1}-t_{2i-2})A} \dots e^{(t_1-t_0)A} X_0 & \text{si } t \in [t_{2i}, t_{2i+1}], \\ e^{(t-t_{2i+1})B} e^{(t_{2i+1}-t_{2i})A} e^{(t_{2i}-t_{2i-1})B} \dots e^{(t_1-t_0)A} X_0 & \text{si } t \in [t_{2i+1}, t_{2i+2}]. \end{cases}$$

Si A et B commutent, alors $e^{tA}e^{sB} = e^{tA+sB}$ et la solution est simplement

$$X(t) = e^{|E\cap[0,t]|A + |[0,t]\setminus E|B} X_0.$$

Question 2. On suppose $d = 2$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer, pour $s, t > 0$, $\exp(tA)$ et $\exp(sB)$. Est-ce que A et B commutent ? Vérifier que

$$\exp(tA)\exp(sB) \neq \exp(sB)\exp(tA).$$

Expliquer (sans faire de calculs) pourquoi $\exp(tA + sB)$ est différente.

Correction: On a

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $\exp(sB)$, on constate d'abord que $B^2 = I$, d'où $B^n = I$ si n pair, $B^n = B$ si n impair. Donc

$$e^{sB} = \left(\sum_{n\in 2\mathbb{N}} \frac{s^n}{n!}\right) I + \left(\sum_{n\in 2\mathbb{N}+1} \frac{s^n}{n!}\right) B = \cosh(s)I + \sinh(s)B.$$

On constate que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et de plus que $\exp(tA)\exp(sB) \neq \exp(sB)\exp(tA)$ car

$$e^{tA}e^{sB} = \begin{pmatrix} e^t\cosh(s) & e^t\sinh(s) \\ \sinh(s) & \cosh(s) \end{pmatrix} \neq e^{sB}e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t\cosh(s) & \sinh(s) \\ e^t\sinh(s) & \cosh(s) \end{pmatrix},$$

à moins d'avoir $t = 0$ ou $s = 0$. Enfin, $\exp(tA+sB)$ étant symétrique, cette matrice est forcément différente de ces deux matrices, si $s > 0$.

Question 3. On pose $C = A + B$. Montrer par récurrence que pour $n \geq 1$, $C^n = \varphi_n C + \varphi_{n-1} I$ où $(\varphi_n)_{n\geq 0} = (0, 1, 1, 2, 3, \dots)$ est la suite de Fibonacci, donnée par $\varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} + \varphi_n$ (et $\varphi_0 = 0, \varphi_1 = 1$). En déduire une expression de $\exp(C)$.

Correction: Remarquons que

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = C + I.$$

Donc si $C^n = \varphi_n C + \varphi_{n-1} I$ (hypothèse de récurrence vérifiée pour $n = 1$ et $n = 2$), $C^{n+1} = \varphi_n(C + I) + \varphi_{n-1}C = \varphi_{n+1}C + \varphi_n I$. On en déduit que

$$e^{A+B} = e^C = \sum_{n\geq 1} \frac{\varphi_n}{n!} C + I + \sum_{n\geq 1} \frac{\varphi_n}{(n+1)!} I.$$

On peut aussi utiliser la relation $\varphi_n = (\varphi^n - \varphi'^n)/\sqrt{5}$ où $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ est le nombre d'or, et $\varphi' = -1/\varphi = (1-\sqrt{5})/2$:

$$e^C = \frac{e^\varphi - e^{\varphi'}}{\sqrt{5}} C + I + \frac{(e^\varphi - 1)/\varphi - (e^{\varphi'} - 1)/\varphi'}{\sqrt{5}} I,$$

expression très éloignée de $e^A e^B$ ou $e^B e^A$. (On aurait pu aussi diagonaliser la matrice, qui a précisément pour valeurs propres φ, φ'.)

Question 4. *"Splitting de Strang"*. On suppose maintenant que pour N fixé, $t_i = \frac{i}{2}(s+t)/N$ pour i pair, $0 \leq i \leq 2N$, et $t_i = t_{i-1} + t/N$ si i est impair. On appelle $X^N(\cdot)$ la solution de (2) pour $u(t) = \chi_E(t)$, $E = \bigcup_{0 \leq i < N} [t_{2i}, t_{2i+1}]$. Montrer que même si A et B ne commutent pas,

$$\lim_{N \to \infty} X^N(s+t) = e^{tA+sB} X_0.$$

On pourra supposer que $s = t = 1$ et vérifier que $e^{\frac{1}{N}A} e^{\frac{1}{N}B} = \left(I + \frac{A+B}{N} + \frac{C_N}{N^2}\right)$, où la matrice C_N est uniformément bornée.

Correction: Par définition, on a

$$e^{\frac{1}{N}A} = \left(I + \tfrac{1}{N}A + \tfrac{A^2}{N^2} \sum_{n \geq 0} \left(\tfrac{A}{N}\right)^n \tfrac{1}{(n+2)!}\right)$$

et le terme dans la somme est une matrice bornée uniformément (par exemple par $\sum_{n \geq 0} \|A\|^n/(n+2)! \leq \exp \|A\|$). D'où la décomposition

$$e^{\frac{1}{N}A} e^{\frac{1}{N}B} = \left(I + \frac{A+B}{N} + \frac{C_N}{N^2}\right)$$

avec C_N uniformément bornée. En développant, il vient

$$X^N(2) = \left(I + \frac{A+B}{N} + \frac{C_N}{N^2}\right)^N X_0 = \sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{(N-k)!} \frac{(A+B+C_N/N)^k}{N^k k!} X_0$$
$$= \sum_{k=0}^{N} \prod_{i=0}^{k-1} (1 - \tfrac{i}{N}) \frac{(A+B+C_N/N)^k}{k!} X_0$$

et on conclut en montrant (comme chaque terme de la série est borné par un élément d'une série convergente) que ceci tend quand $N \to +\infty$ vers

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} X_0.$$