Cours MAP434 : Contrôle de modèles dynamiques

Séance 5, 10 avril 2019

Ensembles atteignables et temps-optimalité

Exercice I. Temps-optimalité

On considère le système de contrôle linéaire

$$\dot{x}_u(t) = Ax_u(t) + Bu(t), \quad \forall t \geq 0, \qquad x_u(0) = x_0,$$

où x_u est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, u à valeurs dans $\mathcal{B}(1) = \{v \in \mathbb{R}^k \mid |v| \leq 1\}$, A est une matrice $d \times d$, B une matrice $d \times k$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$. On rappelle la définition de l'ensemble atteignable pour tout $t \geq 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$:

$$\mathcal{A}(t, x_0) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \exists u \in L^\infty([0,t]; \mathcal{B}(1)) \text{ tel que } x_u(t) = y\}.$$

On considère une cible $x_1 \in \mathbb{R}^d$ et on suppose cette cible atteignable à partir de x_0 en temps fini. On cherche à atteindre la cible x_1 en temps minimal, i.e., on cherche $t_* = \inf\{t \geq 0 \mid x_1 \in \mathcal{A}(t, x_0)\}$.

Question 1. Montrer qu'il existe un contrôle temps-optimal (on le notera u_*).

Correction: D'après le cours (théorème 1.19 et remarque 2.10), l'ensemble $\mathcal{A}(t, x_0)$ varie continûment en t. L'ensemble $\{t \geq 0 \mid x_1 \in \mathcal{A}(t, x_0)\}$ est donc fermé dans $\mathbb{R}$, si bien que la borne inférieure t_* est atteinte. On a donc $x_1 \in \mathcal{A}(t_*, x_0)$ ce qui signifie qu'il existe un contrôle temps-optimal $u_* \in L^\infty([0,t_*]; \mathcal{B}(1))$ amenant le système de x_0 à x_1 en temps t_*.

Question 2. On a vu en cours (cf. le lemme 3.13) qu'un contrôle temps-optimal est nécessairement extrémal, i.e., on a $x_{u_*}(s) \in \partial\mathcal{A}(s, x_0)$ pour tout $s \in [0,t_*]$. Montrer qu'il existe une solution non-triviale $p : [0,t_*] \to \mathbb{R}^d$ (appelée état adjoint) de l'équation $\dot{p}(t) = -A^\dagger p(t)$, $\forall t \in [0,t_*]$, telle que

$$p(t)^\dagger Bu_*(t) = \min_{v \in \mathcal{B}(1)} p(t)^\dagger Bv, \quad \text{p.p. } t \in [0,t_*].$$

Correction: Comme l'ensemble atteignable $\mathcal{A}(t_*, x_0)$ est convexe d'après le cours, il existe un hyperplan séparant $x_1 = x_{u_*}(t_*)$ et $\mathcal{A}(t_*, x_0)$ au sens large, i.e.,

$$\exists p_* \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \quad p_*^\dagger(y - x_{u_*}(t_*)) \geq 0, \ \forall y \in \mathcal{A}(t_*, x_0).$$

En notant $\hat{u} \in L^\infty([0,t_*], \mathcal{B}(1))$ un contrôle amenant au point $y \in \mathcal{A}(t_*, x_0)$, l'inégalité ci-dessus devient grâce à la formule de Duhamel

$$\int_0^{t_*} p_*^\dagger e^{(t_*-t)A} B\hat{u}(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_0^{t_*} p_*^\dagger e^{(t_*-t)A} Bu_*(t)\,\mathrm{d}t.$$

En introduisant l'état adjoint tel que $\dot{p}(t) = -A^\dagger p(t)$, $\forall t \in [0,t_*]$, et $p(t_*) = p_*$, l'inégalité ci-dessus se récrit

$$\int_0^{t_*} p(t)^\dagger B\hat{u}(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_0^{t_*} p(t)^\dagger Bu_*(t)\,\mathrm{d}t.$$

On peut alors raisonner par l'absurde. Supposons que $p(t)^\dagger Bu_*(t) > \min_{v\in\mathcal{B}(1)} p(t)^\dagger Bv$ sur un sous-ensemble de $[0,t_*]$ de mesure strictement positive. Ceci implique que

$$\int_0^{t_*} p(t)^\dagger Bu_*(t)\,\mathrm{d}t > \int_0^{t_*} \min_{v\in\mathcal{B}(1)} p(t)^\dagger Bv\,\mathrm{d}t.$$

On considère alors un contrôle $\hat{u}$ sur $[0,t_*]$ à valeurs dans $\mathcal{B}(1)$ tel que

$$p(t)^\dagger B\hat{u}(t) = \min_{v\in\mathcal{B}(1)} p(t)^\dagger Bv.$$

En invoquant un résultat de sélection mesurable (cf. la sous-section 2.4.3 du polycopié), on montre que $\hat{u}$ peut être choisi mesurable sur $[0,t_*]$. On a donc bien $\hat{u} \in L^\infty([0,t_*];\mathcal{B}(1))$. On a ainsi obtenu

$$\begin{aligned}\int_0^{t_*} \min_{v\in\mathcal{B}(1)} p(t)^\dagger Bv\,\mathrm{d}t &= \int_0^{t_*} p(t)^\dagger B\hat{u}(t)\,\mathrm{d}t\\ &\geq \int_0^{t_*} p(t)^\dagger Bu_*(t)\,\mathrm{d}t\\ &> \int_0^{T} \min_{v\in\mathcal{B}(1)} p(t)^\dagger Bv\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

d'où la contradiction.

Question 3. Montrer que $p(t_*)^\dagger Bu_*(t_*) \leq 0$. En supposant $x_1 = 0$, qu'est-ce que cela signifie sur la vitesse $\dot{x}_{u_*}(t_*)$? On suppose pour la suite de l'exercice que cette inégalité est stricte. Montrer alors que sans perte de généralité, on peut supposer que $p(t_*)^\dagger \dot{x}_{u_*}(t_*)(t_*) = -1$.

Correction: Posons $p_* = p(t_*)$. Il suffit d'observer que $v = 0 \in \mathcal{B}(1)$ si bien que $p_*^\dagger Bu_*(t_*) \leq p_*^\dagger Bv = 0$. Comme $x_1 = 0$, on a $\dot{x}_{u_*}(t_*) = Bu_*(t_*)$, si bien que $p_*^\dagger \dot{x}_{u_*}(t_*) \leq 0$, ce qui signifie que la vitesse de la trajectoire x_{u_*} en t_* pointe vers l'extérieur (au sens large) de l'ensemble atteignable $\mathcal{A}(t_*, x_0)$.

Supposons $p_*^\dagger \dot{x}_{u_*}(t_*)(t_*) < 0$. Comme seule l'orientation du vecteur adjoint $p(t)$ compte mais pas son amplitude, on peut normaliser le vecteur adjoint pour que $p_*^\dagger \dot{x}_{u_*}(t_*)(t_*) = -1$.

Question 4. On considère une perturbation δw du contrôle optimal u_* telle que $u_* + \delta w$ est à valeurs dans $\mathcal{B}(1)$ et la trajectoire perturbée $x_{u_*+\delta w}$ atteint la cible $x_1 = 0$ au temps $t_* + \delta\tau$. En effectuant des développements limités, montrer formellement que

$$\int_0^{t_*} p(t)^\dagger B\delta w(s)\,\mathrm{d}s \geq 0.$$

On supposera a priori que $p(t_*)^\dagger \dot{x}_{u_*}(t_*) = -1$ même si $x_1 \neq 0$.

Correction: Le contrôle u_* étant temps-optimal, on doit avoir $\delta\tau \geq 0$. Nous allons donc exprimer $\delta\tau$ en fonction de δw en utilisant l'état adjoint. Posons $\delta z(t) = x_{u_*+\delta w}(t) - x_{u_*}(t)$. Par linéarité, δz est solution du système différentiel

$$\dot{\delta z}(t) = A\delta z(t) + B\delta w(t), \qquad \delta z(0) = 0.$$

À l'ordre 1 en δu (et en admettant que $\delta\tau = O(\delta u)$, on obtient

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{u_*+\delta w}(t_* + \delta\tau) = x_{u_*}(t_* + \delta\tau) + \delta z(t_* + \delta\tau) \\ &= x_{u_*}(t_*) + \dot{x}_{u_*}(t_*)\delta\tau + \delta z(t_*) = x_1 + \dot{x}_{u_*}(t_*)\delta\tau + \delta z(t_*). \end{aligned}$$

En simplifiant par x_1 puis en prenant le produit scalaire avec le vecteur $p_* \in \mathbb{R}^d$ tel que $p_*^\dagger \dot{x}_{u_*}(t_*) = -1$, on obtient

$$\delta\tau = p_*^\dagger \delta z(t_*).$$

On considère alors l'état adjoint $p : [0,t_*] \to \mathbb{R}^d$ tel que $\dot{p}(t) = -A^\dagger p(t)$, pour tout $t \in [0,t_*]$, et $p(t_*) = p_*$. Il vient

$$\begin{aligned} 0 \leq \delta\tau = p_*^\dagger \delta z(t_*) &= p(0)^\dagger \delta z(0) + \int_0^{t_*} \frac{d}{dt}(p^\dagger \delta z)(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{t_*} \frac{d}{dt}(p^\dagger \delta z)(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{t_*} \Big(p(t)^\dagger \dot{\delta z}(t) + \dot{p}(t)^\dagger \delta z(t) \Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{t_*} \Big(p(t)^\dagger (A\delta z(t) + B\delta w(t)) + \dot{p}(t)^\dagger \delta z(t) \Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{t_*} p(t)^\dagger B\delta w(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{t_*} (A^\dagger p(t) + \dot{p}(t))^\dagger \delta z(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{t_*} p(t)^\dagger B\delta w(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Question 5. Application : on considère un tram se déplaçant en trajectoire rectiligne dont on contrôle l'accélération. Le système de contrôle s'écrit

$$\ddot{x}_u(t) = u(t), \quad \forall t \geq 0,$$

et on se donne la position initiale x_0 et la vitesse initiale v_0 du tram. L'accélération en valeur absolue est bornée par a. On souhaite amener le tram à l'origine avec vitesse nulle en temps minimal. Montrer que le contrôle optimal ne peut prendre que les deux valeurs extrémales $\pm a$, avec au plus une commutation. Déterminer alors le contrôle optimal.

Correction: On récrit le système de contrôle sous la forme d'un système différentiel d'ordre un. En posant $X(t) = (x(t), v(t))^\dagger$ où $v(t) = \dot{x}(t)$, on obtient

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En notant $P = (p_1, p_2)$ l'état adjoint, on obtient

$$\dot{p}_1(t) = 0, \qquad \dot{p}_2(t) = -p_1(t),$$

et le contrôle optimal est tel que

$$p_2(s)u_*(s) = \min_{|v|\leq a} p_2(s)v, \qquad \text{p.p. } t \in [0,t_*].$$

On a $p_1(t) = p_{1,0}$ (constant) et $p_2(t) = -p_{1,0}t + p_{2,0}$. Si $p_2(s) > 0$, alors $u_*(s) = -a$, et si $p_2(s) < 0$ alors $u_*(s) = a$; enfin, si $p_2(s) = 0$, $u_*(s) \in [-a, a]$. Comme p_2 est linéaire en temps, cette fonction s'annule au plus une fois et ne s'annule donc pas sur un ensemble de mesure positive. Presque partout, on a donc $u_*(s) = \pm a$ et il y a au plus un point de commutation. Cherchons alors les trajectoires correspondant à u_* constant égal à $\pm a$ sur un intervalle. Il vient

$$\dot{v}(t) = \pm a \quad \Longrightarrow \quad v(t) = \pm a(t - t_0) + v(t_0),$$

et

$$\dot{x}(t) = v(t) \quad \Longrightarrow \quad x(t) = \frac{\pm a}{2}(t - t_0)^2 + v(t_0)(t - t_0) + x(t_0).$$

Les trajectoires optimales sont donc des paraboles d'équation

$$v(t)^2 - v(t_0)^2 = \pm 2a(x(t) - x(t_0)),$$

d'axe $(O, \pm x)$ et qui sont translatées l'une par rapport à l'autre. Les paraboles correspondant à $+a$ (resp. $-a$) sont parcourues vers les v croissants (resp. décroissants). On ne retient donc pour la parabole passant par l'origine que les parties rejoignant ce point : donc la partie $v < 0$ pour $+a$ et la partie $v > 0$ pour $-a$. On obtient ainsi la courbe de commutation. Soit x_0 est sur cette courbe et on applique le contrôle adéquat $\pm a$ sans commutation. Soit x_0 est au dessous de la courbe : on commence par le contrôle $+a$ (la contrôle $-a$ ne lui ferait pas croiser la courbe de commutation) et quand sa trajectoire rencontre la courbe de commutation, on bascule le contrôle en $-a$. Si x_0 est au dessus de la courbe de commutation, on effectue d'abord $-a$ puis $+a$.

Exercice II. Contrôlabilité avec contrôle borné

Dans cet exercice, on va donner une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité à partir de 0 pour un système linéaire avec contrôle borné. En contre-partie, on ne se fixe pas de borne sur l'horizon temporel T. On note d et k deux entiers positifs et $\mathcal{B}(1) = \{v \in \mathbb{R}^k, \ \|v\| \leq 1\}$. Soit donc le système de contrôle linéaire défini par

$$\dot{x}_u(t) = Ax_u(t) + Bu(t), \quad x_u(0) = 0, \tag{1}$$

avec $x_u(t) \in \mathbb{R}^d$, $u(t) \in \mathcal{B}(1)$ et les matrices $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ et $B \in \mathbb{R}^{d\times k}$. Noter que l'on démarre de la condition initiale nulle qui est un état stationnaire pour le système avec contrôle u identiquement nul (ce qui est possible puisque $0 \in \mathcal{B}(1)$). Dans toute la suite, les contrôles seront supposés être au moins intégrables. Pour $T \geq 0$, on définit les ensembles atteignables à partir de $0 \in \mathbb{R}^d$ comme suit

$$\mathcal{A}(T,0) = \left\{z \in \mathbb{R}^d, \ \exists u \in L^1([0,T]; \mathcal{B}(1)), \ z = x_u(T)\right\}, \quad \mathcal{A}(0) = \bigcup_{T\geq 0} \mathcal{A}(T,0).$$

Question 1. Montrer que pour tout $S, T \geq 0$, on a $\mathcal{A}(T,0) \subset \mathcal{A}(S,0)$ si $T \leq S$ et $\mathcal{A}(T+S,0) = \mathcal{A}(T,0) + e^{TA}\mathcal{A}(S,0)$. En déduire que pour tout entier $\ell \geq 0$, on a

$$\mathcal{A}(\ell T,0) = \mathcal{A}(T,0) + e^{TA}\mathcal{A}(T,0) + \cdots + e^{(\ell-1)TA}\mathcal{A}(T,0). \tag{2}$$

Correction: Simple application de la formule de Duhamel, qui permet d'écrire que

$$x_u(T+S) = e^{TA}x_u(S) + \int_0^T e^{(T-t)A}Bu(t+S)dt,$$

et de la concaténation de deux contrôles. L'identité ci-dessus montre que $\mathcal{A}(T+S,0) = \mathcal{A}(T,0) + e^{TA}\mathcal{A}(S,0)$. Comme $0 \in \mathcal{A}(S,0)$, cette égalité montre que $\mathcal{A}(T,0) \subset \mathcal{A}(T+S,0)$, ce qui montre que la suite $(A(t,0))_{t\geq 0}$ est croissante pour l'inclusion. Enfin, la formule (2) se montre de manière analogue en raisonnant par récurrence.

Question 2. Montrer que $\mathcal{A}(T,0)$ est convexe pour tout $T \geq 0$. En déduire que $\mathcal{A}(0)$ est aussi convexe.

Correction: On utilise la définition de la convexité et l'inclusion croissante de la question 1. Soit $x_1, x_2 \in \mathcal{A}(0)$. Il existe donc T_i, $i \in \{1,2\}$, tels que $x_i \in \mathcal{A}(T_i,0)$. Posons $T_* = \max(T_1,T_2)$. De par la question précédente, on a $x_i \in \mathcal{A}(T_*,0)$, pour tout $i \in \{1,2\}$, et cet ensemble est convexe par un résultat du cours. On en déduit que $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in \mathcal{A}(T_*,0) \subset \mathcal{A}(0)$, pour tout $\theta \in [0,1]$. Ce qui prouve la cnvexité de $\mathcal{A}(0)$.

Question 3. On va montrer que, si la paire (A,B) vérifie le critère de Kalman, alors $\mathcal{A}(0)$ est ouvert.
3.a. Pour $T > 0$ et $e_1, \cdots, e_d$ une base de $\mathbb{R}^d$, on choisit des contrôles continus $w_1, \cdots, w_d$ définis sur $[0,T]$ tels que $x_{w_i}(T) = e_i$ pour tout $1 \leq i \leq d$. Rappeler pourquoi cela est possible et en déduire que $\mathcal{A}(T,0)$ contient un voisinage ouvert de 0.

Correction: L'existence de $w_1, \cdots, w_d$ continus résulte de la preuve du critère de Kalman vue en cours. Soit $M := \max_{1\leq i\leq d} \|w_i\|_{L^\infty([0,T;\mathbb{R}^k)}$; on a $|w_i(t)/M| \leq 1$ pour tout $1 \leq i \leq d$ et $t \in [0,T]$. Alors $e_i/M = x_{w_i/M}(T) \in \mathcal{A}(T,0)$ et toute combinaison linéaire des e_i/M à coefficients bornés par $1/d$ est aussi dans $\mathcal{A}(T,0)$.

3.b. Soit $x \in \mathcal{A}(0)$, soit $S > 0$ et V un ouvert contenant 0 et contenu dans $\mathcal{A}(S,0)$. Montrer qu'il existe $T > 0$ tel que $x + e^{TA}V \subset \mathcal{A}(T+S,0)$. Conclure.

Correction: On a $x \in \mathcal{A}(T,0)$ pour un certain $T > 0$. On en déduit

$$x + e^{TA}V \subset \mathcal{A}(T,0) + e^{TA}V \subset \mathcal{A}(T,0) + e^{TA}\mathcal{A}(S,0) = \mathcal{A}(T+S,0),$$

de par la première question. Ceci montre que $x + e^{TA}V \subset \mathcal{A}(0)$.

Question 4. Montrer que si $\mathcal{A}(0) = \mathbb{R}^d$, alors la paire (A,B) vérifie le critère de Kalman et toute valeur propre λ de A est à partie réelle positive ou nulle. Pour la deuxième condition, si λ est une valeur propre de A, on pourra faire un changement de coordonnées linéaire réel qui met A et B sous la forme $\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$ avec A_2 matrice carrée de dimension un si λ est réelle et de dimension deux sinon.

Correction: La première condition est nécessaire, cf. la preuve vue en cours du critère de Kalman. Pour la deuxième condition, on raisonne par contraposition et on suppose que A admet une valeur propre $\lambda = -a + ib$ avec $a > 0$. On suppose ici b non nul (la preuve est analogue si b est nul) et la matrice A_2 vaut alors $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. On pose $y \in \mathbb{R}^2$ pour les deux dernières coordonnées de x, et le système (1) implique que $\dot{y} = A_2 y + B_2 u$. En appliquant la formule de Duhamel, on obtient l'estimation

$$\|y(t)\| \leq \left\| \int_0^t e^{(t-s)A_2} B_2 u(s) ds \right\| \leq C_0 \int_0^t e^{-a(t-s)} ds \leq C_0/a,$$

pour une constante C_0 ne dépendant que de A et de B.

Question 5. On va montrer l'implication inverse, à savoir que $\mathcal{A}(0) = \mathbb{R}^d$ si la paire (A, B) vérifie le critère de Kalman et toute valeur propre λ de A est à partie réelle non négative. Pour cela, on considère le sous-espace vectoriel $J_{k,\lambda} = \mathrm{Ker}(A - \lambda Id_d)^k$ pour tout entier naturel k et toute valeur propre λ de A. On pose également $J^R_{k,\lambda} = \{v \in \mathbb{R}^n,\ \exists w \in J_{k,\lambda},\ \Re(w) = v\}$ (avec $\Re(\cdot)$ la partie réelle). On notera que si $w = v_1 + iv_2 \in J_{k,\lambda}$ avec $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^d$, le vecteur v_1 est dans $J^R_{k,\lambda}$ par définition, mais c'est aussi le cas du vecteur v_2 (puisque $-iw = v_2 - iv_1 \in J_{k,\lambda}$). En utilisant la décomposition de Jordan de A, on montre que $\mathbb{C}^d$ est la somme des $J_{k,\lambda}$ et, de même, que $\mathbb{R}^d$ est la somme des $J^R_{k,\lambda}$.

5.a. Montrer que pour tout entier naturel k et toute valeur propre λ de A, $J^R_{k,\lambda} \subset \mathcal{A}(0)$. On procèdera par récurrence sur k. On pourra choisir $T > 0$ tel que $e^{\lambda qT} = e^{aqT}$ avec $\lambda = a + ib$ valeur propre de A et q entier naturel quelconque.

Correction: On suppose donc que $J^R_{k-1,\lambda} \subset \mathcal{A}(0)$. On prend alors $v \in J_{k,\lambda}$ avec $v = v_1 + iv_2$ et on doit montrer que $v_1 \in \mathcal{A}(0)$. On prend $\delta > 0$ assez petit pour que $w_1 := \delta v_1 \in \mathcal{A}(T, 0)$, avec $T > 0$ donné par l'indication. Puisque $w = \delta v$ appartient à $\mathrm{Ker}(A - \lambda Id_n)^k$, on voit que, pour tout temps $t \in \mathbb{R}$, $e^{(A-\lambda Id_n)t}w$ s'écrit comme $w + z$ avec $z \in J_{k-1,\lambda} \subset \mathcal{A}(0)$ (écriture en série entière). On en déduit que pour $t = qT$ avec q entier naturel,

$$e^{at}w = e^{\lambda t}w = e^{tA}w - e^{\lambda t}z = e^{tA}w - e^{at}z.$$

Comme $w = w_1 + w_2$, on déduit que $e^{at}w_1 = e^{tA}w_1 - e^{at}z_1$ pour $t = qT$ avec q entier naturel. On remarque que $z_1 \in J^R_{k-1,\lambda} \subset \mathcal{A}(0)$ d'après l'hypothèse de récurrence. En sommant sur $q = 0, \cdots, j-1$, on a

$$\left(\sum_{0 \le q \le j-1} e^{aqT}\right) w_1 = \sum_{0 \le q \le j-1} e^{qTA} v_1 + z',$$

avec $z' \in J^R_{k-1,\lambda}$. Comme $a \ge 0$, on a $\sum_{0 \le q \le j-1} e^{aqT} \ge j$ et donc pour j assez grand et en appliquant les questions qui précèdent, on obtient que $jw_1 \in \mathcal{A}(jT, 0) + J^R_{k-1,\lambda} \subset \mathcal{A}(0)$. On conclut en remarquant que

$$v_1 = \frac{1}{j\delta} jw_1 + (1 - \frac{1}{j\delta})0 \in \mathcal{A}(0),$$

ce qui est une combinaison convexe pour j assez grand.

5.b. Conclure. On commencera par établir le résultat suivant : si C est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^d$ et L est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$ contenu dans C, alors $C + L = C$ (si $x \in C$, $y \in L$ et $\varepsilon > 0$, on pourra écrire $x + y = \frac{1}{1+\varepsilon}(1+\varepsilon)x + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\frac{(1+\varepsilon)y}{\varepsilon}$).

Correction: En suivant l'indication, on remarque pour $\varepsilon > 0$ assez petit que $x_\varepsilon := (1+\varepsilon)x \in C$ puisque ce dernier est ouvert et que $y_\varepsilon := \frac{(1+\varepsilon)y}{\varepsilon} \in L$ puisque ce dernier est un espace vectoriel. On conclut en notant que $x + y$ est alors combinaison convexe de x_ε et y_ε. Pour conclure, on applique plusieurs fois le résultat suivant : si L_1 et L_2 sont deux espaces vectoriels contenus dans un convexe $C \subset \mathbb{R}^d$ alors $L_1 + L_2 \subset C$. Cela résulte de l'écriture $x + y = \frac{1}{2}(2x + 2y)$.