

# Cours MAP434 : Contrôle de modèles dynamiques

Séance 6, 17 avril 2019

## PRINCIPE DU MINIMUM DE PONTRYAGUINE

### Exercice I. Contrôle d'insectes nuisibles par des prédateurs

Pour traiter une population  $x$  d'insectes nuisibles, on introduit dans l'écosystème une population  $y$  d'insectes prédateurs (non nuisibles), se nourrissant des nuisibles. Après normalisation, le système s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)(1 - y(t)), \\ \dot{y}(t) = -y(t) + u(t), \end{cases} \quad \forall t \in [0, T],$$

avec comme conditions initiales  $x(0) = x_0 > 0$  et  $y(0) = y_0 > 0$ . Le contrôle  $u$  est le taux d'introduction de nouveaux prédateurs, il vérifie la contrainte

$$0 \leq u(t) \leq M.$$

On cherche à minimiser, au bout d'un temps  $T > 0$  fixé, le nombre de nuisibles, tout en cherchant à minimiser la quantité globale de prédateurs introduits; autrement dit, on veut minimiser

$$J(u) = \int_0^T u(t) dt + x(T).$$

**Question 1.** Démontrer que, pour tout contrôle, on a  $x(t) > 0$  et  $y(t) > 0$  sur  $[0, T]$ . Déterminer les points d'équilibre du système, c'est-à-dire les triplets  $(x_c, y_c, u_c)$  qui sont des solutions constantes du système.

**Correction:** Comme  $u(t) \geq 0$ , on a  $\dot{y}(t) + y(t) \geq 0$ , ce qui implique que  $y(t) \geq y_0 e^{-t} > 0$ . Pour montrer que  $x(t) > 0$ , on raisonne par l'absurde en appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz (version localement Lipschitz). Cherchons enfin les points d'équilibre  $(x_c, y_c, u_c)$  qui doivent donc vérifier  $x_c(1 - y_c) = 0$ ,  $-y_c + u_c = 0$ . Comme  $x_c > 0$ , on a nécessairement  $y_c = 1$  et  $u_c = y_c = 1$ . Mais ceci n'est possible que si  $M \geq 1$ ; sinon, il n'y a pas de point d'équilibre.

**Question 2.** Ecrire les équations de l'état adjoint  $p(t) = (p_x(t), p_y(t))^\dagger$  ainsi que le Hamiltonien associé. Vérifier enfin que  $p_x(t)x(t) = x(T)$  pour tout  $t \in [0, T]$  et en déduire une expression de  $p_y(t)$  pour tout  $t \in [0, T]$ .

**Correction:** Le problème adjoint s'écrit  $\dot{p}_x(t) = -p_x(t)(1 - y(t))$  et  $\dot{p}_y(t) = x(t)p_x(t) + p_y(t)$ . La condition en  $t = T$  s'écrit  $p_x(T) = 1$  et  $p_y(T) = 0$ . Le Hamiltonien s'écrit

$$H(x, y, p_x, p_y, u) = p_x x(1 - y) + p_y(u - y) + u.$$

Enfin, on constate que  $\frac{d}{dt}(x p_x)(t) = \dot{x}(t)p_x(t) + x(t)\dot{p}_x(t) = x(t)(1 - y(t))p_x(t) - x(t)p_x(t)(1 - y(t)) = 0$ . Comme  $p_x(T) = 1$ , on obtient bien que  $p_x(t)x(t) = x(T)$ . L'équation de  $p_y$  s'écrit donc  $\dot{p}_y(t) - p_y(t) = x(T)$ . D'où  $p_y(t) = x(T)(e^{t-T} - 1)$ .

**Question 3.** Démontrer que les contrôles optimaux sont bang-bang, c'est-à-dire qu'ils ne prennent que les valeurs 0 et  $M$ . Démontrer qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $u(t) = 0$  pour tout  $t \in [T - \varepsilon, T]$ .

**Correction:** De par le principe de minimisation de Pontryaguine, un contrôle optimal doit vérifier

$$u(t) \in \arg \min_{v \in [0, M]} (p_y(t) + 1)v, \quad \forall t \in [0, T].$$

Donc, tant que  $p_y(t) \neq -1$ ,  $u(t)$  vaut soit 0 soit  $M$ . De plus, la question précédente implique, vu que  $x(T) > 0$ , que  $p_y$  est strictement croissante. Donc  $p_y(t) = 0$  ne peut se produire qu'en au plus un point de l'intervalle  $[0, T]$ . Enfin, comme  $p_y(T) + 1 = 1$  et que la fonction  $p_y$  est continue, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $p_y(t) + 1 > 0$  pour tout  $t \in [T - \varepsilon, T]$  si bien que  $u(t) = 0$  sur cet intervalle.

**Question 4.** Démontrer que  $u$  a au plus une commutation. Lorsqu'il en a une, déterminer à quel temps elle a lieu.

**Correction:** La formule explicite établie pour  $p_y$  montre que cette fonction est monotone. Donc elle ne peut prendre la valeur  $-1$  qu'une fois au plus. Si cela se produit, c'est au temps  $t^*$  défini par

$$t^* = T + \ln \left( 1 - \frac{1}{x(T)} \right).$$

Pour que  $t_*$  soit positif, il faut que  $x(T) > \frac{1}{1 - e^{-T}}$ .

## Exercice II. Oscillateur harmonique

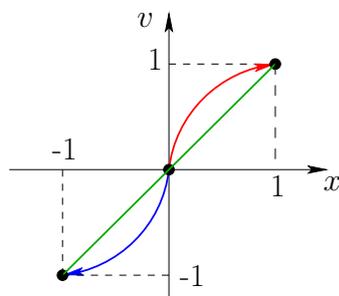
On reprend (cf. le TD4) le système de contrôle linéaire décrivant un oscillateur harmonique

$$\ddot{x}(t) + x(t) = u(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

En posant  $X(t) = (x(t), v(t))$ , on obtient  $\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t)$  avec  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On considère ici des contrôles bornés à valeurs dans  $U = [-1, 1]$  et on fixe  $T = \pi/2$  et la condition initiale est  $X_0 = (0, 0)$ . L'objectif de cet exercice est d'étudier l'ensemble atteignable  $\mathcal{A}(T, X_0)$ .

**Question 1.** Tracer dans le plan  $(x, v)$  les trajectoires associées au contrôle  $u_1 \equiv 1$  sur  $[0, T]$ , puis au contrôle  $u_2 \equiv -1$  sur  $[0, T]$ . Quels sont les points que l'on peut atteindre à partir de  $X_0$  au temps  $T$  par un contrôle constant ?

**Correction:** On obtient les trajectoires représentées ci-dessous.



L'ensemble des points atteignables en temps  $T = \pi/2$  par un contrôle constant est, par linéarité, le segment reliant les points de coordonnées  $(-1, -1)$  à  $(1, 1)$  dans le plan  $(x, v)$ .

**Question 2.** Pourquoi l'ensemble atteignable  $\mathcal{A}(T, X_0)$  est-il symétrique par rapport à l'origine ? Montrer que tout point de la frontière  $\partial\mathcal{A}(T, X_0)$  est atteint par un contrôle bang-bang en au plus une commutation.

**Correction:** En changeant  $u$  en  $-u$ , on voit grâce à la formule de Duhamel (la condition initiale étant nulle) que l'ensemble atteignable  $\mathcal{A}(T, X_0)$  est symétrique par rapport à l'origine. Soit maintenant  $X(T) \in \partial\mathcal{A}(T, X_0)$ ; comme  $\mathcal{A}(T, X_0)$  est fermé d'après le cours,  $X(T)$  est bien atteint par une trajectoire associée à un contrôle  $u \in \mathcal{U} := L^\infty([0, T]; U)$ . L'ensemble  $\mathcal{A}(T, X_0)$  étant convexe d'après le cours, on en déduit qu'il existe un vecteur  $p_T$  non nul tel que

$$p_T^\dagger (X(T) - Y(T)) \leq 0$$

où  $Y$  est la trajectoire associée à un contrôle quelconque  $v \in \mathcal{U}$ . On obtient donc

$$\int_0^T p_T^\dagger e^{(T-s)A} B v(s) ds \geq \int_0^T p_T^\dagger e^{(T-s)A} B u(s) ds.$$

On introduit le vecteur adjoint  $p = (p_x, p_v)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  tel que  $\dot{p}(t) = Ap(t)$  (noter que la matrice  $A$  est antisymétrique),  $p(T) = p_T$ . Noter que le vecteur adjoint est de norme constante et qu'il tourne autour de l'origine dans le sens horaire à vitesse angulaire unité. La relation ci-dessus se réécrit

$$\int_0^T p_v(s) v(s) ds \geq \int_0^T p_v(s) u(s) ds,$$

si bien que

$$p_v(s) u(s) = \arg \min_{v \in U} p_v(s) v, \quad \text{p.p. } s \in [0, T].$$

Cette relation montre que  $u(s) = -1$  si  $p_v(s) > 0$  et  $u(s) = 1$  si  $p_v(s) < 0$ . Le sous-ensemble  $I_0 = \{s \in [0, T] \mid p_v(s) = 0\}$  est de mesure nulle car  $p$  tourne à vitesse angulaire unité, donc  $u = \pm 1$  p.p., i.e., le contrôle est bang-bang. Comme  $T = \pi/2$ , le vecteur adjoint effectue un quart de tour pendant l'intervalle de temps  $[0, T]$ , si bien que le sous-ensemble  $I_0$  est soit vide soit est réduit à un singleton. Ceci montre que le contrôle  $u$  a au plus une commutation.

**Question 3.** Soit  $\alpha \in [0, \pi]$ . Trouver (en utilisant le PMP) le contrôle optimal minimisant le critère  $J(u) = \cos(\alpha)x(T) + \sin(\alpha)v(T)$ . Calculer le point d'arrivée de la trajectoire associée en utilisant la représentation complexe de la solution (on rappelle qu'en posant  $z(t) = x(t) + iv(t)$ , on a  $\dot{z}(t) = \int_0^t i e^{i(s-t)} u(s) ds$ ). En déduire l'ensemble atteignable  $\mathcal{A}(T, X_0)$ .

**Correction:** Soit  $\alpha \in [0, \pi]$ . En utilisant le PMP, on considère une extrémale. L'état adjoint  $p = (p_x, p_v)$  satisfait

$$\dot{p}(t) = Ap(t), \quad p(T) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix},$$

si bien que  $p$  est un vecteur unitaire tournant autour de l'origine dans le sens horaire à vitesse angulaire unité. Le Hamiltonien  $H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times U \rightarrow \mathbb{R}$  vaut

$$H(X, p, u) = p^\dagger (AX + Bu)$$

si bien que le PMP conduit au contrôle optimal

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } p_v > 0 \\ 1 & \text{si } p_v < 0 \end{cases}$$

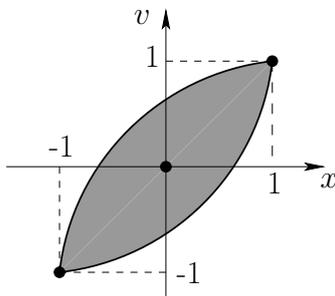
et le sous-ensemble  $I_0 = \{s \in [0, T] \mid p_v(s) = 0\}$  est de mesure nulle car  $p$  tourne autour de l'origine à vitesse angulaire constante. Si  $\alpha \in [0, \pi/2]$ ,  $p_v$  reste positif sur l'intervalle  $[0, T]$ , si bien que le contrôle optimal est constant égal à  $-1$ . La trajectoire optimale amène au point de coordonnées  $(-1, -1)$ . En revanche, si  $\alpha \in [\pi/2, \pi]$ ,  $p_v$  change de signe à l'instant  $t_\alpha = \frac{\pi}{2} - (\pi - \alpha) = \alpha - \frac{\pi}{2}$  et le contrôle optimal vaut  $1$  sur  $[0, t_\alpha]$  puis  $-1$  sur  $[t_\alpha, T]$ . Le point d'arrivée de la trajectoire associée se trouve facilement en utilisant la représentation complexe. Il vient

$$\begin{aligned} z(T) &= \int_0^{t_\alpha} i e^{i(s-T)} ds - \int_{t_\alpha}^T i e^{i(s-T)} ds \\ &= 2e^{i(t_\alpha-T)} - e^{-iT} - 1 = i - 1 - 2e^{i\alpha}, \end{aligned}$$

car  $T = \pi/2$  et  $t_\alpha - T = \alpha - \pi$ . Lorsque  $\alpha$  décrit l'intervalle  $[\pi/2, \pi]$ , le point  $z(T)$  décrit dans le plan  $(x, v)$  un arc de cercle de centre  $(-1, 1)$  et de rayon 2, reliant les points de coordonnées  $(-1, -1)$  à  $(1, 1)$ . Or, pour chaque  $\alpha$ , le point correspondant est situé sur l'intersection de  $\mathcal{A}(T, X_0)$  avec la demi-droite de direction  $-\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ . En conclusion, l'arc de cercle ci-dessus constitue la moitié de la frontière de  $\mathcal{A}(T, X_0)$ , l'autre moitié étant constituée de l'arc de cercle symétrique par rapport à l'origine. On a donc

$$\mathcal{A}(T, X_0) = \{(x, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + (v-1)^2 \leq 4, (x-1)^2 + (v+1)^2 \leq 4\}.$$

Cette ensemble est illustré sur la figure ci-dessous.



### Exercice III. Tracé d'une voie de chemin de fer

On doit tracer une voie de chemin de fer du point 0 au point  $T$  dans un terrain valonné, l'altitude du terrain au point  $t$  étant  $z(t)$ . La pente de la voie ne peut dépasser  $a$ . On note  $x(t)$  l'élévation de la voie au point  $t$ , et on suppose que  $x(0) = z(0)$ . Afin de réduire les remblais et les excavations, on cherche à minimiser le critère

$$\frac{1}{2} \int_0^T (x_u(t) - z(t))^2 dt$$

sous les contraintes  $\dot{x}_u(t) = u(t)$  et  $|u(t)| \leq a$  avec  $a > 0$ .

**Question 1.** Appliquer le principe du minimum. Ecrire en particulier le système aux deux bouts vérifié par la trajectoire optimale  $\bar{x}$  et l'état adjoint  $\bar{p}$ .

**Correction:** On applique le PMP (théorème 5.4). L'état adjoint  $\bar{p}$  est tel que

$$\frac{d\bar{p}}{dt}(t) = -(\bar{x}(t) - z(t)), \quad \forall t \in [0, T], \quad \bar{p}(T) = 0,$$

et le contrôle optimal  $\bar{u}(t)$  réalise le minimum de  $\bar{p}(t)v$  pour  $v \in U = [-a, a]$ . Concrètement, cela signifie que

- Si  $\bar{p}(t) = 0$ , alors  $\bar{u}(t) \in [-a, a]$ ;
- Si  $\bar{p}(t) > 0$ , alors  $\bar{u}(t) = -a$ ;
- Si  $\bar{p}(t) < 0$ , alors  $\bar{u}(t) = a$ .

**Question 2.** Supposons que  $\bar{p}(t) = 0$  sur un intervalle  $I^0$  : que sait-on de  $\bar{u}(t)$  sur cet intervalle ? La restriction de  $\bar{x}$  à  $I^0$  s'appelle arc singulier.

**Correction:** Si  $\bar{p} = 0$  sur un intervalle, alors  $\bar{x}(t) = z(t)$  sur cet intervalle : le tracé optimal suit le relief.

**Question 3.** Pour un  $t \in (0, T)$  donné tel que  $\bar{p}(t) > 0$ , soit  $I^+ = ]\alpha, \beta[$  l'intervalle ouvert maximal contenant  $t$  sur lequel  $\bar{p}$  est strictement positif. On suppose que  $0 < \alpha < \beta \leq T$ . La restriction de  $x$  à  $I^+$  s'appelle arc régulier. Quelle est la forme d'un tel arc ? Montrer que la trajectoire optimale  $\bar{x}$  est telle que  $\int_{\alpha}^{\beta} (z(t) - \bar{x}(t))dt = 0$ . Comment s'interprète géométriquement cette condition ?

**Correction:** Si  $\bar{p}$  est strictement positif sur un intervalle, alors  $\bar{u}(t) = -a$  sur cet intervalle, et donc  $\dot{x}(t) = -a$  sur cet intervalle ; le tracé est donc affine (et descendant). En outre,

$$\int_{\alpha}^{\beta} (z(t) - \bar{x}(t))dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\bar{p}}{dt}(t)dt = \bar{p}(\beta) - \bar{p}(\alpha) = 0,$$

puisque  $(\alpha, \beta)$  est l'intervalle maximal sur lequel  $\bar{p}$  est strictement positif et que  $\bar{p}$  est une fonction continue du temps ; comme  $\alpha > 0$ , on a donc bien  $\bar{p}(\alpha) = 0$ , et on raisonne de même si  $\beta < T$  (et on utilise la condition  $\bar{p}(T) = 0$  sinon). La condition  $\int_{\alpha}^{\beta} (z(t) - \bar{x}(t))dt = 0$  signifie qu'il y a autant d'excavations que de remblais sur  $I^+$ .

**Question 4.** Déterminer le tracé optimal sur le terrain de la forme suivante :

$$z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \frac{T}{3}[\cup]\frac{2T}{3}, T], \\ h > 0 & \text{si } t \in [\frac{T}{3}, \frac{2T}{3}]. \end{cases}$$

Commenter la perte de symétrie de la solution pour  $h$  suffisamment grand.

**Correction:** Supposons dans un premier temps que  $h$  est suffisamment petit. Dans ce cas, le tracé consistera en trois arcs singuliers sur lesquels  $\bar{x}(t)$  est constant et de deux arcs réguliers

pour monter et descendre du plateau. Par symétrie du problème, on cherche donc  $\alpha$  et  $\beta$  avec  $0 < \alpha < T/3 < \beta < T/2$  tels que  $\bar{x}(t) = a(t - \alpha)$  pour  $\alpha \leq t \leq \beta$ ,

$$\int_{\alpha}^{\beta} (z(t) - \bar{x}(t))dt = 0 \quad \text{et} \quad \bar{x}(\beta) = h.$$

D'où  $a(\beta - \alpha) = h$  et  $\frac{T}{3} - \alpha = \beta - \frac{T}{3}$  et finalement  $\alpha = \frac{T}{3} - \frac{h}{2a}$  et  $\beta = \frac{T}{3} + \frac{h}{2a}$ . Cette solution est valable si  $\beta \leq \frac{T}{2}$ , i.e., si  $h \leq \frac{1}{3}Ta$ .

Si  $h$  est plus grand mais pas trop grand, l'arc singulier du milieu va disparaître et on cherchera  $\alpha$  avec  $0 \leq \alpha \leq T/3$  tel que

$$\int_{\alpha}^{\frac{T}{2}} (z(t) - \bar{x}(t))dt = 0.$$

D'où

$$\alpha = \frac{T}{2} - \sqrt{\frac{Th}{3a}}.$$

C'est une solution valable si

$$\frac{1}{3}Ta < h \leq \frac{3}{4}Ta.$$

Enfin, si  $h$  est plus grand que  $\frac{3}{4}Ta$ , la solution consistera en deux arcs réguliers sur  $[0, \alpha]$  et  $[\alpha, T]$ . Le premier arc ne vérifie pas la condition  $\int_0^{\alpha} (z(t) - \bar{x}(t))dt = 0$  (car  $\bar{p}(0)$  est a priori différent de zéro), et le deuxième ne vérifie pas la condition  $\bar{x}(T) = z(T) = 0$ . La solution n'est donc plus symétrique. Cette rupture de symétrie est due au fait qu'on a imposé que  $\bar{x}(0) = z(0)$ , alors qu'il faudra prévoir des remblais au terminus en  $t = T$ . Afin de calculer  $\alpha$ , on écrit

$$\int_{\alpha}^T (z(t) - \bar{x}(t))dt = 0,$$

avec  $\bar{x}(t) = 2\alpha a - at$ , d'où

$$\left(\frac{2T}{3} - \alpha\right)h = \frac{1}{2}a(T - \alpha)(3\alpha - T).$$

Cette équation permet de déterminer  $\alpha$ ; on notera que  $\alpha \rightarrow \frac{2T}{3}$  si  $h \rightarrow \infty$ .

La figure ci-dessous illustre les profils de  $\bar{x}$  (en haut) et de l'état adjoint  $\bar{p}$  (en bas) pour  $h < \frac{1}{3}Ta$  à gauche,  $h \in (\frac{1}{3}Ta, \frac{3}{4}Ta)$  au centre et  $h > \frac{3}{4}Ta$  à droite.

