Cours MAP434 : Contrôle de modèles dynamiques

Séance 2, 18 avril 2018

CONTRÔLABILITÉ DES SYSTÈMES NON-LINÉAIRES

Exercice I. Pendule inversé

On veut stabiliser un pendule (dans un plan) autour de son équilibre instable (masse vers le haut, tige vers le bas). Le contrôle est l'accélération horizontale du point inférieur de la tige, qui se déplace le long d'une droite et a pour abscisse $X(t)$. La dynamique est donnée par

$$lm\ddot{\theta}(t) = mg\sin(\theta(t)) - um\cos(\theta(t)), \quad \forall t \geq 0,$$

où l est la longueur du pendule, m la masse fixée en $(X(t) + l\sin(\theta(t)), l\cos(\theta(t)))$, $\theta(t)$ l'angle que fait le pendule avec la verticale.

Question 1. Ecrire l'équation du mouvement comme un système du premier ordre.

Correction: On prend $x = (\dot{\theta}, \theta)$ comme variable d'état, et on a alors

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \frac{g}{l}\sin x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\cos x_2}{l} u \\ 0 \end{pmatrix} = f(x, u).$$

Question 2. Linéariser le système autour de l'équilibre vertical $\theta = \dot{\theta} = 0$ et du contrôle $u = 0$. Le système linéarisé est-il contrôlable ? Peut-on ramener à zéro tout état non-nul ?

Correction: Le point d'équilibre correspondant est $x = 0$. L'équation linéarisée est

$$\dot{\xi}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{g}{l} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xi(t) + \begin{pmatrix} -\frac{1}{l} \\ 0 \end{pmatrix} u(t) = A\xi(t) + Bu(t).$$

La matrice de Kalman de ce système linéarisé est

$$K = [B, AB] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l} \end{pmatrix}$$

qui a rang 2 : le système linéarisé est contrôlable. Le point d'équilibre instable (i.e., zéro) est atteignable à partir de ce même point par le contrôle nul. Le théorème 2.17 nous assure que le système de contrôle non-linéaire est localement contrôlable. Il existe donc un voisinage du point d'équilibre instable que l'on peut atteindre à partir de ce point d'équilibre.

Question 3. On considère un contrôle par "retour d'état" (ou feedback), i.e., de la forme $u = \mathbf{c} \cdot \xi$ où $\xi = (\dot{\theta}, \theta)$. Montrer qu'on peut choisir $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ de façon à stabiliser le système linéarisé en $\xi = 0$ (i.e., qu'on peut ramener à 0 tout état initial, éventuellement en temps infini).

Correction: En notant $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^\dagger$, l'équation linéarisée devient

$$\dot{\xi}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{c_1}{l} & \frac{g}{l} - \frac{c_2}{l} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xi(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Les valeurs propres de la matrice sont solutions de

$$X^2 + \frac{c_1}{l}X + \frac{c_2 - g}{l} = 0$$

et on peut évidemment trouver c_1, c_2 tels que ces valeurs propres soient négatives (par exemple, on peut rendre le polynôme égal à $X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2$). Dans ce cas, la contrôle ramène à 0 tout état initial (en temps infini).

Question 4. Que donne le choix de feedback $\mathbf{c} = (2l, g + l)$ pour le système non-linéaire de départ (on supposera que $x_1 = \theta$ reste compris entre $-\pi$ et π) ? Quel est le système linéarisé correspondant ?

Correction: On considère le choix précédent $u = \mathbf{c} \cdot \xi$ avec $\mathbf{c} = (2l, g + l)$ (de sorte que les valeurs propres du système linéarisé valent -1). Le système non-linéaire s'écrit

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \mathbf{c} \cdot x(t)) = \begin{pmatrix} -2x_1 \cos x_2 - x_2 \cos x_2 + \frac{g}{l}(\sin x_2 - x_2 \cos x_2) \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Son linéarisé au voisinage de zéro est le système linéarisé de la question précédente.

Question 5. On suppose qu'on n'observe que l'angle (θ), et non sa vitesse $(\dot{\theta})$, et on demande donc que le contrôle ne dépende que de θ, soit $c_1 = 0$. Montrer que si $c_2 > g$, on peut faire osciller le système linéarisé autour de son point d'équilibre.

Correction: L'équation des valeurs propres de la matrice du système linéarisé est alors $X^2 = \frac{g}{l} - \frac{c_2}{l}$. On ne peut plus avoir deux valeurs propres à parties réelles négatives. Si $c_2 < g$, le système est instable (une v.p. positive). Si $c_2 > g$, les deux valeurs propres sont imaginaires pures. Par exemple, si $c_2 = g + l$, les valeurs propres sont $\pm i$. Le système s'écrit alors $\dot{\xi} = (-\xi_2, \xi_1)$ et les solutions sont de la forme

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \xi(0).$$

On s'attend au mieux à pouvoir faire osciller le système linéarisé autour de son point d'équilibre.

Exercice II. Contrôle de l'amplitude dans un mouvement de rotation

On considère le système de contrôle non-linéaire

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_2(t) + x_1(t)u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + x_2(t)u(t), \end{aligned} \tag{1}$$

pour tout $t \in [0, T]$, $T > 0$, avec un état $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et un contrôle $u \in L^2(0, T; U)$ avec $U = [-1, 1]$.

Question 1. A-t-on existence et unicité de la solution de (1) ? En passant en coordonnées polaires, exprimer $x(t)$ en fonction de $u(t)$ pour la condition initiale $x(0) = (1, 0)$.

Correction: Le contrôle u étant borné, on peut appliquer le théorème de Cauchy–Lipschitz dans sa version mesurable car la fonction $F(t,x) = (-x_2 + x_1 u(t), x_1 + x_2 u(t))$ est globalement Lipschitzienne en x et $F(t,0) \equiv 0$ est intégrable sur $[0,T]$. Pour se convaincre de la première propriété, on peut constater que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\|F(t,x) - F(t,y)\|_{\ell^2}^2 = (1 + u(t)^2)\|x - y\|_{\ell^2}^2 \leq 2\|x - y\|_{\ell^2}^2.$$

On a donc existence et unicité (modulo bien sûr la donnée d'une condition initiale). En passant en coordonnées polaires et en utilisant la condition initiale, on voit en posant $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ que $\frac{\dot r}{r} = u$ puis que la solution est

$$x(t) = e^{\int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s}(\cos(t), \sin(t)).$$

Question 2. Pour plus de clarté, on note $(x_{1,u}, x_{2,u})$ la solution de (1) pour un contrôle $u \in L^2(0,T;U)$. On considère la fonctionnelle $J : L^2(0,T;U) \to \mathbb{R}$ telle que

$$J(u) = \int_0^T u(t)^2\,\mathrm{d}t + x_{1,u}(T)^2.$$

Montrer que la fonctionnelle J est différentiable et calculer son gradient $\nabla J(u)$. Résoudre $\nabla J(u) = 0$ pour $T = 2\pi$. (La fonctionnelle J étant convexe en u, cette solution est le minimiseur de J sur $L^2(0,T;U)$.)

Correction: On considère une perturbation δu du contrôle et on note $(x_{1,u+\delta u}, x_{2,u+\delta u})$ la trajectoire perturbée. Comme

$$x_{1,u+\delta u}(T) = e^{\int_0^t \delta u(s)\,\mathrm{d}s} x_{1,u}(T),$$

on obtient

$$\begin{aligned} J(u + \delta u) = J(u) &+ 2\int_0^T (u(t) + x_{1,u}(T)^2)\delta u(t)\,\mathrm{d}t \\ &+ \left(\int_0^T \delta u(t)^2\,\mathrm{d}t + \left(e^{2\int_0^t \delta u(s)\,\mathrm{d}s} - 1 - 2\int_0^T \delta u(t)\,\mathrm{d}t\right)x_{1,u}(T)^2\right), \end{aligned}$$

et on vérifie que le terme entre parenthèses est un $o(\delta u)$. On en déduit que

$$\nabla J(u)(t) = 2(u(t) + x_{1,u}(T)^2).$$

Si u est solution de $\nabla J(u) = 0$, on voit que u est nécessairement constant. Sa valeur C est, pour $T = 2\pi$, telle que $C = -e^{4\pi C}$, et cette équation a une unique solution C comprise strictement entre -1 et 0.

Exercice III. Modèle proie-prédateur

On suppose qu'on a un milieu peuplé par deux populations, une composée de proies en nombre $x(t)$ et une de prédateurs en nombre $y(t)$. Spontanément, la population de proies a tendance à croître à taux a ($\dot{x} = ax$) tandis que celle de prédateurs, à jeun, décroît à taux c ($\dot{y} = -cy$). Mais en contact l'une de l'autre, la population de proies subit des pertes à taux $-bxy$ (le nombre de rencontres est supposé proportionnel à xy) tandis que la population de prédateurs se requinque, et le système qui régit les populations est alors

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) - bx(t)y(t), \\ \dot{y}(t) = -cy(t) + fx(t)y(t), \end{cases} \qquad \forall t \geq 0, \tag{2}$$

avec des paramètres réels $a, b, c, f > 0$.

Question 1. Montrer que si $x(0) > 0$ et $y(0) > 0$, les trajectoires restent à valeurs positives.

Correction: On est dans le cadre d'application du théorème de Cauchy–Lipschitz (cas localement Lipschitzien. En particulier, les trajectoires ne peuvent pas se croiser. Or $(x_0 e^{at}, 0)$ et $(0, y_0 e^{-ct})$ sont des trajectoires.

Question 2. Trouver une intégrale première du mouvement, c'est-à-dire une fonction $V(x, y)$ constante le long des trajectoires.

Correction: Le système dynamique peut se réécrire

$$\frac{\dot{x}}{ax - bxy} = \frac{\dot{y}}{-cy + fxy} \iff \frac{\dot{x}}{x}(fx - c) = \frac{\dot{y}}{y}(a - by),$$

et on peut en déduire que

$$\frac{d}{dt}(fx - c\ln x) = \frac{d}{dt}(a\ln y - by).$$

Par conséquent, la fonction

$$V(x, y) = fx - c\ln x + by - a\ln y$$

est conservée le long des trajectoires. On observe que cette fonction est convexe, et que ses lignes de niveau sont bornées.

Question 3. On considère une solution maximale $(x(t), y(t))$ de l'équation, avec $x(0) > 0$, $y(0) > 0$, c'est-à-dire définie sur $[0, t_{\max}[$ et qu'on ne peut pas prolonger, soit que $\lim_{t \to t_{\max}} \|(x(t), y(t))\| = +\infty$ soit que $t_{\max} = +\infty$. Montrer que forcément, $t_{\max} = +\infty$, et que la trajectoire est périodique.

Correction: La question précédente montre que pour tout t, $V(x(t), y(t)) = V(x(0), y(0))$. Les lignes de niveau sont compactes, donc les trajectoires ne peuvent pas s'évader à l'infini (en particulier la vitesse reste bornée). Par ailleurs, $(\dot{x}, \dot{y}) = 0$ si et seulement si $y = a/b$, $x = c/f$ qui est le seul point critique de V dans $]0, +\infty[^2$ (et point de minimum), donc soit la solution est $(c/f, a/b)$ (constante), soit la vitesse reste bornée inférieurement. En effet

$$\min_{V(x,y) = V(x(0), y(0))} \|(ax - bxy, -cy + fxy)\| > 0$$

puisque ce min est atteint et que la vitesse n'est jamais nulle en dehors de $(c/f, a/b)$, pour $x, y > 0$. Comme les lignes de niveau de V ont une longueur finie (ce sont des courbes convexes et C^∞), il existe forcément $T > 0$ tel que $(x(T), y(T)) = (x(0), y(0))$, et par unicité, la trajectoire doit alors être T-périodique.

Question 4. Calculer les populations moyennes de proies et de prédateurs au cours du temps. On suppose qu'on prélève un taux fixe (petit) $\varepsilon > 0$ dans chacune des deux populations. Quelle sont les nouvelles populations moyennes et comment évolue la population totale ?

Correction: Soit T la période. La population moyenne de proies est, en utilisant $x = (\dot{y} + cy)/(fy)$,

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{\dot{y}}{fy} + \frac{c}{f}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{f}\frac{\ln y(T) - \ln y(0)}{T} + \frac{c}{f} = \frac{c}{f}.$$

De même la population moyenne de prédateurs est a/b. Si on prélève un taux ε de proies, la nouvelle équation des proies est

$$\dot{x} = (a - \varepsilon)x - bxy,$$

et de même, celle des prédateurs devient

$$\dot{y} = -(c + \varepsilon)y + fxy.$$

Le nouveau taux moyen de proies est $(c+\varepsilon)/f$, le fait de prélever des prédateurs augmente le nombre de proies disponibles (ce qui n'est pas si surprenant). Par contre, on observe aussi que la population totale est $(a-\varepsilon)/b + (c+\varepsilon)/f = (a/b + c/f) + \varepsilon(b-f)/bf$, qui peut augmenter si $b > f$.

Exercice IV. Flots, Gronwall

On considère un champ de vecteurs $v(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. On le suppose mesurable et intégrable en t et uniformément Lipschitzien en x : il existe L tel que

$$|v(t,x) - v(t,y)|_{\mathbb{R}^d} \le L|x-y|_{\mathbb{R}^d},$$

pour tout $t \ge 0$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^d$, où $|\cdot|_{\mathbb{R}^d}$ désigne une norme sur $\mathbb{R}^d$. On définit le flot de v comme l'application $X(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ qui vérifie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}X(t,x) = v(t, X(t,x)), \quad \forall t \ge 0, \\ X(0,x) = x. \end{cases}$$

Question 1. Qu'est-ce qui permet d'affirmer que l'application $X(t,x)$ est bien définie ?

Correction: C'est le théorème de Cauchy–Lipschitz.

Question 2. *Lemme de Gronwall.* On considère $a \in \mathbb{R}$ et $b \ge 0$. On suppose que $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ vérifie pour tout $t \ge 0$,

$$u(t) \le a + b\int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s.$$

Montrer que $u(t) \le ae^{bt}$. En déduire que $X(t,\cdot)$ est e^{Lt}-Lipschitzien.

Correction: On écrit que $\frac{d}{dt}\left(e^{-bt}\int_0^t u\,\mathrm{d}s\right) \leq ae^{-bt}$, si bien que

$$e^{-bt}\int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s \leq \frac{a}{b}(1-e^{-bt}),$$

et par conséquent $u(t) \leq a + b\int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s \leq ae^{bt}$. On applique ensuite le résultat à l'inégalité

$$\begin{aligned}|X(t,x)-X(t,y)|_{\mathbb{R}^d} &\leq |x-y|_{\mathbb{R}^d} + \int_0^t |v(s,X(s,x))-v(s,X(s,y))|_{\mathbb{R}^d}\,\mathrm{d}s \\ &\leq |x-y|_{\mathbb{R}^d} + L\int_0^t |X(s,x))-X(s,y)|_{\mathbb{R}^d}\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Question 3. En déduire que pour tout $t \geq 0$, $x \mapsto X(t,x)$ est une bijection bi-Lipschitzienne (i.e., un $C^{0,1}$-difféomorphisme).

Correction: Surtout ne pas faire de calcul. Remarquer que si on fixe $T > 0$, $(t,x) \mapsto -v(T-t,x)$ est un champ de vecteur L-Lipschitzien sur $[0,T]$. Si on définit $Y(t,y)$ par

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}Y(t,y) = -v(T-t,Y(t,y)), \quad \forall t\in[0,T],\\ Y(0,y)=y,\end{cases}$$

alors pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, on voit facilement que $X(T,Y(T,y)) = y$ (puisque $\dot{Y}(T-t,y) = v(t,Y(T-t,y))$, et par l'unicité dans le théorème de Cauchy–Lipschitz). Enfin, la question précédente assure que $Y(t)$ est e^{Lt}-Lipschitzien : donc $X(T,\cdot)$ est bi-Lipschitzien. Remarquons que :

$$|X(T,x)-X(T,y)|_{\mathbb{R}^d} \geq e^{-LT}|x-y|_{\mathbb{R}^d},$$

i.e., les trajectoires se rapprochent mais restent toujours à distance strictement positive l'une de l'autre.

Question 4. On suppose maintenant que $\nabla v(t,x) = \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(t,x)\right)_{1\leq i,j\leq d}$ est une matrice $d\times d$ L'-Lipschitzienne par rapport à x. Montrer formellement que la matrice $A(t,x) = \nabla X(t,x)$ (de coefficients $A_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$) vérifie l'équation

$$\begin{cases}\frac{\partial A}{\partial t}(t,x) = \nabla v(t,X(t,x))A(t,x), \quad \forall t\geq 0,\\ A(0)=I.\end{cases}$$

Vérifier que cette équation admet une solution unique qui vérifie $|A(t)|_{\mathbb{R}^d} \leq e^{L't}$ pour tout $t \geq 0$ (il s'agit ici de la norme d'opérateur induite, i.e., $|A|_{\mathbb{R}^d} = \sup_{|x|_{\mathbb{R}^d}\leq 1}|Ax|_{\mathbb{R}^d}$).

Correction: Il suffit de dériver l'équation pour obtenir le système différentiel satisfait par A. Comme ∇v est L'-Lipschitzien, on obtient

$$|A(t,x)|_{\mathbb{R}^d} \leq |I|_{\mathbb{R}^d} + \int_0^t |\nabla v(s,X(s,x))|_{\mathbb{R}^d}|A(s,x)|_{\mathbb{R}^d}\,\mathrm{d}s \leq 1 + L'\int_0^t |A(s,x)|_{\mathbb{R}^d}\,\mathrm{d}s,$$

et on conlut grâce au le lemme de Gronwall.

Question 5. Pour $a, b > 0$, on suppose que la fonction $u(t)$ vérifie

$$u(t) \leq a\frac{e^{2bt}-1}{2} + b\int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s.$$

Montrer que $u(t) \leq ae^{bt}(e^{bt}-1)$. En déduire que la matrice A définie à la question précédente est Lipschitzienne en x.

Correction: À nouveau on écrit que

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-bt}\int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s\right) \leq e^{-bt}\tfrac{1}{2}(e^{2bt}-1)a = a\sinh bt,$$

donc $\int_0^t u\,\mathrm{d}s \leq \frac{a}{b}e^{bt}(\cosh bt - 1)$. Par conséquent, on a

$$u(t) \leq ae^{bt}\sinh bt + ae^{bt}(\cosh bt - 1) = ae^{bt}(e^{bt}-1).$$

La matrice A vérifie, outre $|A|_{\mathbb{R}^d} \leq e^{Lt}$,

$$\begin{aligned} A(t,x) - A(t,y) &= \int_0^t A(s,x)\nabla v(s,X(s,x)) - A(s,y)\nabla v(s,X(s,y))\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t [A(s,x)-A(s,y)]\nabla v(s,X(s,x)) + A(s,y)[\nabla v(s,X(s,x)) - \nabla v(s,X(s,y))]\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} |A(t,x)-A(t,y)|_{\mathbb{R}^d} &\leq L\int_0^t |A(s,x)-A(s,y)|_{\mathbb{R}^d}\,\mathrm{d}s + \int_0^t e^{Ls}L'e^{Ls}|x-y|\,\mathrm{d}s \\ &= L'\frac{e^{2Lt}-1}{2L}|x-y| + L\int_0^t |A(s,x)-A(s,y)|_{\mathbb{R}^d}\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

et on peut donc appliquer le résultat précédent avec $a = \frac{L'}{L}|x-y|$, $b = L$. On trouve

$$|A(t,x)-A(t,y)|_{\mathbb{R}^d} \leq \tfrac{L'}{L}e^{Lt}(e^{Lt}-1)|x-y|_{\mathbb{R}^d},$$

ce qui montre que A est bien Lipschitzienne en x.