Cours MAP434 : Contrôle de modèles dynamiques

Séance 8, 31 mai 2018

ÉQUATION DE HAMILTON–JACOBI–BELLMAN

Exercice I. Mouvement d'un point matériel par équation HJB

On considère le mouvement d'un point matériel avec un critère quadratique :

$$\dot{x}_u(t) = u(t), \quad x(s) = \xi, \quad J(s,\xi;u) = \frac{1}{2}\int_s^T (u(t)^2 + x_u(t)^2)\,\mathrm{d}t,$$

pour tout $s \in [0,T]$, $T > 0$ fixé, et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Question 1. Écrire l'équation HJB et la condition finale pour la fonction valeur $V(s,\xi) = \inf_{u\in L^1([0,T];\mathbb{R})} J(s,\xi;u)$.

Correction: Le Hamiltonien est $H(x,p,u) = pu + \frac{1}{2}(x^2+u^2)$, et le Hamiltonien minimisé est $H_\flat(x,p) = \frac{1}{2}(x^2-p^2)$ avec $\tilde{u} = -p$ comme unique minimiseur. On obtient l'équation HJB et la condition finale

$$\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2}\left(\xi^2 - \left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)^2\right) = 0, \quad V(T,\xi) = 0.$$

Question 2. Résoudre l'équation HJB en cherchant la solution sous la forme séparée $V(s,\xi) = \frac{1}{2}\mu(s)\xi^2$. En déduire le contrôle optimal comme feedback et la trajectoire optimale.

Correction: Il vient $\mu'(s) = \mu(s)^2 - 1$ (on retrouve l'équation de Riccati) et $\mu(T) = 0$, d'où $\mu(s) = \tanh(T-s)$. Le contrôle comme feedback optimal est d'après la proposition 8.7

$$\tilde{u}(s,\xi) = -\frac{\partial V}{\partial \xi}(s,\xi) = -\tanh(T-s)\xi.$$

La trajectoire optimale est telle que

$$\frac{d\overline{x}}{dt}(t) = \tilde{u}(t,\overline{x}(t)) = -\tanh(T-t)\overline{x}(t).$$

D'où $\overline{x}(t) = \frac{x_0}{\cosh(T)}\cosh(T-t)$ et $\overline{u}(t) = \tilde{u}(t,\overline{x}(t)) = -\frac{x_0}{\cosh(T)}\sinh(T-t)$.

Exercice II. Politique d'investissement

On considère un consommateur qui dispose d'un capital $x(t)$, où $t \in [0,T]$ est le temps. Ce capital lui rapporte au taux $\alpha > 0$. Par ailleurs, le consommateur dépense une quantité $u(t) \geq 0$ de son capital, de sorte que l'évolution est donnée par

$$\dot{x}_u(t) = \alpha x_u(t) - u(t).$$

On considère la fonction $u(t)$ comme un contrôle, et le consommateur cherche à maximiser la fonction d'utilité suivante :

$$\Psi(u) = \int_0^T e^{-\beta t}\sqrt{u(t)}\,\mathrm{d}t + \sqrt{x_u(T)},$$

sous la contrainte $u \geq 0$ sur le contrôle. Le réel β vérifie $\beta > \alpha/2$. Le dernier terme de la fonction d'utilité traduit le fait qu'on souhaite à la fois maximiser la fonction d'utilité et le capital final. Il s'agit donc d'un problème de contrôle optimal avec le critère $J(u) = -\Psi(u)$.

Question 1. Ecrire le Hamiltonien du système et la définition de la fonction valeur $V(s,\xi)$.

Correction: Le Hamiltonien du système s'écrit

$$H(t,x,p,u) = p(\alpha x - u) - e^{-\beta t}\sqrt{u}.$$

La fonction valeur est définie par

$$V(s,\xi) = \inf_{u\in L^1([s,T];\mathbb{R}_+)} \left\{ -\int_s^T e^{-\beta t}\sqrt{u(t)}\,\mathrm{d}t - \sqrt{x_u(T)} \right\},$$

avec $\dot{x}_u(t) = \alpha x_u(t) - u(t)$ et $x_u(s) = \xi$.

Question 2. Écrire l'équation HJB vérifiée par V, et la résoudre en supposant une séparation des variables sous la forme $V(s,\xi) = f(s)\sqrt{\xi}$.

Correction: L'équation HJB s'écrit

$$\frac{\partial V}{\partial s} + \inf_{u\in\mathbb{R}_+} H\left(s,\xi,\frac{\partial V}{\partial \xi}(s,\xi),u\right) = 0, \quad V(T,\xi) = -\sqrt{\xi}.$$

On a $\frac{\partial H}{\partial u}(s,\xi,p,u) = -p - \frac{1}{2}e^{-\beta s}\frac{1}{\sqrt{u}}$. Ainsi, si $p \geq 0$, alors H est décroissante en u, et l'inf est atteint pour $u \to +\infty$. Dans le cas contraire, c'est-à-dire si $p < 0$, alors H est décroissante puis croissante en u. Donc le minimum est atteint au point d'annulation de la dérivée, à savoir $\overline{u} = \frac{1}{4p^2}e^{-2\beta s}$. Dans ce cas, l'infimum vaut

$$\inf_{u\in\mathbb{R}_+} H(s,\xi,p,u) = p\left(\alpha\xi - \frac{1}{4p^2}e^{-2\beta s}\right) - e^{-\beta s}\frac{1}{2|p|}e^{-\beta s} = p\alpha\xi + \frac{1}{4p}e^{-2\beta s}.$$

Localement autour de $t = T$, on a bien $\frac{\partial V}{\partial \xi} < 0$ si on suppose V régulière, donc l'équation HJB s'écrit

$$\frac{\partial V}{\partial s} + \alpha\xi\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{e^{-2\beta s}}{4}\frac{1}{\frac{\partial V}{\partial \xi}} = 0, \quad V(T,\xi) = -\sqrt{\xi}.$$

Pour résoudre cette équation, on suppose que $V(t,\xi) = f(t)\sqrt{\xi}$. On obtient

$$f'(s)\sqrt{\xi} + \frac{1}{2}\alpha\xi f(s)\frac{1}{\sqrt{\xi}} + \frac{e^{-2\beta s}}{2}\frac{\sqrt{\xi}}{f(s)} = 0,$$

soit

$$\left(f'(s) + \frac{\alpha}{2}f(s) + \frac{e^{-2\beta s}}{2f(s)}\right)\sqrt{\xi} = 0.$$

En simplifiant par $\sqrt{\xi}$, on obtient

$$2f(s)f'(s) + \alpha f(s)^2 = -e^{-2\beta s},$$

d'où, en mutlipliant par $e^{\alpha s}$,

$$\frac{d}{ds}\left(e^{\alpha s} f(s)^2\right) = -e^{(\alpha-2\beta)s}.$$

En intégrant de s à T et en utilisant la condition finale, qui se traduit par $f(T) = -1$, on a donc

$$f(s)^2 = e^{\alpha(T-s)} - \int_s^T e^{(\alpha-2\beta)t-\alpha s}\,\mathrm{d}t = e^{\alpha(T-s)} + \frac{e^{-2\beta s} - e^{(\alpha-2\beta)T-\alpha s}}{2\beta-\alpha}.$$

On peut vérifier que pour tout $s \in [0,T]$, cette expression est bien positive. Par ailleurs, on a vu précédemment que f devait être négative, au moins au voisinage de $s = T$. On en déduit

$$V(s,\xi) = -\sqrt{\xi}\sqrt{e^{\alpha(T-s)} + \frac{e^{-2\beta s} - e^{(\alpha-2\beta)T-\alpha s}}{2\beta-\alpha}}.$$

Question 3. En déduire la stratégie d'investissement optimale et la valeur finale du capital.

Correction: On reconstruit un feedback optimal grâce à la formule

$$\tilde{u}(s,\xi) = \operatorname*{arginf}_{u\in\mathbb{R}_+} H\left(s,\xi,\frac{\partial V}{\partial \xi}(s,\xi),u\right).$$

Tout d'abord, on a

$$\frac{\partial V}{\partial \xi}(s,\xi) = -\frac{1}{2\sqrt{\xi}}\sqrt{e^{\alpha(T-s)} + \frac{e^{-2\beta s} - e^{(\alpha-2\beta)T-\alpha s}}{2\beta-\alpha}}.$$

Et d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\tilde{u}(s,\xi) &= \frac{1}{4\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)^2}e^{-2\beta s} = \frac{\xi}{e^{\alpha(T-s)} + \frac{e^{-2\beta s}-e^{(\alpha-2\beta)T-\alpha s}}{2\beta-\alpha}}e^{-2\beta s}\\ &= \frac{\xi(2\beta-\alpha)e^{-2\beta s}}{(2\beta-\alpha)e^{\alpha(T-s)} + e^{-2\beta s} - e^{(\alpha-2\beta)T-\alpha s}}.\end{aligned}$$

Donc, en utilisant cette stratégie optimale, x est solution de

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) - \frac{x(t)(2\beta-\alpha)e^{-2\beta t}}{(2\beta-\alpha)e^{\alpha(T-t)} + e^{-2\beta t} - e^{(\alpha-2\beta)T-\alpha t}}.$$

En intégrant cette équation, il vient

$$x(t) = x(0)\exp\left[\alpha t - \int_0^t \frac{(2\beta-\alpha)e^{-2\beta s}}{(2\beta-\alpha)e^{\alpha(T-s)} + e^{-2\beta s} - e^{(\alpha-2\beta)T-\alpha s}}\,\mathrm{d}s\right].$$

Pour $t = T$, on obtient

$$x(T) = x(0)\exp\left[\alpha T - \int_0^T \frac{(2\beta-\alpha)e^{-2\beta s}}{(2\beta-\alpha)e^{\alpha(T-s)} + e^{-2\beta s} - e^{(\alpha-2\beta)T-\alpha s}}\,\mathrm{d}s\right].$$

Exercice III. Minimisation quadratique

On considère le problème de minimisation suivant :

$$\inf_{\substack{y\in H^1([0,1])\\ y(0)=y_0, y(1)=y_1}} J(y) \qquad \text{où} \qquad J(y)=\int_0^1 \left(y'(x)^2+y(x)^2\right)\,\mathrm{d}x.$$

On rappelle que $H^1([0,1])$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle y|z\rangle=\int_0^1 y'(x)z'(x)dx+\int_0^1 y(x)z(x)dx$. On admettra que l'application $\gamma : H^1([0,1])\to\mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(y)=(y(0),y(1))$ est continue.

Question 1. Démontrer que le problème ci-dessus admet une unique solution.

Correction: On constate que $J(y)=\|y\|^2$, où $\|\cdot\|$ est la norme de l'espace $H^1([0,1])$. Elle est donc fortement convexe. D'autre part, si y vérifie $y(0)=y_0$ et $y(1)=y_1$, alors la fonction

$$z(x)=y(x)-y_0-x(y_1-y_0)$$

vérifie $z(0)=z(1)=0$. L'espace vectoriel

$$V=\left\{y\in H^1([0,1]),\quad y(0)=y(1)=0\right\}$$

est un sous-espace fermé de $H^1([0,1])$ car $V=\ker\gamma$ et γ est continue. Donc il s'agit d'un espace de Hilbert (cet espace est souvent noté $V=H_0^1([0,1])$). Or, le problème étudié est équivalent à minimiser $\tilde{J}(z)=J(z+y_0+x(y_1-y_0))$ sur V. La fonctionnelle $\tilde{J}$ est fortement convexe car J l'est. Le problème ci-dessus admet donc une unique solution dans V.

Question 2. Démontrer que la solution vérifie l'équation $y''=y$. On supposera pour cela que y est de classe C^2. En déduire l'expression de y.

Correction: Si y est minimiseur, alors pour tout $z\in V$ et tout $t\in\mathbb{R}$, on a $J(y+tz)\geq J(y)$. En développant, ceci implique que

$$2t\int_0^1 \left(y'(x)z'(x)+y(x)z(x)\right)\mathrm{d}x+t^2J(z)\geq 0.$$

Il s'agit d'un polynôme en t, qui ne peut être positif que si le premier terme est nul. Donc, on a

$$\forall z\in V,\quad \int_0^1 \left(y'(x)z'(x)+y(x)z(x)\right)\mathrm{d}x=0.$$

En intégrant par parties et comme on suppose que y est de classe C^2, on obtient $\int_0^1 \left(-y''(x)+y(x)\right)z(x)\,\mathrm{d}x=0$. Comme V est dense dans $L^2([0,1])$, on en déduit l'équation. On la résout, et on obtient $y(x)=Ae^x+Be^{-x}$. En utilisant les conditions au bord, il vient

$$y(x)=\frac{ey_1-y_0}{e^2-1}e^x+\frac{ey_0-y_1}{e^2-1}e^{1-x}.$$

Question 3. On va retrouver le résultat ci-dessus en utilisant le principe de Bellman. Pour cela, on considère le système de contrôle $y_u'(t) = u(t)$ avec comme donnée initiale $y_u(0) = y_0$. Pour simplifier, on prend $y_1 = 0$. On définit le critère

$$J_\varepsilon(u) = \int_0^1 \left(y_u(t)^2 + u(t)^2\right) \,\mathrm{d}t + \frac{1}{\varepsilon} y_u(1)^2,$$

où $\varepsilon > 0$ est un paramètre qui tendra vers 0 in fine. Donner la définition de la fonction valeur de ce problème, et écrire l'équation HJB.

Correction: Comme dans le cours, on plonge ce problème de contrôle dans une classe plus large de problèmes définis pour tout $s \in [0, 1]$ et tout $\xi \in \mathbb{R}$ par

$$y_u'(t) = u(t),\ \ t \in [s, 1], \quad y_u(s) = \xi.$$

$$J_\varepsilon(s, \xi, u) = \int_s^1 \left(y_u(t)^2 + u(t)^2\right) \,\mathrm{d}t + \frac{1}{\varepsilon} y_u(1)^2.$$

La fonction valeur $V(s, \xi)$ est définie par

$$\forall s \in [0, 1],\ \ \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad V(s, \xi) = \inf_{u \in L^1([s,1];\mathbb{R})} J_\varepsilon(s, \xi, u).$$

Pour écrire l'équation HJB, on forme le Hamiltonien du problème :

$$H(t, y, p, u) = pu + y^2 + u^2.$$

Le Hamiltonien minimisé est

$$H_\flat(t, y, p) = \inf_{u \in \mathbb{R}} H(t, y, p, u) = y^2 - \frac{p^2}{4},$$

et l'équation HJB est

$$\frac{\partial V}{\partial s} + y^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = 0, \quad V(1, y) = \frac{1}{\varepsilon} y^2.$$

Question 4. Résoudre l'équation de HJB en cherchant une solution sous la forme séparée $V(s, y) = \phi(s) y^2$.

Correction: On note que le changement de variable proposé permet de factoriser y^2 dans l'équation. On a donc

$$\phi' + 1 - \phi^2 = 0, \quad \phi(1) = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Il s'agit de l'équation de Riccati. Pour la résoudre, on constate que pour ε assez petit, on a $\phi > 1$ dans un voisinage de $s = 1$. On peut donc diviser par $\phi^2 - 1$, ce qui donne

$$\frac{\phi'}{\phi - 1} - \frac{\phi'}{\phi + 1} = 2.$$

On intègre, et on a $\ln\left(\frac{\phi-1}{\phi+1}\right) = 2s + C$. En imposant la condition $\phi(1) = \frac{1}{\varepsilon}$, on a $C = \ln\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right) - 2$, d'où
$$\phi(s) = \frac{1+\varepsilon+(1-\varepsilon)e^{2(s-1)}}{1+\varepsilon-(1-\varepsilon)e^{2(s-1)}} = \frac{1-\varepsilon\tanh(s-1)}{\varepsilon-\tanh(s-1)}.$$
En conclusion, la solution de l'équation HJB est
$$V(s,y) = \frac{1-\varepsilon\tanh(s-1)}{\varepsilon-\tanh(s-1)}y^2.$$

Question 5. Calculer le contrôle optimal comme un feedback, et déterminer sa limite quand $\varepsilon \to 0$. Retrouver, dans la limite $\varepsilon \to 0$, le résultat de la question 2.

Correction: Le contrôle optimal comme un feedback est donné par
$$u(s,\xi) = \operatorname{arginf}_{u\in\mathbb{R}} H\left(s,\xi,\frac{\partial V}{\partial \xi}(s,\xi),u\right).$$
Ici, on obtient
$$H\left(s,\xi,\frac{\partial V}{\partial \xi}(s,\xi),u\right) = 2\xi u\frac{1-\varepsilon\tanh(s-1)}{\varepsilon-\tanh(s-1)} + \xi^2 + u^2.$$
D'où
$$u(s,\xi) = -\xi\frac{1-\varepsilon\tanh(s-1)}{\varepsilon-\tanh(s-1)}.$$
Quand $\varepsilon \to 0$, on obtient
$$u(s,\xi) = -\frac{\xi}{\tanh(1-s)}.$$
Avec ce contrôle optimal, on a $\overline{y}'(s) = -\overline{y}(s)/\tanh(1-s)$. Or, la solution de la question 2 quand $y_1 = 0$ s'écrit
$$y(s) = \frac{y_0}{e^2-1}\left(e^{2-s}-e^s\right) = \frac{2ey_0}{e^2-1}\sinh(1-s), \quad \text{d'où} \quad y'(s) = -\frac{2ey_0}{e^2-1}\cosh(1-s).$$
Ainsi, cette solution vérifie bien $y'(s) = -y(s)/\tanh(1-s)$. Comme elle vaut aussi y_0 en $s=0$, elle est bien égale à celle obtenue par la méthode de Bellman.

Exercice IV. Temps de sortie

On considère le système de contrôle linéaire $\dot{x}_u(t) = u(t)$ avec un contrôle à valeurs dans un sous-ensemble fermé non-vide et borné $U \subset \mathbb{R}^d$. Pour $x_0 \in \Omega$, ouvert borné, on s'intéresse au temps minimal de sortie de Ω de la trajectoire partant de x_0. On note $V(x_0)$ la fonction valeur (c'est-à-dire, ce temps minimal). Par convention, on pose $V \equiv 0$ dans $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$.

Question 1. On pose $\mathcal{A}(1,0)$ l'ensemble atteignable en temps 1 partant de l'état initial $x_0 = 0$. Montrer que $\mathcal{A}(1,0) = \operatorname{conv}(U)$ et que $\mathcal{A}(t,x) = x + t\mathcal{A}(1,0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $t \geq 0$.

Correction: Si x est dans l'enveloppe convexe de U, $x = \sum_i t_i u_i$ avec $u_i \in U$, $\sum_i t_i = 1$, $t_i \geq 0$. Il suffit de prendre le contrôle $u(t) = u_i$ si $\sum_{j<i} t_j \leq t < \sum_{j\leq i} t_j$. On arrive bien en x au temps

1. Réciproquement, supposons $x = \int_0^1 u(s)\,\mathrm{d}s$ avec $u(t) \in U$ p.p., et supposons $x \notin \mathrm{conv}(U)$. Grâce au corollaire 3.4 (séparation d'un point et d'un convexe fermé), on sait qu'il existe $b \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $b^\dagger x > \alpha$, $b^\dagger u \leq \alpha$ pour tout $u \in U$. En particulier, $b^\dagger x = \int_0^1 b^\dagger u(s)\,\mathrm{d}s \leq \alpha$, une contradiction. Enfin, si u amène 0 en $z \in \mathcal{A}(1,0)$ en temps 1, c'est-à-dire, $z = \int_0^1 u(s)\,\mathrm{d}s$, alors $u(\cdot/t)$ amène x en $x + tz$, i.e., $x + tz = x + \int_0^t u(s/t)\,\mathrm{d}s$. On a donc $\mathcal{A}(t,x) = x + t\mathcal{A}(1,0)$.

Question 2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, si $x \in \Omega$, $V(x) = \varepsilon + \min_{z\in\partial\mathcal{A}(1,0)} V(x+\varepsilon z)$. Quel ε maximal peut-on prendre ici ? Que donne alors la formule ?

Correction: C'est la programmation dynamique. Si $\mathcal{A}(\varepsilon, x) \subset \Omega$, une trajectoire (presque) optimale partant de x va d'abord sortir de $\mathcal{A}(\varepsilon, x) = x + \varepsilon\mathcal{A}(1,0)$ au temps ε (et pas plus tard, sinon on pourrait l'améliorer, ni plus tôt, sinon les points suivants sur la trajectoire seraient encore dans l'ensemble atteignable) en un point $x + \varepsilon z$ avant de poursuivre vers $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ et d'y arriver en un temps (presque égal à) $V(x + \varepsilon z)$. Si le point z ne minimise pas $V(x + \varepsilon z)$, alors on pourra trouver une trajectoire meilleure. Ce raisonnement tient tant que $V(x + \varepsilon z) > 0$ pour tout $z \in \partial\mathcal{A}(1,0)$. On déduit alors que

$$V(x) = \sup\{t : \min_{z\in\partial\mathcal{A}(1,0)} V(x + tz) > 0\} = \sup\{t : x + t\mathcal{A}(1,0) \subset \Omega\}.$$

Question 3. On suppose que $\mathcal{A}(1,0)$ est d'intérieur non vide et en particulier contient une boule $B(0,r)$. Montrer que pour tout $x, y \in \Omega$, $V(x) - V(y) \leq |x - y|/r$. Qu'en déduit-on ?

Correction: Soit un contrôle u, optimal à $\varepsilon > 0$ près, amenant y vers $\partial\Omega$. Comme $\mathcal{A}(1,0) \supseteq B(0,r)$, $r(y - x)/|y - x| \in \mathcal{A}(1,0)$. Il existe donc un contrôle $v : [0,1] \to U$ qui amène 0 en $r(y - x)/|y - x|$ (par définition de $\mathcal{A}(1,0)$). Alors, la fonction $\tilde{v} : [0, |y - x|/r] \to U$ telle que $\tilde{v}(t) = v(rt/|y - x|)$ amène 0 en $y - x$, et donc x en y. Le contrôle $\tilde{u} := \tilde{v}$ sur $[0, |y - x|/r]$ puis $u(|y - x|/r + \cdot)$ ensuite amène x au bord de Ω en un temps au plus $|y - x|/r + V(y) + \varepsilon$ (ou peut-être avant). On a donc $V(x) \leq |y - x|/r + V(y) + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, et on conclut en faisant tendre ε vers zéro. La fonction valeur V est donc lipschitzienne.

Question 4. On rappelle le théorème de Rademacher qui dit qu'une fonction lipschitzienne a une dérivée presque partout. On pose, pour tout $q \in \mathbb{R}^d$, $h(q) = \sup_{v\in\mathcal{A}(1,0)} v^\dagger q$. Montrer que presque partout dans Ω, $h(-\nabla V) \leq 1$.

Correction: Soit $x \in \Omega$ un point de différentiabilité de V. Soit $v \in \mathcal{A}(1,0)$ et un contrôle u amenant $x - \varepsilon v$ à x en temps ε. On voit à nouveau que $V(x - \varepsilon v) \leq \varepsilon + V(x)$. Donc $(V(x - \varepsilon v) - V(x))/\varepsilon \leq 1$ et à la limite $-\nabla V(x)^\dagger v \leq 1$. En prenant le supremum sur tous les v possibles, on déduit que $h(-\nabla V(x)) \leq 1$.

Question 5. Montrer que $h(-\nabla V) = 1$ p.p. dans Ω.

Correction: On a

$$V(x) = \varepsilon + \min_{z\in\partial\mathcal{A}(1,0)} V(x + \varepsilon z).$$

Si x est un point de différentiabilité de V, $V(x + \varepsilon z) = V(x) + \varepsilon\nabla V(x)^\dagger z + o(\varepsilon)$. On appelle z_ε un point qui réalise le min. On a donc $V(x) = \varepsilon + V(x) + \varepsilon\nabla V(x)^\dagger z_\varepsilon + o(\varepsilon)$, ou encore

$0 = 1 + \nabla V(x)^\dagger z_\varepsilon + o(1)$. On peut extraire une sous-suite (z_{ε_k}) qui converge vers un certain $z \in \mathcal{A}(1,0)$ et on obtient à la limite $\nabla V(x)^\dagger z = -1$. Donc $h(-\nabla V(x)) \geq 1$. En combinant avec l'inégalité précédente, on trouve l'équation demandée.

Question 6. Discuter le cas $U = B(0,1)$. Montrer par un exemple que même en ajoutant la condition au bord $V = 0$ sur $\partial\Omega$, l'équation ne suffit pas à caractériser V (qui, elle, est unique par définition).

Correction: $V(x)$ est alors la distance au bord. L'équation est $|\nabla V| = 1$ (c'est l'équation Eikonale). En dimension 1, on peut trouver une infinité de fonctions qui vérifient $|u'| = 1$ p.p. dans $[0,1]$ et $u(0) = u(1) = 1$ (n'importe quelle "dent de scie" de pente alternativement 1 et -1), alors que V est la fonction $1/2 - |1/2 - x|$.