Cours MAP434 : Contrôle de modèles dynamiques

Séance 7, 24 avril 2019

PRINCIPE DU MINIMUM DE PONTRYAGUINE

Exercice I. La brachistochrone

Cet exercice est tiré de l'examen 2016 (proposé par X. Blanc). On cherche la forme optimale d'une glissière (sans frottement) entre deux altitudes données pour que, si une bille est lâchée sur cette glissière à vitesse initiale nulle, elle arrive à l'autre extrémité en temps minimum. La glissière est décrite par une courbe de classe C^1 (sauf peut-être en ses extrémités)

$$f : [0, x_1] \mapsto \mathbb{R}$$

où $x_1 > 0$, $f(0) = 0$ (altitude de départ nulle par convention), f est à valeurs négatives et $y_1 := f(x_1) \leq 0$ (altitude d'arrivée). On note $(x(t), y(t))$ les coordonnées de la bille à l'instant $t \geq 0$ (noter que $y(t) = f(x(t))$), N la force exercée par la glissière sur la bille (qui est donc normale à la courbe) et $g < 0$ l'amplitude de la pesanteur. Enfin, on note $u(t) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ l'angle entre l'horizontale et la tangente à la courbe au point $(x(t), y(t))$.

Question 1. Déterminer le lien entre $u(t)$ et $f'(x(t))$. En admettant que x et y sont de classe C^1, en déduire que u est continue.

Correction: La tangente à la courbe en $(x, f(x))$ a pour vecteur directeur $(1, f'(x))^\dagger$. On a donc

$$\cos(u(t)) = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x(t))^2}}, \qquad \sin(u(t)) = \frac{f'(x(t))}{\sqrt{1 + f'(x(t))^2}}.$$

Comme $u(t) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a donc

$$u(t) = \arctan(f'(x(t))).$$

Comme f et x sont de classe C^1, u est continue.

Question 2. On note $w(t)$ l'amplitude de la vitesse de la bille projetée sur la tangente à la courbe. Les équations du mouvement s'écrivent

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = w(t)\cos(u(t)), & x(0) = 0, \quad x(T) = x_1, \\ \dot{w}(t) = g\sin(u(t)), & w(0) = 0, \quad w(T) = w_1, \end{cases}$$

avec $w_1^2 = 2gy_1$, et on cherche le contrôle u pour atteindre la cible en temps minimal. On suppose qu'il existe un tel contrôle optimal. On considère une petite perturbation $u + \delta u$. Écrire les équations de la trajectoire perturbée (on la notera $(\delta x, \delta w)$). On admet que la perturbation du temps d'arrivée s'écrit $T + \delta T$. Exprimer $\delta x(T)$ et $\delta w(T)$ en fonction de $u(T)$, δT, g et w_1.

Correction: Les équations linéarisées du mouvement s'écrivent

$$\begin{aligned} \dot{\delta x}(t) &= \cos(u(t))\delta w(t) - w(t)\sin(u(t))\delta u(t), \\ \dot{\delta w}(t) &= g\cos(u(t))\delta u(t). \end{aligned}$$

De plus, $\delta x(0) = \delta w(0) = 0$. En outre, comme $x(T+\delta T) + \delta x(T+\delta T) = x_1 = x(T)$, on en déduit à l'ordre un que $\dot{x}(T)\delta T + \delta x(T) = 0$; de même $w(T+\delta T) + \delta w(T+\delta T) = w_1$ implique que $\dot{w}(T)\delta T + \delta w(T) = 0$. En utilisant les équations de la dynamique, il vient

$$\delta x(T) = -w_1 \cos(u(T))\delta T, \qquad \delta w(T) = -g\sin(u(T))\delta T.$$

Question 3. Donner l'équation vérifiée par l'état adjoint (attention, il n'y a pas de condition sur l'état adjoint en T).

Correction: On applique la formule du cours. En notant $X = (x, w)^\dagger$ l'état du système et $\dot{X}(t) = f(t, X(t), u(t))$ les équations de la dynamique, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial X}(t, X(t), u(t)) = \begin{pmatrix} 0 & \cos(u(t)) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si bien que $\dot{p}(t) = -\frac{\partial f}{\partial X}(t, X(t), u(t))^\dagger p(t)$ implique que p_x est constant et $\dot{p}_w(t) = -p_x \cos(u(t))$.

Question 4. On introduit le Hamiltonien $H(x, w, p_x, p_w, u) = p_x w \cos(u) + g p_w \sin(u) + 1$ et on admet qu'à l'instant final on a la condition (dite de transversalité)

$$H(x(T), w(T), p_x(T), p_w(T), u(T)) = 0$$

pour la trajectoire optimale. En déduire que

$$\delta T = \int_0^T \Big(g p_w(t)\cos(u(t)) - w(t)p_x \sin(u(t))\Big)\delta u(t)\,\mathrm{d}t.$$

Correction: On a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\delta x(t)p_x + \delta w(t)p_w(t)) &= (\cos(u(t))\delta w(t) - w(t)\sin(u(t))\delta u(t))p_x \\ &\quad + g\cos(u(t))\delta u(t)p_w(t) - \delta w(t)p_x\cos(u(t)) \\ &= (g p_w(t)\cos(u(t)) - w(t)p_x\sin(u(t)))\delta u(t).\end{aligned}$$

En intégrant cette égalité de 0 à T, et en utilisant que $\delta x(0) = \delta w(0) = 0$ ainsi que les valeurs de $\delta x(T)$ et $\delta w(T)$ obtenues à la Question 2, il vient

$$-(p_x w_1 \cos(u(T)) + g p_w(T)\sin(u(T)))\delta T = \int_0^T \Big(g p_w(t)\cos(u(t)) - w(t)p_x\sin(u(t))\Big)\delta u(t)\,\mathrm{d}t.$$

On reconnaît à gauche le Hamiltonien, ce qui donne

$$-(H(x(T), w(T), p_x, p_w(T), u(T)) - 1)\delta T = \int_0^T \Big(g p_w(t)\cos(u(t)) - w(t)p_x\sin(u(t))\Big)\delta u(t)\,\mathrm{d}t,$$

et on conclut grâce à la condition de transversalité.

Question 5. En déduire que $u(t)$ est point critique de $v \mapsto H(x(T), w(T), p_x, p_w(T), v)$ à tout temps. En supposant que $w(t)^2 p_x^2 + g^2 p_w(t)^2 \neq 0$, déterminer $\cos(u(t))$ et $\sin(u(t))$ en fonction de $x(t)$, $w(t)$, p_x et $p_w(t)$.

Correction: Comme $\delta T \geq 0$ puisque le temps d'arrivée est optimal, on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^T \Big(g p_w(t) \cos(u(t)) - w(t) p_x \sin(u(t)) \Big) \delta u(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^T \frac{\partial H}{\partial v}(x(t), w(t), p_x, p_w(t), u(t)) \delta u(t) \, \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

ce qui est la caractérisation variationnelle de la minimisation du Hamiltonien à tout temps. On a donc

$$(\cos(u(t)), \sin(u(t)))^\dagger = \arg \min_{Y \in B(0,1)} Y^\dagger Y_0,$$

où $Y_0 = (p_x w(t), g p_w(t))^\dagger$. Le vecteur Y_0 étant non-nul par hypothèse, le problème de minimisation ci-dessus a pour solution unique

$$\cos(u(t)) = \frac{-p_x w(t)}{(w(t)^2 p_x^2 + g^2 p_w(t)^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \sin(u(t)) = \frac{-p_w(t) g}{(w(t)^2 p_x^2 + g^2 p_w(t)^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Question 6. On pose $\gamma(t) := w(t)^2 p_x^2 + g^2 p_w(t)^2$ pour tout $t \in [0,T]$. Montrer que cette fonction ne s'annule sur aucun sous-intervalle de $[0,T]$. Montrer que $\gamma(t) = 1$ sur $[0,T]$ et en déduire que

$$\cos(u(t)) = -p_x w(t), \qquad \sin(u(t)) = -g p_w(t).$$

Correction: On suppose que γ s'annule sur un sous-intervalle $[\alpha, \beta]$. Donc $p_x w(t) = 0$ et $p_w(t) = 0$. L'équation adjointe implique que $p_x \cos(u(t)) = 0$. Si $p_x \neq 0$, $w(t) = 0$ (car $p_x w(t) = 0$) et la dynamique du mouvement implique que $\sin(u(t)) = 0$; or, $\cos(u(t)) = 0$ (car $p_x \cos(u(t)) = 0$), ce qui est impossible. Donc $p_x = 0$. L'état adjoint est alors nul sur $[\alpha, \beta]$, il est donc nul en T, ce qui contredit la condition de transversalité sur le Hamiltonien. En conclusion, $\gamma \neq 0$ ne peut s'annuler sur aucun sous-intervalle.

La fonction γ est absolument continue donc dérivable presque partout sur $[0,T]$. En dérivant par rapport au temps, et en utilisant le résultat de la Question 5 ($u(t)$ est point critique du Hamiltonien), il vient, p.p. sur $[0,T]$,

$$\dot{\gamma}(t) = 2 p_x^2 w(t) g \sin(u(t)) - 2 g^2 p_x \cos(u(t)) p_w(t) = 2 p_x g (p_x w(t) \sin(u(t)) - g p_w(t) \cos(u(t))) = 0.$$

Donc la fonction γ est constante en temps. On constate que $\gamma(T) \neq 0$ car sinon le Hamiltonien serait égal à 1 au temps final, ce qui contredit la condition de transversalité. On a donc

$$0 = H(x(T), w(T), p_x, p_w(T), u(T)) = 1 - \gamma(T)^{\frac{1}{2}},$$

ce qui montre que $\gamma(T) = 1$ et donc que $\gamma(t) = 1$ pour tout $t \in [0,T]$. Par conséquent, les expressions obtenues à la Question 5 deviennent $\cos(u(t)) = -p_x w(t)$ et $\sin(u(t)) = -g p_w(t)$. Noter au passage que le Hamiltonien est constant égal à zéro sur l'extrémale, i.e., on a

$$H(x(t), w(t), p_x, p_w(t), u(t)) = 1 - \gamma(t)^{\frac{1}{2}} = 0, \quad \forall t \in [0,T].$$

Question 7. Montrer que $p_x \neq 0$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par w et la résoudre en utilisant p_x comme paramètre. En déduire les expressions de $x(t)$ et de $y(t)$ en fonction de p_x, g et t. Montrer finalement que $p_x < 0$.

Correction: Si $p_x = 0$, $\cos(u(t)) = 0$ de par la question précédente, et donc $\dot{x}(t) = 0$ d'après l'équation de la dynamique. Ceci est absurde car on ne peut atteindre la cible.

On a $\dot{w}(t) = g\sin(u(t)) = -g^2 p_w(t)$ si bien que $\ddot{w}(t) = g^2 p_x \cos(u(t))$, ce qui montre que

$$\ddot{w}(t) + g^2 p_x^2 w(t) = 0.$$

Comme $w(0) = 0$, on a $w(t) = \lambda \sin(g p_x t)$. Comme $\gamma(0) = 1$, on a $g^2 p_w(0)^2 = 1$ (car $w(0) = 0$), d'où $\dot{w}(0) = -g^2 p_w(0) = \pm g$, et on a $\dot{w}(0) \geq 0$ si bien que $\dot{w}(0) = -g$, ce qui donne finalement

$$w(t) = -\frac{1}{p_x}\sin(g p_x t).$$

En utilisant les équations du mouvement, on en déduit $\dot{x}(t) = w(t)\cos(u(t)) = -p_x w(t)^2 = -\frac{1}{p_x}\sin^2(g p_x t)$, si bien que

$$x(t) = -\frac{t}{2p_x} + \frac{1}{4g p_x^2}\sin(2g p_x t).$$

Comme $y(t) = \frac{1}{2g} w(t)^2$ (conservation de l'énergie), on a

$$y(t) = \frac{1}{4g p_x^2} - \frac{1}{4g p_x^2}\cos(2g p_x t).$$

La courbe obtenue s'appelle une cicloïde. Enfin, comme $\dot{x}(t) = w(t)\cos(u(t)) = -p_x w(t)^2$, on doit nécessairement avoir $p_x < 0$ afin de pouvoir atteindre la cible.

Question 8. Dans le cas où $y_1 = 0$, calculer p_x et T. Dans le cas général, on admet que la courbe optimale admet au plus un point tel que $\dot{y}(t) = 0$. Montrer que si $y_1 > -\frac{2}{\pi}x_1$, la courbe optimale admet exactement un point de minimum, et qu'elle est décroissante sinon.

Correction: Si $y_1 = 0$, alors $\sin(g p_x T) = 0$, i.e., $g p_x T = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et pour que T soit minimal, on doit avoir $k = 1$, i.e., $p_x = \frac{\pi}{gT}$ (on rappelle que $g < 0$). On en déduit que

$$x(t) = -\frac{gT}{2\pi}t + \frac{gT^2}{4\pi^2}\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right),$$

Comme $x(T) = x_1$, on a donc $|g|T^2 = 2\pi x_1$, soit $T = \sqrt{\frac{2\pi x_1}{|g|}}$.

Supposons que la courbe optimale admette un point de minimum au temps t_0, si bien que $\dot{y}(t_0) = 0$. Donc, $2g p_x t_0 = \pi$, et il vient

$$x(t_0) = -\frac{t_0}{2p_x} = \frac{\pi}{4|g|p_x^2}, \qquad y(t_0) = -\frac{1}{2|g|p_x^2}.$$

Ces équations correspondent à un paramétrage de la droite d'équation $y = -\frac{2}{\pi}x$. Si la cible est au-dessus de cette droite, la courbe optimale passe par un unique minimum. si elle est en dessous, la courbe est monotone décroissante.