Cours MAP434 : Contrôle de modèles dynamiques

Séance 5, 16 mai 2018

PRINCIPE DU MINIMUM DE PONTRYAGUINE

Exercice I. Contrôle d'insectes nuisibles par des prédateurs

Pour traiter une population x d'insectes nuisibles, on introduit dans l'écosystème une population y d'insectes prédateurs (non nuisibles), se nourrissant des nuisibles. Après normalisation, le système s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)(1 - y(t)), \\ \dot{y}(t) = -y(t) + u(t), \end{cases} \quad \forall t \in [0,T],$$

avec comme conditions initiales $x(0) = x_0 > 0$ et $y(0) = y_0 > 0$. Le contrôle u est le taux d'introduction de nouveaux prédateurs, il vérifie la contrainte

$$0 \leq u(t) \leq M.$$

On cherche à minimiser, au bout d'un temps $T > 0$ fixé, le nombre de nuisibles, tout en cherchant à minimiser la quantité globale de prédateurs introduits ; autrement dit, on veut minimiser

$$J(u) = \int_0^T u(t)dt + x(T).$$

Question 1. Démontrer que, pour tout contrôle, on a $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ sur $[0, T]$. Déterminer les points d'équilibre du système, c'est-à-dire les triplets (x_c, y_c, u_c) qui sont des solutions constantes du système.

Correction: Comme $u(t) \geq 0$, on a $\dot{y}(t) + y(t) \geq 0$, ce qui implique que $y(t) \geq y_0 e^{-t} > 0$. Pour montrer que $x(t) > 0$, on raisonne par l'absurde en appliquant le théorème de Cauchy–Lipschitz (version localement Lipschitz). Cherchons enfin les points d'équilibre (x_c, y_c, u_c) qui doivent donc vérifier $x_c(1 - y_c) = 0$, $-y_c + u_c = 0$. Comme $x_c > 0$, on a nécessairement $y_c = 1$ et $u_c = y_c = 1$. Mais ceci n'est possible que si $M \geq 1$; sinon, il n'y a pas de point d'équilibre.

Question 2. Ecrire les équations de l'état adjoint $p(t) = (p_x(t), p_y(t))^\dagger$ ainsi que le Hamiltonien associé. Vérifer enfin que $p_x(t)x(t) = x(T)$ pour tout $t \in [0,T]$ et en déduire une expression de $p_y(t)$ pour tout $t \in [0, T]$.

Correction: Le problème adjoint s'écrit $\dot{p}_x(t) = -p_x(t)(1 - y(t))$ et $\dot{p}_y(t) = x(t)p_x(t) + p_y(t)$. La condition en $t = T$ s'écrit $p_x(T) = 1$ et $p_y(T) = 0$. Le Hamiltonien s'écrit

$$H(x, y, p_x, p_y, u) = p_x x(1 - y) + p_y(u - y) + u.$$

Enfin, on constate que $\frac{d}{dt}(xp_x)(t) = \dot{x}(t)p_x(t) + x(t)\dot{p}_x(t) = x(t)(1 - y(t))p_x(t) - x(t)p_x(t)(1 - y(t)) = 0$. Comme $p_x(T) = 1$, on obtient bien que $p_x(t)x(t) = x(T)$. L'équation de p_y s'écrit donc $\dot{p}_y(t) - p_y(t) = x(T)$. D'où $p_y(t) = x(T)\left(e^{t-T} - 1\right)$.

Question 3. Démontrer que les contrôles optimaux sont bang-bang, c'est-à-dire qu'ils ne prennent que les valeurs 0 et M. Démontrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $u(t) = 0$ pour tout $t \in [T-\varepsilon, T]$.

Correction: De par le principe de minimisation de Pontryaguine, un contrôle optimal doit vérifier

$$u(t) \in \arg\min_{v\in[0,M]} (p_y(t)+1)\, v, \qquad \forall t \in [0,T].$$

Donc, tant que $p_y(t) \neq -1$, $u(t)$ vaut soit 0 soit M. De plus, la question précédente implique, vu que $x(T) > 0$, que p_y est strictement croissante. Donc $p_y(t) = 0$ ne peut se produire qu'en au plus un point de l'intervalle $[0,T]$. Enfin, comme $p_y(T)+1 = 1$ et que la fonction p_y est continue, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $p_y(t)+1 > 0$ pour tout $t \in [T-\varepsilon, T]$ si bien que $u(t) = 0$ sur cet intervalle.

Question 4. Démontrer que u a au plus une commutation. Lorsqu'il en a une, déterminer à quel temps elle a lieu.

Correction: La formule explicite établie pour p_y montre que cette fonction est monotone. Donc elle ne peut prendre la valeur -1 qu'une fois au plus. Si cela se produit, c'est au temps t^* défini par

$$t^* = T + \ln\left(1 - \frac{1}{x(T)}\right).$$

Pour que t_* soit positif, il faut que $x(T) > \frac{1}{1-e^{-T}}$.

Exercice II. Tracé d'une voie de chemin de fer

On doit tracer une voie de chemin de fer du point 0 au point T dans un terrain valonné, l'altitude du terrain au point t étant $z(t)$. La pente de la voie ne peut dépasser a. On note $x(t)$ l'élévation de la voie au point t, et on suppose que $x(0) = z(0)$. Afin de réduire les remblais et les excavations, on cherche à minimiser le critère

$$\frac{1}{2}\int_0^T (x_u(t) - z(t))^2 dt$$

sous les contraintes $\dot{x}_u(t) = u(t)$ et $|u(t)| \le a$ avec $a > 0$.

Question 1. Appliquer le principe du minimum. Ecrire en particulier le système aux deux bouts vérifié par la trajectoire optimale $\overline{x}$ et l'état adjoint $\overline{p}$.

Correction: On applique le PMP (théorème 5.4). L'état adjoint $\overline{p}$ est tel que

$$\frac{d\overline{p}}{dt}(t) = -(\overline{x}(t) - z(t)), \quad \forall t \in [0,T], \qquad \overline{p}(T) = 0,$$

et le contrôle optimal $\overline{u}(t)$ réalise le minimum de $\overline{p}(t)v$ pour $v \in U = [-a, a]$. Concrètement, cela signifie que

- Si $\overline{p}(t) = 0$, alors $\overline{u}(t) \in [-a, a]$;
- Si $\overline{p}(t) > 0$, alors $\overline{u}(t) = -a$;

— Si $\overline{p}(t) < 0$, alors $\overline{u}(t) = a$.

Question 2. Supposons que $\overline{p}(t) = 0$ sur un intervalle I^0 : que sait-on de $\overline{u}(t)$ sur cet intervalle ? La restriction de $\overline{x}$ à I^0 s'appelle arc singulier.

Correction: Si $\overline{p} = 0$ sur un intervalle, alors $\overline{x}(t) = z(t)$ sur cet intervalle : le tracé optimal suit le relief.

Question 3. Pour un $t \in (0, T)$ donné tel que $\overline{p}(t) > 0$, soit $I^+ =]\alpha, \beta[$ l'intervalle ouvert maximal contenant t sur lequel $\overline{p}$ est strictement positif. On suppose que $0 < \alpha < \beta \leq T$. La restriction de x à I^+ s'appelle arc régulier. Quelle est la forme d'un tel arc ? Montrer que la trajectoire optimale $\overline{x}$ est telle que $\int_\alpha^\beta (z(t) - \overline{x}(t))dt = 0$. Comment s'interprète géométriquement cette condition ?

Correction: Si $\overline{p}$ est strictement positif sur un intervalle, alors $\overline{u}(t) = -a$ sur cet intervalle, et donc $\dot{x}(t) = -a$ sur cet intervalle ; le tracé est donc affine (et descendant). En outre,

$$\int_\alpha^\beta (z(t) - \overline{x}(t))dt = \int_\alpha^\beta \frac{d\overline{p}}{dt}(t)dt = \overline{p}(\beta) - \overline{p}(\alpha) = 0,$$

puisque (α, β) est l'intervalle maximal sur lequel $\overline{p}$ est strictement positif et que $\overline{p}$ est une fonction continue du temps ; comme $\alpha > 0$, on a donc bien $\overline{p}(\alpha) = 0$, et on raisonne de même si $\beta < T$ (et on utilise la condition $p(T) = 0$ sinon). La condition $\int_\alpha^\beta (z(t) - \overline{x}(t))dt = 0$ signifie qu'il y a autant d'excavations que de remblais sur I^+.

Question 4. Déterminer le tracé optimal sur le terrain de la forme suivante :

$$z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \frac{T}{3}[\cup]\frac{2T}{3}, T], \\ h > 0 & \text{si } t \in [\frac{T}{3}, \frac{2T}{3}]. \end{cases}$$

Commenter la perte de symétrie de la solution pour h suffisamment grand.

Correction: Supposons dans un premier temps que h est suffisamment petit. Dans ce cas, le tracé consistera en trois arcs singuliers sur lesquels $\overline{x}(t)$ est constant et de deux arcs réguliers pour monter et descendre du plateau. Par symétrie du problème, on cherche donc α et β avec $0 < \alpha < T/3 < \beta < T/2$ tels que $\overline{x}(t) = a(t - \alpha)$ pour $\alpha \leq t \leq \beta$,

$$\int_\alpha^\beta (z(t) - \overline{x}(t))dt = 0 \quad \text{et} \quad \overline{x}(\beta) = h.$$

D'où $a(\beta - \alpha) = h$ et $\frac{T}{3} - \alpha = \beta - \frac{T}{3}$ et finalement $\alpha = \frac{T}{3} - \frac{h}{2a}$ et $\beta = \frac{T}{3} + \frac{h}{2a}$. Cette solution est valable si $\beta \leq \frac{T}{2}$, i.e., si $h \leq \frac{1}{3}Ta$.

Si h est plus grand mais pas trop grand, l'arc singulier du milieu va disparaître et on cherchera α avec $0 \leq \alpha \leq T/3$ tel que

$$\int_\alpha^{\frac{T}{2}} (z(t) - \overline{x}(t))dt = 0.$$

D'où

$$\alpha = \frac{T}{2} - \sqrt{\frac{T}{3}\frac{h}{a}}.$$

C'est une solution valable si

$$\frac{1}{3}Ta < h \leq \frac{3}{4}Ta.$$

Enfin, si h est plus grand que $\frac{3}{4}Ta$, la solution consistera en deux arcs réguliers sur $[0,\alpha]$ et $[\alpha,T]$. Le premier arc ne vérifie pas la condition $\int_0^\alpha(z(t)-\overline{x}(t))dt = 0$ (car $\overline{p}(0)$ est a priori différent de zéro), et le deuxième ne vérifie pas la condition $\overline{x}(T) = z(T) = 0$. La solution n'est donc plus symétrique. Cette rupture de symétrie est due au fait qu'on a imposé que $\overline{x}(0) = z(0)$, alors qu'il faudra prévoir des remblais au terminus en $t = T$. Afin de calculer α, on écrit

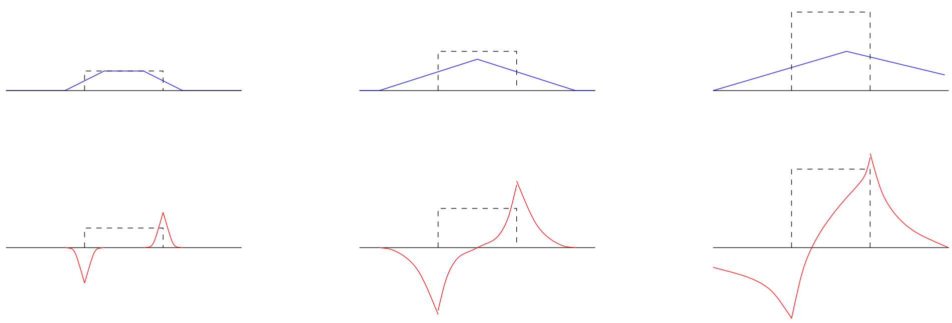
$$\int_\alpha^T (z(t)-\overline{x}(t))dt = 0,$$

avec $\overline{x}(t) = 2\alpha a - at$, d'où

$$(\tfrac{2T}{3}-\alpha)h = \frac{1}{2}a(T-\alpha)(3\alpha - T).$$

Cette équation permet de déterminer α ; on notera que $\alpha \to \frac{2T}{3}$ si $h \to \infty$.

La figure ci-dessous illustre les profils de $\overline{x}$ (en haut) et de l'état adjoint $\overline{p}$ (en bas) pour $h < \frac{1}{3}Ta$ à gauche, $h \in (\frac{1}{3}Ta, \frac{3}{4}Ta)$ au centre et $h > \frac{3}{4}Ta$ à droite.



Exercice III. Oscillateur harmonique

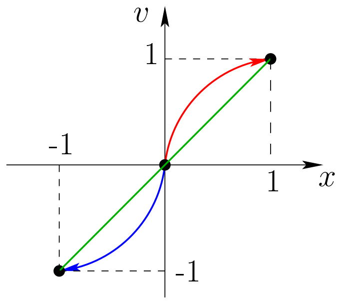
On reprend (cf. le TD précédent) le système de contrôle linéaire décrivant un oscillateur harmonique

$$\ddot{x}(t) + x(t) = u(t), \quad \forall t \in [0,T], \qquad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

En posant $X(t) = (x(t), v(t))$, on obtient $\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On considère ici des contrôles bornés à valeurs dans $U = [-1,1]$ et on fixe $T = \pi/2$ et la condition initiale est $X_0 = (0,0)$. L'objectif de cet exercice est d'étudier l'ensemble atteignable $\mathcal{A}(T, X_0)$.

Question 1. Tracer dans le plan (x,v) les trajectoires associées au contrôle $u_1 \equiv 1$ sur $[0,T]$, puis au contrôle $u_2 \equiv -1$ sur $[0,T]$. Quels sont les points que l'on peut atteindre à partir de X_0 au temps T par un contrôle constant ?

Correction: On obtient les trajectoires représentées ci-dessous.



L'ensemble des points atteignables en temps $T = \pi/2$ par un contrôle constant est, par linéarité, le segment reliant les points de coordonnées $(-1,-1)$ à $(1,1)$ dans le plan (x,v).

Question 2. Pourquoi l'ensemble atteignable $\mathcal{A}(T, X_0)$ est-il symétrique par rapport à l'origine ? Montrer que tout point de la frontière $\partial\mathcal{A}(T, X_0)$ est atteint par un contrôle bang-bang en au plus une commutation.

Correction: En changeant u en $-u$, on voit que l'ensemble atteignable $\mathcal{A}(T, X_0)$ est symétrique par rapport à l'origine. Soit maintenant $X(T) \in \partial\mathcal{A}(T, X_0)$; comme $\mathcal{A}(T, X_0)$ est fermé d'après le cours, $X(T)$ est bien atteint par une trajectoire associée à un contrôle $u \in L^\infty([0,T]; U)$. L'ensemble $\mathcal{A}(T, X_0)$ étant convexe d'après le cours, on en déduit qu'il existe un vecteur p_T non nul tel que

$$p_T^\dagger (X(T) - Y(T)) \leq 0$$

où Y est la trajectoire associée à un contrôle quelconque $v \in \mathcal{U}$. On obtient donc

$$\int_0^T p_T^\dagger e^{(T-s)A} B v(s)\,\mathrm{d}s \geq \int_0^T p_T^\dagger e^{(T-s)A} B u(s)\,\mathrm{d}s.$$

On introduit le vecteur adjoint $p = (p_x, p_v)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ tel que $\dot{p}(t) = Ap(t)$ (noter que la matrice A est antisymétrique), $p(T) = p_T$. Noter que le vecteur adjoint est de norme constante et qu'il tourne autour de l'origine dans le sens horaire à vitesse angulaire unité. La relation ci-dessus se récrit

$$\int_0^T p_v(s) v(s)\,\mathrm{d}s \geq \int_0^T p_v(s) u(s)\,\mathrm{d}s.$$

Cette relation montre que le contrôle u est bang-bang, avec $u(s) = -1$ si $p_v(s) > 0$ et $u(s) = 1$ si $p_v(s) < 0$, i.e.,

$$p_v(s) u(s) = \arg\min_{v \in U} p_v(s) v.$$

Le sous-ensemble $I_0 = \{s \in [0,T] \mid p_v(s) = 0\}$ est de mesure nulle car p tourne à vitesse angulaire unité, donc $u = \pm 1$ p.p. Comme $T = \pi/2$, le vecteur adjoint effectue un quart de tour pendant l'intervalle de temps $[0,T]$, si bien que le sous-ensemble I_0 est soit vide soit est réduit à un singleton. Ceci montre que le contrôle u a au plus une commutation.

Question 3. Soit $\alpha \in [0, \pi]$. Trouver (en utilisant le PMP) le contrôle optimal minimisant le critère $J(u) = \cos(\alpha) x(T) + \sin(\alpha) v(T)$. Calculer le point d'arrivée de la trajectoire associée en utilisant la représentation complexe de la solution (on rappelle qu'en posant $z(t) = x(t) + iv(t)$, on a $z(t) = \int_0^t ie^{i(s-t)} u(s)\,\mathrm{d}s$.). En déduire l'ensemble atteignable $\mathcal{A}(T, X_0)$.

Correction: Soit $\alpha \in [0, \pi]$. En utilisant le PMP, on considère une extrémale. L'état adjoint $p = (p_x, p_v)$ satisfait

$$\dot{p}(t) = Ap(t), \qquad p(T) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix},$$

si bien que p est un vecteur unitaire tournant autour de l'origine dans le sens horaire à vitesse angulaire unité. Le Hamiltonien $H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times U \to \mathbb{R}$ vaut

$$H(X, p, u) = p^\dagger (AX + Bu)$$

si bien que le PMP conduit au contrôle optimal

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } p_v > 0 \\ 1 & \text{si } p_v < 0 \end{cases}$$

et le sous-ensemble $I_0 = \{s \in [0,T] \mid p_v(s) = 0\}$ est de mesure nulle car p tourne autour de l'origine à vitesse angulaire constante. Si $\alpha \in [0, \pi/2]$, p_v reste positif sur l'intervalle $[0,T]$, si bien que le contrôle optimal est constant égal à -1. La trajectoire optimale amène au point de coordonnées $(-1, -1)$. En revanche, si $\alpha \in [\pi/2, \pi]$, p_v change de signe à l'instant $t_\alpha = \frac{\pi}{2} - (\pi - \alpha) = \alpha - \frac{\pi}{2}$ et le contrôle optimal vaut 1 sur $[0, t_\alpha]$ puis -1 sur $[t_\alpha, T]$. Le point d'arrivée de la trajectoire associée se trouve facilement en utilisant la représentation complexe. Il vient

$$\begin{aligned} z(T) &= \int_0^{t_\alpha} ie^{i(s-T)}\,\mathrm{d}s - \int_{t_\alpha}^{T} ie^{i(s-T)}\,\mathrm{d}s \\ &= 2e^{i(t_\alpha - T)} - e^{-iT} - 1 = i - 1 - 2e^{i\alpha}, \end{aligned}$$

car $T = \pi/2$ et $t_\alpha - T = \alpha - \pi$. Lorsque α décrit l'intervalle $[\pi/2, \pi]$, le point $z(T)$ décrit dans le plan (x, v) un arc de cercle de centre $(-1, 1)$ et de rayon 2, reliant les points de coordonnées $(-1, -1)$ à $(1, 1)$. Or, pour chaque α, le point correspondant est situé sur l'intersection de $\mathcal{A}(T, X_0)$ avec la demi-droite de direction $-\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$. En conclusion, l'arc de cercle ci-dessus constitue la moitié de la frontière de $\mathcal{A}(T, X_0)$, l'autre moitié étant constituée de l'arc de cercle symétrique par rapport à l'origine. On a donc

$$\mathcal{A}(T, X_0) = \{(x, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + (v-1)^2 \leq 4,\ (x-1)^2 + (v+1)^2 \leq 4\}.$$

Cette ensemble est illustré sur la figure ci-dessous.