Cours MAP434 : Contrôle de modèles dynamiques

Séance 4, 14 mai 2018

Le système linéaire-quadratique

Exercice I. Contrôle de la vitesse avec critère quadratique

Soit $T > 0$ fixé. On considère le système de contrôle linéaire dans $\mathbb{R}$ ($d = k = 1$)

$$\dot{x}_u(t) = u(t), \quad \forall t \in [0,T], \qquad x_u(0) = x_0,$$

avec $x_0 \in \mathbb{R}$ donné, et on veut minimiser le critère

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T (x_u(t)^2 + u(t)^2) dt.$$

Question 1. Déterminer la trajectoire optimale, le contrôle optimal et la valeur minimale atteinte par le critère.

Correction: Il s'agit d'un problème linéaire-quadratique (LQ) avec cible $\xi(t) \equiv 0$, i.e., en reprenant les notations du cours, on a bien $\dot{x}_u(t) = Ax_u(t) + Bu(t)$ et $J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T (u(t)^\dagger R u(t) + x_u(t)^\dagger Q x_u(t))\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}x_u(T)^\dagger D x_u(T)$ avec $A = 0$, $B = 1$, $R = 1$, $Q = 1$ et $D = 0$. D'après le cours (théorème 4.5), le contrôle optimal est donné par $u(t) = -R^{-1}B^\dagger p(t) = -p(t)$, et on obtient alors les équations suivantes pour l'état et l'état adjoint :

$$\dot{x}(t) = u(t) = -p(t), \quad \dot{p}(t) = -x(t), \quad x(0) = 0, \quad p(T) = 0,$$

d'où $\ddot{x}(t) = x(t)$, et on trouve facilement la solution la solution sous la forme

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cosh(t) - p(0)\sinh(t), \\ p(t) &= -x_0 \sinh(t) + p(0)\cosh(t), \\ u(t) &= x_0 \sinh(t) - p(0)\cosh(t). \end{aligned}$$

Il reste à déterminer $p(0)$. Pour cela, on utilise le fait que $p(T) = 0$. Il vient $0 = p(T) = -x_0 \sinh(T) + p(0)\cosh(T)$. Ainsi, $p(0) = x_0 \tanh(T)$. Finalement,

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cosh(T)^{-1}\cosh(T-t), \\ p(t) &= x_0 \cosh(T)^{-1}\sinh(T-t), \\ u(t) &= x_0 \cosh(T)^{-1}\sinh(t-T). \end{aligned}$$

La valeur minimale du croitère est

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\frac{x_0^2}{\cosh(T)^2}\int_0^T (\cosh(T-t)^2 + \sinh(T-t)^2)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\frac{x_0^2}{\cosh(T)^2}\frac{1}{2}\sinh(2T) = \frac{1}{2}x_0^2\tanh(T). \end{aligned}$$

Question 2. Résoudre l'equation de Riccati, écrire le contrôle optimal comme un feedback et déterminer (à nouveau) la valeur minimale atteinte par le critère.

Correction: L'équation de Riccati associée au problème LQ défini par les matrices A, B, R, Q est (cf. le théorème 4.15 du poly)

$$\dot{P}(t) = -A^\dagger P(t) - P(t)A + P(t)BR^{-1}B^\dagger P(t) - Q, \quad \forall t \in [0,T], \qquad P(T) = D.$$

La solution de cette équation permet de calculer :
- l'état adjoint défini par $p(t) = P(t)x(t)$;
- le contrôle optimal comme un feedback : $u(t) = -R^{-1}B^\dagger P(t)x(t)$;
- la valeur minimale du critère $J(u) = \frac{1}{2}x_0^\dagger P(0)x_0$.

Dans notre cas, $P(t)$ est à valeurs scalaires et on a

$$\dot{P}(t) = P(t)^2 - 1, \quad \forall t \in [0,T], \qquad P(T) = 0.$$

On obtient

$$\log\left(\frac{1+P(t)}{1-P(t)}\right) = 2(T-t),$$

d'où

$$P(t) = \frac{e^{2T} - e^{2t}}{e^{2T} + e^{2t}} = \tanh(T-t).$$

On en déduit le contrôle optimal sous forme de feedback :

$$u(t) = -\frac{e^{2T} - e^{2t}}{e^{2T} + e^{2t}}x(t),$$

et la valeur minimale atteinte par le critère

$$J(u) = \frac{1}{2}x_0^2\frac{e^{2T} - 1}{e^{2T} + 1} = \frac{1}{2}x_0^2\tanh(T),$$

qui correspond bien à la réponse trouvée à la question précédente.

Exercice II. Contrôle de l'accélération avec critère non-linéaire

On considère un véhicule se déplaçant en ligne droite suivant le système

$$\ddot{x}_u(t) = u(t), \quad \forall t \in [0,T], \qquad x_u(0) = \dot{x}_u(0) = 0.$$

En posant $X_u = (x_u, \dot{x}_u)$, on obtient

$$\dot{X}_u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X_u + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u = AX_u + Bu, \qquad X_u(0) = 0.$$

On cherche à maximiser la position d'arrivée au temps T, tout en minimisant l'énergie fournie. Cela nous amène à considérer le critère suivant sur l'espace de Hilbert $V = L^2([0,T];\mathbb{R})$:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u(t)^2 dt - f(x_u(T)),$$

où f est une fonction de classe C^1, concave et croissante.

Question 1. Pourquoi a-t-on existence et unicité du contrôle optimal ? On le notera $\overline{u}$.

Correction: On a vu en cours que l'application $u \mapsto \frac{1}{2}\int_0^T u(t)^2 dt$ est 1-convexe sur V. Par ailleurs, l'application $u \mapsto x_u(T)$ est linéaire, si bien que par concavité de la fonction f, l'application $u \mapsto -f(x_u(T))$ est convexe en u. La somme d'une application 1-convexe et d'une application convexe étant 1-convexe, on en déduit que J est 1-convexe sur V. Enfin, la fonction f étant continue, on déduit facilement que la fonctionnelle J est continue. Le théorème 3.8 permet de conclure à l'existence et unicité du minimiseur de J sur V.

Question 2. On introduit l'état adjoint $p = (p_1, p_2) : [0,T] \to \mathbb{R}^2$ tel que $\dot{p}(t) = -A^\dagger p(t)$ et $p(T) = (f'(X_{\overline{u},1}(T)), 0)$. Montrer que $\overline{u}(t) = p_2(t)$ pour tout $t \in [0,T]$.

Correction: On note $\nabla J(u) \in V$ le gradient du critère J en un contrôle $u \in V$. La proposition 3.10 nous dit que le contrôle optimal $\overline{u}$ est caractérisé par l'équation d'Euler $\nabla J(\overline{u}) = 0$. Pour calculer le gradient de J en $\overline{u}$, nous considérons une perturbation du contrôle $\delta v \in V$. En posant $Y_{\delta v} = X_{\overline{u}+\delta v} - X_{\overline{u}}$, on obtient par linéarité $\dot{Y}_{\delta v}(t) = AY_{\delta v}(t) + B\delta v(t)$, pour tout $t \in [0,T]$, et $Y_{\delta v}(0) = 0$. On a $Y_{\delta v}(t) = O(\delta v)$ uniformément sur $[0,T]$. Par conséquent, il vient

$$\begin{aligned} J(\overline{u} + \delta v) &= \frac{1}{2}\int_0^T (\overline{u}(t) + \delta v(t))^2 dt - f(X_{\overline{u}+\delta v,1}(T)) \\ &= J(\overline{u}) + \int_0^T \overline{u}(t)\delta v(t) dt - f'(X_{\overline{u},1}(T))Y_{\delta v,1}(T) + o(\delta v). \end{aligned}$$

En introduisant l'état adjoint et comme $Y_{\delta v}(0) = 0$, on constate que

$$\begin{aligned} f'(X_{\overline{u},1}(T))Y_{\delta v,1}(T) = p(T)^\dagger Y_{\delta v}(T) &= \int_0^T \Big(\dot{p}(t)^\dagger Y_{\delta v}(t) + p(t)^\dagger \dot{Y}_{\delta v}(t)\Big) dt \\ &= \int_0^T p(t)^\dagger(-AY_{\delta v}(t) + \dot{Y}_{\delta v}(t))dt = \int_0^T p(t)^\dagger B\delta v(t) dt. \end{aligned}$$

On trouve donc

$$J(\overline{u} + \delta v) = J(\overline{u}) + \int_0^T (\overline{u}(t) - B^\dagger p(t))^\dagger \delta v(t) dt + o(\delta v),$$

et le deuxième terme du membre de droite définit bien une forme linéaire continue sur V. On a donc $\nabla J(\overline{u}) = \overline{u}(t) - B^\dagger p(t)$, ou encore en utilisant la forme de B, $\nabla J(\overline{u}) = \overline{u}(t) - p_2(t)$. L'équation d'Euler implique finalement que $\overline{u}(t) = p_2(t)$ pour tout $t \in [0,T]$.

Question 3. Dans le cas $f(x) = x$, trouver l'état adjoint, le contrôle optimal et la distance parcourue par le véhicule.

Correction: Dans ce cas, on écrit $\dot{p}_1(t) = 0$, $\dot{p}_2(t) = -p_1(t)$, $p_1(T) = 1$, $p_2(T) = 0$, d'où $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = (T - t)$. Le contrôle optimal est d'après la question précédente égal à $\overline{u}(t) = p_2(t) = (T-t)$. La trajectoire optimale est donnée par $\ddot{x}_{\overline{u}}(t) = (T-t)$, donc $x_{\overline{u}}(t) = Tt^2/2 - t^3/6$ si bien que la distance parcourue est $x_{\overline{u}}(T) = T^3/3$.

Exercice III. Oscillateur harmonique

On considère le système de contrôle linéaire

$$\ddot{x}(t) + x(t) = u(t), \quad \forall t \in [0,T], \qquad x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = v_0.$$

Ce système décrit le mouvement rectiligne d'un point matériel (de masse unité) sous l'action d'une force de rappel, $-x(t)$, et d'une force extérieure donnée par le contrôle, $u(t)$.

Question 1. Écrire le problème comme un système différentiel d'ordre un (on notera $X(t) = (x(t), v(t))$ le vecteur d'état). Ce système est-il contrôlable ? Par la suite, il sera commode de travailler en variables complexes en posant $z(t) = x(t) + iv(t)$ (i.e., on identifie le plan (x, v) à $\mathbb{C}$). Vérifier que $z(t) = e^{-it}z_0 + \int_0^t ie^{i(s-t)}u(s)\,\mathrm{d}s$ où $z_0 = x_0 + iv_0$.

Correction: On obtient $\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour la contrôlabilité, on utilise le critère de Kalman. La matrice

$$C = (B\ AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 2, ce qui montre que le système est contrôlable. Enfin, l'expression de z résulte de la formule de Duhamel car on a $\dot{z}(t) = -iz(t) + iu(t)$.

Question 2. Pour la suite de l'exercice, on fixe $T = \pi$. On souhaite minimiser dans $V = L^2([0,T]; \mathbb{R})$ le critère

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u(t)^2\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\Big(x(T)^2 + v(T)^2\Big).$$

Formuler ce problème sous forme de système LQ. A-t-on existence et unicité du contrôle optimal $u_* \in V$? On note $p = (p_x, p_v)$ l'état adjoint et on pose $q(t) = p_x(t) + ip_v(t)$, $\forall t \in [0,T]$. Exprimer $u_*(t)$ en fonction de $q(t)$ et de $\overline{q}(t)$ (la barre désigne le complexe conjugué).

Correction: On obtient $R = 1$, $Q = 0$ (dans $\mathbb{R}^{2\times 2}$) et $D = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Comme $R > 0$, les résultats du cours nous permettent d'affirmer l'existence et l'unicité du contrôle optimal $u_* \in V$. Enfin, d'après le cours, le contrôle optimal est donné par $u_*(t) = -R^{-1}B^\dagger p(t) = -p_v(t)$. D'où $u_*(t) = -\frac{1}{2i}(q(t) - \overline{q}(t))$.

Question 3. Exprimer $q(t)$ en fonction de t et de $z(T)$, puis la trajectoire optimale $z(t)$ en fonction de t, z_0, $z(T)$ et $\overline{z}(T)$. En déduire $z(T)$ en fonction de z_0. Écrire l'équation de la trajectoire optimale issue du point $z_0 = 1$ et l'esquisser dans le plan (x, v).

Correction: D'après le cours, l'état adjoint $p(t)$ est tel que $\dot{p}(t) = -A^\dagger p(t) = Ap(t)$ sur $[0,T]$ et $p(T) = X(T)$. En utilisant la représentation complexe, on obtient $\dot{q}(t) = -iq(t)$ et $q(T) = z(T)$, d'où

$$q(t) = e^{-i(t-T)}z(T) = -e^{-it}z(T) \qquad \text{car } T = \pi.$$

Concernant la trajectoire optimale, on a

$$\begin{aligned}
z(t) &= e^{-it} z_0 + \int_0^t i e^{i(s-t)} u_*(s)\,\mathrm{d}s \\
&= e^{-it} z_0 - \tfrac{1}{2i} \int_0^t i e^{i(s-t)} (q(s) - \overline{q}(s))\,\mathrm{d}s \\
&= e^{-it} z_0 - \tfrac{1}{2i} \int_0^t i e^{i(s-t)} (-e^{-is} z(T) + e^{is} \overline{z}(T))\,\mathrm{d}s \\
&= e^{-it} z_0 + \tfrac{1}{2} e^{-it} t z(T) - \tfrac{1}{2i} e^{-it} \overline{z}(T) \int_0^t i e^{2is}\,\mathrm{d}s \\
&= e^{-it} z_0 + \tfrac{1}{2} e^{-it} t z(T) - \tfrac{1}{2} \sin(t) \overline{z}(T).
\end{aligned}$$

En $t = T = \pi$, il vient

$$z(T) = -\frac{1}{1 + \frac{\pi}{2}} z_0.$$

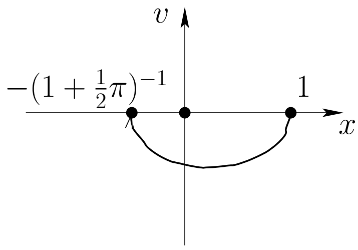
Pour $z_0 = 1$, $z(T)$ est réel et on obtient

$$z(t) = e^{-it} \frac{1 + \frac{1}{2}(\pi - t)}{1 + \frac{1}{2}\pi} + \frac{\frac{1}{2}\sin(t)}{1 + \frac{1}{2}\pi},$$

ce qui donne comme trajectoire optimale

$$\begin{aligned}
x(t) &= (1 + \tfrac{1}{2}\pi)^{-1} \Big(\cos(t)(1 + \tfrac{1}{2}(\pi - t)) + \tfrac{1}{2}\sin(t) \Big), \\
v(t) &= -(1 + \tfrac{1}{2}\pi)^{-1} \sin(t)(1 + \tfrac{1}{2}(\pi - t)).
\end{aligned}$$

La trajectoire optimale est esquissée ci-dessous ; noter que la vitesse v est minimale en $t_1 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan(t_1) = 2(1+\frac{1}{2}(\pi-t_1))$ et que x s'annule en $t_2 \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ tel que $\tan(t_2) = -2(1+\frac{1}{2}(\pi-t_2))$.



Question 4. Montrer que $q(t) = a(t)z(t) + (c(t) + id(t))\overline{z}(t)$ où a, c, d sont trois fonctions de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$ à exprimer en fonction de $\alpha(t) = 1 + \frac{1}{2}(\pi - t)$, $\beta(t) = \frac{1}{2}\sin(t)$ et $\cos(t)$. En déduire l'expression de la matrice $P(t) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ telle que $p(t) = P(t)X(t)$ et écrire le contrôle optimal en boucle fermée. Écrire l'équation de Riccati satisfaite par P et en déduire les équations différentielles satisfaites par les fonctions a, c et d.

Correction: On exprime d'abord $z(t)$ en fonction de $z(T)$ et de $\overline{z}(T)$:

$$z(t) = -e^{-it}\alpha(t)z(T) - \beta(t)\overline{z}(T),$$

où on a posé comme suggéré $\alpha(t) = 1 + \frac{1}{2}(\pi - t)$ et $\beta(t) = \frac{1}{2}\sin(t)$. En conjuguant, il vient

$$\overline{z}(t) = -e^{it}\alpha(t)\overline{z}(T) - \beta(t)z(T).$$

On élimine $\overline{z}(T)$ et on obtient (on vérifie que $(\alpha^2 - \beta^2)(t) > 0$, $\forall t \in [0,T]$)

$$z(T) = \frac{1}{(\alpha^2 - \beta^2)(t)}\Big(- e^{it}\alpha(t)z(t) + \beta(t)\overline{z}(t)\Big).$$

En reportant dans l'équation de l'état adjoint, on conclut que

$$q(t) = \frac{1}{(\alpha^2 - \beta^2)(t)}\Big(\alpha(t)z(t) - \beta(t)e^{-it}\overline{z}(t)\Big),$$

ce qui se récrit $q(t) = a(t)z(t) + (c(t) + id(t))\overline{z}(t)$ avec

$$a(t) = \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2}(t), \quad c(t) = -\cos(t)\frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2}(t), \quad d(t) = \frac{2\beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}(t).$$

La matrice $P(t) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ est donc telle que

$$P(t) = \begin{pmatrix} a + c & d \\ d & a - c \end{pmatrix}(t).$$

On notera que cette matrice est bien symétrique. Le contrôle optimal en boucle fermée s'écrit

$$u_*(t) = -d(t)x(t) - (a - c)(t)v(t).$$

Finalement, d'après le cours, l'équation de Riccati satisfaite par P est

$$\begin{aligned}\dot{P}(t) &= -A^\dagger P(t) - P(t)A + P(t)BR^{-1}B^\dagger P(t) \\ &= \begin{pmatrix} 2d + d^2 & -2c + d(a - c) \\ -2c + d(a - c) & -2d + (a - c)^2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

ce qui conduit aux équations différentielles

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \tfrac{1}{2}(a - c)^2 + \tfrac{1}{2}d^2, \\ \dot{c} &= 2d + \tfrac{1}{2}d^2 - \tfrac{1}{2}(a - c)^2, \\ \dot{d} &= -2c + d(a - c).\end{aligned}$$