Cours MAP434 : Contrôle de modèles dynamiques

Séance 3, 20 mars 2019

Optimisation dans les espaces de Hilbert

Exercice I. Contrôle optimal avec critère quadratique

On considère le système de contrôle linéaire

$$\dot{x}_u(t) = Ax_u(t) + Bu(t), \quad \forall t \in [0,T], \qquad x_u(0) = x_0,$$

où x_u est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, u à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, A est une matrice $d \times d$, B une matrice $d \times k$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$. On suppose que le système est contrôlable, i.e., que les matrices A et B satisfont la condition de Kalman. On pose $V := L^2([0,T];\mathbb{R}^k)$ et on introduit la fonctionnelle $J : V \to \mathbb{R}$ telle que $J(u) = \int_0^T |u(t)|^2_{\mathbb{R}^k}\,\mathrm{d}t$ et le sous-ensemble $K = \{u \in V \mid x_u(T) = x_1\}$ où $x_1 \in \mathbb{R}^d$ est une cible donnée. L'objectif est de minimiser la fonctionnelle J sur K.

Question 1. On introduit la matrice $G_T \in \mathbb{R}^{d\times d}$ telle que

$$G_T = \int_0^T e^{(T-s)A} BB^\dagger e^{(T-s)A^\dagger}\,\mathrm{d}s.$$

Vérifier que la matrice G_T est symétrique semi-definie positive puis qu'elle est inversible.

Correction: Il s'agit de résultats vus en cours. La symétrie de G_T est évidente, et la semi-définie positivité résulte de $\Psi^\dagger G_T \Psi = \int_0^T |B^\dagger e^{(T-s)A^\dagger}\Psi|^2_{\mathbb{R}^k}\,\mathrm{d}s \geq 0$ pour tout vecteur $\Psi \in \mathbb{R}^d$. Montrons que la matrice G_T est inversible. Par l'absurde, supposons qu'il existe $\Psi \in \mathbb{R}^d$, $\Psi \neq 0$, dans $\ker(G_T)$. Il vient $0 = \int_0^T |B^\dagger e^{(T-s)A^\dagger}\Psi|^2_{\mathbb{R}^k}\,\mathrm{d}s$, si bien que $\Psi^\dagger e^{(T-s)A}B = 0$ pour tout $s \in [0,T]$. Par la formule de Duhamel, on obtient $\Psi^\dagger(x_u(T) - e^{TA}x_0) = 0$, ce qui montre que $x_u(T)$ est dans un hyperplan affine. Par conséquent, le système n'est pas contrôlable ; d'où la contradiction.

Question 2. On pose $\overline{u}(s) = B^\dagger e^{(T-s)A^\dagger} y$ pour tout $s \in [0,T]$ où $y = G_T^{-1}(x_1 - e^{TA}x_0)$. Montrer que $\overline{u} \in K$, puis que $J(\overline{u}) \leq J(u)$ pour tout $u \in K$.

Correction: Le fait que $\overline{u} \in K$ résulte de la formule de Duhamel :

$$x_{\overline{u}}(T) = e^{TA}x_0 + \int_0^T e^{(T-s)A}B\overline{u}(s)\,\mathrm{d}s = e^{TA}x_0 + G_T y = x_1.$$

Comme par ailleurs $\overline{u} \in V$, on en déduit qu'on a bien $\overline{u} \in K$.

Montrons que $\overline{u}$ est un minimiseur de J sur K. Soit $u \in K$ arbitraire. En posant $\delta = u - \overline{u}$, on constate par linéarité que $\int_0^T e^{(T-s)A} B\delta(s)\,\mathrm{d}s = 0$. En développant, il vient

$$\begin{aligned}
J(u) = J(\overline{u} + \delta) &= \int_0^T |\overline{u}(s) + \delta(s)|^2\,\mathrm{d}s \\
&= J(\overline{u}) + 2\int_0^T \delta(s)^\dagger \overline{u}(s)\,\mathrm{d}s + J(\delta) \\
&= J(\overline{u}) + 2\int_0^T \delta(s)^\dagger (B^\dagger e^{(T-s)A^\dagger} y)\,\mathrm{d}s + J(\delta) \\
&= J(\overline{u}) + 2\int_0^T (e^{(T-s)A} B\delta(s))^\dagger y\,\mathrm{d}s + J(\delta) \\
&= J(\overline{u}) + 2\left(\int_0^T e^{(T-s)A} B\delta(s)\,\mathrm{d}s\right)^\dagger y + J(\delta) = J(\overline{u}) + J(\delta) \geq J(\overline{u}),
\end{aligned}$$

car $J(\delta) \geq 0$. Ceci montre que $J(\overline{u}) \leq J(u)$ pour tout $u \in K$.

Question 3. Montrer que la fonctionnelle J est fortement convexe de paramètre $\alpha = 2$ et que K est un convexe fermé non-vide de V. En déduire que $\overline{u}$ est l'unique minimiseur de J sur K.

Correction: La forte convexité de J résulte de la formule de la médiane :

$$\left\|\frac{y+z}{2}\right\|_V^2 = \frac{\|y\|_V^2 + \|z\|_V^2}{2} - \frac{1}{4}\|y - z\|_V^2, \quad \forall y, z \in V.$$

Comme $J(v) = \|v\|_V^2$, la formule ci-dessus montre que J est fortement convexe de paramètre $\alpha = 2$.

Montrons que K est un sous-ensemble convexe fermé non-vide de V.

— K est non-vide car $\overline{u} \in K$;

— K est convexe car cet ensemble est défini par une contrainte égalité qui dépend linéairement du contrôle u ;

— enfin, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de K qui converge vers u dans V, on a

$$x_1 - e^{TA}x_0 = \int_0^T e^{(T-s)A} Bu_n(s)\,\mathrm{d}s \to \int_0^T e^{(T-s)A} Bu(s)\,\mathrm{d}s,$$

ce qui montre que la limite u amène x_0 en x_1 en temps T, i.e., $u \in K$; le sous-ensemble K est donc bien fermé.

Le théorème 3.8 du cours nous permet de conclure : J admet un unique minimiseur sur K.

Question 4. Nous allons maintenant retrouver l'expression du contrôle optimal $\overline{u}$ obtenue à la question 2 en utilisant l'inéquation d'Euler (proposition 3.11 du cours). Montrer que l'inéquation d'Euler implique que le minimiseur $\overline{u}$ de J sur K vérifie $(\overline{u}, h)_V = 0$ pour tout $h \in H$ où H est un sous-espace de V de codimension finie. Conclure.

Correction: En utilisant l'inéquation d'Euler, la convexité de J et le fait que $\nabla J(\overline{u}) = \overline{u}$, on obtient la condition nécessaire et suffisante d'optimalité suivante :

$$(\nabla J(\overline{u}), u - \overline{u})_V = (\overline{u}, u - \overline{u})_V \geq 0, \quad \forall u \in K.$$

Or, lorsque u décrit K, le vecteur $u - \overline{u}$ décrit le sous-espace vectoriel

$$H = \left\{ u \in V \mid \int_0^T e^{(T-s)A} Bu(s)\,\mathrm{d}s = 0 (\in \mathbb{R}^d) \right\}.$$

On a donc $(\overline{u}, h)_V \geq 0$ pour tout $h \in H$ et comme H est un sous-espace vectoriel, on peut considérer les vecteurs h et $-h$ dans l'inégalité ci-dessus, ce qui montre que $\overline{u} \in H^\perp$. Soit $(e_i)_{1\leq i\leq d}$ une base cartésienne de $\mathbb{R}^d$. Posons $y_i(t) = B^\dagger e^{(T-t)A^\dagger} e_i$; on a $y_i \in L^2([0,T];\mathbb{R}^k) = V$ pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$ et $H = (\mathrm{vect}(y_i)_{1\leq i\leq d})^\perp$. Par suite, $\overline{u} \in \mathrm{vect}(y_i)_{1\leq i\leq d}$ (qui est de dimension finie donc fermé) ; en d'autres termes, il existe un vecteur $y \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\overline{u}(t) = B^\dagger e^{(T-t)A^\dagger} y, \quad \forall t \in [0,T].$$

Finalement, le vecteur $y \in \mathbb{R}^d$ s'obtient en imposant que $x_{\overline{u}}(T) = x_1$, et par la formule de Duhamel, on retrouve bien l'expression obtenue à la question 2.

Exercice II. Contrôle optimal pour une EDP

Soit $\Omega =]0,1[$. On pose $V := H_0^1(\Omega)$ (fonctions de carré sommable sur Ω, qui sont nulles en 0 et en 1 et dont les dérivées (faibles) sont de carré sommable sur Ω) et $Y := L^2(\Omega)$. Soit $f \in L^2(\Omega)$ fixée. Pour tout $y \in Y$, on note $v := \Psi_f(y)$ l'unique solution dans V du problème

$$-v'' = f + y \quad \text{dans } \Omega. \tag{1}$$

Le problème de contrôle optimal consiste minimiser la fonctionnelle $J : Y \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $y \in Y$,

$$J(y) = \int_\Omega |\Psi_f(y)(x) - v_0(x)|^2 dx + \int_\Omega |y(x)|^2 dx,$$

où $v_0 \in Y$ est une cible donnée. Il s'agit d'un problème de contrôle optimal où on cherche à agir par le biais de la fonction $y \in Y$ de façon à rapprocher le plus possible la solution du problème (1) de la cible v_0. Le deuxième terme dans la fonctionnelle J signifie qu'on réalise un compromis entre cet objectif et l'ampleur du contrôle y. On rappelle la formulation variationnelle de (1) :

$$\int_\Omega \Psi_f(y)' w'\, dx = \int_\Omega (f + y) w\, dx, \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega),$$

ainsi que l'inégalité de Poincaré : il existe une constante C_P telle que

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|w'\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Question 1. Montrer que, pour tout $(y, z) \in Y \times Y$, on a $\Psi_f(y) - \Psi_f(z) = \Psi_0(y - z)$. Montrer que l'application Ψ_0 est linéaire continue de Y dans Y.

Correction: Soit $y, z \in Y$. Il est clair que $\Psi_f(y) - \Psi_f(z) \in V$. De plus,

$$-(\Psi_f(y) - \Psi_f(z))'' = (f + y) - (f + z) = y - z.$$

D'où $\Psi_f(y) - \Psi_f(z) = \Psi_0(y-z)$. La linéarité de l'application Ψ_0 est évidente. Quant à la continuité, pour tout $z \in Y$, comme $-\Psi_0(z)'' = z$ dans Ω, en intégrant par parties il vient

$$\|\Psi_0(z)'\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega z\Psi_0(z) \leq C_P\|z\|_{L^2(\Omega)}\|\Psi_0(z)'\|_{L^2(\Omega)},$$

grâce à l'inégalité de Cauchy–Schwarz puis à l'inégalité de Poincaré. Par suite, $\|\Psi_0(z)'\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P\|z\|_{L^2(\Omega)}$ et en utilisant à nouveau l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\|\Psi_0(z)\|_Y \leq C_P\|\Psi_0(z)'\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P^2\|z\|_Y.$$

Ceci montre la continuité de l'application Ψ_0.

Question 2. Montrer que la fonctionnelle J est différentiable sur Y avec, pour tout $y, z \in Y$,

$$\langle J'(y), z\rangle_{Y',Y} = 2\int_\Omega (\Psi_f(y)(x) - v_0(x))\Psi_0(z)(x)dx + 2\int_\Omega y(x)z(x)dx.$$

Correction: Pour tout $y, \delta \in Y$, il vient

$$\begin{aligned}
J(y+\delta) &= \int_\Omega |\Psi_f(y+\delta)(x) - v_0(x)|^2dx + \int_\Omega |y(x)+\delta(x)|^2dx \\
&= \int_\Omega |\Psi_f(y)(x) + \Psi_0(\delta)(x) - v_0(x)|^2dx + \int_\Omega |y(x)+\delta(x)|^2dx \\
&= J(y) + 2\Big\{\int_\Omega (\Psi_f(y)(x) - v_0(x))\Psi_0(\delta)(x)dx + \int_\Omega y(x)\delta(x)dx\Big\} \\
&\quad + \Big\{\int_\Omega |\Psi_0(\delta)(x)|^2dx + \int_\Omega |\delta(x)|^2dx\Big\},
\end{aligned}$$

et le dernier terme entre accolades est un $o(\|\delta\|_Y)$ car il est majoré par $(1+C_P^4)\|\delta\|_Y^2$. Il reste à vérifier que le premier terme entre accolades définit bien une application linéaire continue sur Y, ce qui est le cas car en utilisant la question précédente, il vient

$$2\left|\int_\Omega (\Psi_f(y)(x) - v_0(x))\Psi_0(\delta)(x)dx + \int_\Omega y(x)\delta(x)dx\right| \leq 2(C_P^2\|\Psi_f(y) - v_0\|_Y + \|y\|_Y)\|\delta\|_Y.$$

Question 3. Montrer que J est fortement convexe sur Y et en déduire l'existence et l'unicité du minimiseur global de J sur Y.

Correction: Pour tout $y, z \in Y$, on constate que

$$\begin{aligned}
\langle J'(y) - J'(z), y-z\rangle_{Y',Y} &= 2\int_\Omega (\Psi_f(y)(x) - \Psi_f(z)(x))\Psi_0(y-z)(x)dx + 2\int_\Omega |y(x)-z(x)|^2dx \\
&= 2\int_\Omega |\Psi_0(y-z)(x)|^2dx + 2\int_\Omega |y(x)-z(x)|^2dx \\
&\geq 2\int_\Omega |y(x)-z(x)|^2dx = 2\|y-z\|_Y^2,
\end{aligned}$$

d'où la forte convexité de J de paramètre $\alpha = 2$. L'existence et l'unicité du minimiseur global de J sur Y résulte du théorème 3.8 du poly, la continuité de J sur Y résultant de sa différentiabilité.

Question 4. Pour $y \in Y$, on note $\theta(y)$ l'unique solution dans V du problème $-\theta(y)'' = \Psi_f(y) - v_0$ dans Ω. Montrer que le représentant de Riesz de $J'(y)$ dans Y est la fonction $2(\theta(y) + y)$. On dit que $\theta(y)$ est *l'état adjoint* de $\Psi_f(y)$. En déduire le système d'EDPs vérifié par le couple optimal $(\bar{y}, \bar{v})$ où $\bar{v} = \Psi_f(\bar{y})$.

Correction: Par construction, il vient pour tout $z \in Y$,

$$\begin{aligned}
\langle J'(y), z\rangle_{Y',Y} &= 2\int_\Omega (\Psi_f(y)(x) - v_0(x))\Psi_0(z)(x)dx + 2\int_\Omega y(x)z(x)dx \\
&= 2\int_\Omega (-\theta(y)'')(x)\Psi_0(z)(x)dx + 2\int_\Omega y(x)z(x)dx \\
&= 2\int_\Omega \theta(y)'(x)\Psi_0(z)'(x)dx + 2\int_\Omega y(x)z(x)dx \\
&= 2\int_\Omega \theta(y)(x)(-\Psi_0(z)'')(x)dx + 2\int_\Omega y(x)z(x)dx \\
&= 2\int_\Omega \theta(y)(x)z(x)dx + 2\int_\Omega y(x)z(x)dx = 2\int_\Omega (\theta(y) + y)(x)z(x)dx.
\end{aligned}$$

Ceci montre que

$$\nabla J(y) = 2(\theta(y) + y).$$

La condition d'optimalité signifie donc que $\theta(\bar{y}) = -\bar{y}$ où $\bar{y}$ est le contrôle optimal. En conclusion, le couple optimal $(\bar{y}, \bar{v})$ vérifie

$$\bar{y}'' = -\theta(\bar{y})'' = \bar{v} - v_0, \qquad -\bar{v}'' = f + \bar{y}.$$

On peut éliminer $\bar{v}$, ce qui donne (formellement) $-\bar{y}'''' - \bar{y} = f + v_0''$; c'est une EDP d'ordre 4 en $\bar{y}$, avec les conditions aux limites $\bar{y} = 0$ et $\bar{y}'' = -v_0$ en $x = 0$ et en $x = 1$.

Exercice III. Etude d'une EDP non-linéaire

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$, et $f \in L^2(\Omega)$. L'objectif est de montrer, en utilisant les outils de l'optimisation, l'existence et l'unicité de la solution de l'EDP non-linéaire

$$-\Delta u + u^3 = f \quad \text{dans } \Omega, \tag{2a}$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{2b}$$

On pose $V = H_0^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid \nabla v \in L^2(\Omega)^d,\ v_{|\partial\Omega} = 0\}$, qu'on équipe de la norme $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^d}$. La formulation variationnelle du problème (2) consiste à chercher $u \in V$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx + \int_\Omega u^3(x)v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx, \qquad \forall v \in V. \tag{3}$$

On introduit la fonctionnelle $J : V \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $v \in V$,

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx + \frac{1}{4}\int_\Omega |v(x)|^4 dx.$$

On admet l'inégalité de Sobolev suivante : il existe une constante σ_Ω telle que, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|v\|_{L^4(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v(x)|^4 dx\right)^{1/4} \leq \sigma_\Omega \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

Cette inégalité signifie que l'espace $H_0^1(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^4(\Omega)$. (L'inégalité de Sobolev est vraie plus généralement pour tout $v \in H^1(\Omega)$ à condition d'utiliser dans le majorant la norme $\|v\|_{H^1(\Omega)}$.) Elle montre, en particulier, que la fonctionnelle J est bien définie.

Question 1. Montrer que la fonctionnelle J est α-convexe sur V. (Indication : voir J comme la somme d'une fonctionnelle α-convexe et d'une fonctionnelle convexe.)

Correction: On constate que $J(v) = J_1(v) + J_2(v)$ avec

$$J_1(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)^d}, \qquad J_2(v) = \frac{1}{4}\|v\|^4_{L^4(\Omega)}.$$

La fonctionnelle J_1 est clairement 1-convexe sur $V = H_0^1(\Omega)$ équipé de la norme $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^d}$ puisque, grâce à la formule de la médiane, il vient

$$\begin{aligned}
J_1\left(\frac{v+w}{2}\right) &= \frac{1}{8}\|\nabla(v+w)\|^2_{L^2(\Omega)^d} \\
&= \frac{1}{4}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{4}\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)^d} - \frac{1}{8}\|\nabla(v-w)\|^2_{L^2(\Omega)^d} \\
&= \frac{1}{2}J_1(v) + \frac{1}{2}J_1(w) - \frac{1}{8}\|v-w\|^2_V.
\end{aligned}$$

De plus, la fonction $\mathbb{R} \ni t \mapsto |t|^4 \in \mathbb{R}$ étant convexe, on obtient, pour tout $v, w \in V$, $\theta \in [0,1]$ et $x \in \Omega$,

$$|\theta v(x) + (1-\theta)w(x)|^4 \leq \theta|v(x)|^4 + (1-\theta)|w(x)|^4.$$

En intégrant sur Ω, on déduit que J_2 est convexe sur V. Pour tout $v, w \in V$, on a donc

$$\begin{aligned}
J_1\left(\frac{v+w}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}J_1(v) + \frac{1}{2}J_1(w) - \frac{1}{8}\|v-w\|^2_V, \\
J_2\left(\frac{v+w}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}J_2(v) + \frac{1}{2}J_2(w),
\end{aligned}$$

et en sommant membre à membre ces deux inégalités, on voit que la fonctionnelle J est 1-convexe sur V.

Question 2. On rappelle l'inégalité de Hölder : soit p, q deux réels tels que $1 \leq p, q \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; alors, pour tout $f \in L^p(\Omega)$ et tout $g \in L^q(\Omega)$, on a

$$\left|\int_\Omega f(x)g(x)dx\right| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

(L'inégalité de Cauchy–Schwarz est un cas particulier de l'inégalité de Hölder avec $p = q = 2$.) En déduire que, pour tout $v, w \in L^4(\Omega)$,

$$\left| \int_\Omega v^3(x) w(x) dx \right| \leq \|v\|^3_{L^4(\Omega)} \|w\|_{L^4(\Omega)}.$$

puis que, pour tout $v \in V$, l'application linéaire $L : V \ni w \longmapsto \int_\Omega v^3(x) w(x) dx \in \mathbb{R}$ est continue.

Correction: On applique l'inégalité de Hölder à $f = v^3$ et $g = w$ avec $p = \frac{4}{3}$ et $q = 4$ (si bien que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Comme

$$\|v^3\|_{L^{4/3}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v(x)|^{3\frac{4}{3}} \right)^{3/4} = \|v\|^3_{L^4(\Omega)},$$

on obtient

$$\left| \int_\Omega v^3(x) w(x) dx \right| \leq \|v\|^3_{L^4(\Omega)} \|w\|_{L^4(\Omega)}.$$

On déduit de l'injection de Sobolev que, pour tout $v, w \in V$,

$$|L(w)| \leq \|v\|^3_{L^4(\Omega)} \|w\|_{L^4(\Omega)} \leq (\sigma^4_\Omega \|v\|^3_V) \|w\|_V,$$

ce qui montre la continuité de l'application linéaire L sur V.

Question 3. Montrer que J est différentiable sur V et préciser l'action de sa différentielle.

Correction: On constate que

$$\begin{aligned} J(v+w) &= \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v(v) + \nabla w(x)|^2 dx + \frac{1}{4} \int_\Omega |v(x) + w(x)|^4 dx \\ &= J(v) + \Big\{ \int_\Omega \nabla v(x) \cdot \nabla w(x) dx + \int_\Omega v^3(x) w(x) dx \Big\} \\ &\quad + \Big\{ \frac{3}{2} \int_\Omega v^2(x) w^2(x) dx + \int_\Omega v(x) w^3(x) dx + \frac{1}{4} \int_\Omega w^4(x) dx \Big\}. \end{aligned}$$

L'application linéaire $\tilde{L} : w \ni V \mapsto \int_\Omega \nabla v(x) \cdot \nabla w(x) dx + \int_\Omega v^3(x) w(x) dx \in \mathbb{R}$ est continue sur V de par la question précédente. Il reste à montrer que le dernier terme entre accolades du membre de droite est un $o(\|w\|_V)$. On constate que

$$\begin{aligned} \int_\Omega v^2(x) w^2(x) dx &\leq \left(\int_\Omega v^4(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega w^4(x) dx \right)^{1/2} \\ &= \|v\|^2_{L^4(\Omega)} \|w\|^2_{L^4(\Omega)} && \text{(Cauchy–Schwarz)} \\ \int_\Omega v(x) w^3(x) dx &\leq \|v\|_{L^4(\Omega)} \|w\|^3_{L^4(\Omega)} && \text{(Hölder)} \\ \int_\Omega w^4(x) dx &= \|w\|^4_{L^4(\Omega)} && \text{(définition de } \|w\|_{L^4(\Omega)}) \end{aligned}$$

si bien qu'en utilisant l'injection de Sobolev, il vient

$$\frac{1}{\|w\|_V}\left\{\frac{3}{2}\int_\Omega v^2(x)w^2(x)dx+\int_\Omega v(x)w^3(x)dx+\frac{1}{4}\int_\Omega w^4(x)dx\right\}$$
$$\leq \frac{3}{2}\sigma_\Omega^4\|v\|_V^2\|w\|_V+\sigma_\Omega^4\|v\|_V\|w\|_V^2+\frac{1}{4}\sigma_\Omega^4\|w\|_V^3.$$

Comme le majorant tend vers zéro lorsque w tend vers zéro dans V, on en déduit que la fonctionnelle J est bien différentiable sur V et que, pour tout $v, w \in V$,

$$\langle J'(v), w\rangle_{V',V} = \int_\Omega \nabla v(x)\cdot\nabla w(x)dx + \int_\Omega v^3(x)w(x)dx.$$

Question 4. Montrer l'existence et l'unicité dans $H_0^1(\Omega)$ de la solution du problème (3).

Correction: On rajoute le terme linéaire $-\int_\Omega f(x)v(x)dx$ à la fonctionnelle J, ce qui donne

$$J_f(v) = J(v) - \int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

La fonctionnelle J_f est α-convexe sur V et sa différentielle est telle que, pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$,

$$\langle J_f'(v), w\rangle_{V',V} = \int_\Omega \nabla v(x)\cdot\nabla w(x)dx + \int_\Omega v^3(x)w(x)dx - \int_\Omega f(x)w(x)dx.$$

Ainsi, $u \in H_0^1(\Omega)$ est solution du problème (3) si et seulement si $J_f'(u) = 0$ dans V', c'est-à-dire, si et seulement si u est minimiseur global de J_f sur $H_0^1(\Omega)$ (proposition 3.10 du cours). Le problème (3) admet donc une et une seule solution (théorème 3.8 du cours).