Cours MAP434, «Contrôle de modèles dynamiques»

Séance 8, 15 mai 2019

TRANSFERT ORBITAL D'UN SATELLITE

Un problème important en mécanique spatiale est le transfert de satellite d'une orbite à une autre. Il s'agit d'un problème classique, mais réactualisé avec la technologie des moteurs à poussée faible et « continue » ainsi que par l'utilisation des propriétés dynamiques du problème des trois corps. On considérera ici le cas d'un transfert où notre satellite est soumis à la seule attraction terrestre. On utilisera des techniques de contrôle optimal pour résoudre numériquement un problème de transfert en poussée minimale ou en temps minimal d'une orbite elliptique ou circulaire basse à une orbite géostationnaire. On ne considèrera que le problème de transfert orbital à masse constante dans le plan.

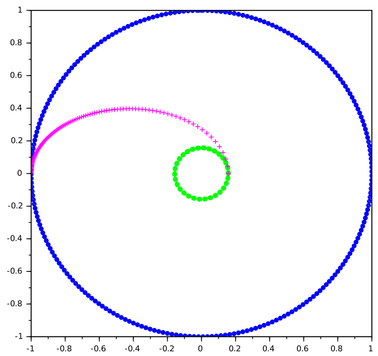

FIGURE 1 – Exemple de transfert.

1 Modélisation : Dynamique de Kepler

On assimile le satellite à un point matériel de masse m. L'accélération subie par un satellite étant due au potentiel terrestre ainsi qu'à la poussée exercée par les moteurs, le mouvement de l'engin dans le plan est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} = -\mu \frac{x}{|x|^3} + \frac{F}{m}, \tag{1}$$

où $x = (x_1, x_2)$ est le vecteur position dans un référentiel centré en la Terre, $F = (F_1, F_2)$ la poussée (c'est-à-dire le contrôle), m la masse du satellite et $\mu = 398600.47$ km^3.s^{-2} la constante gravitationnelle de la Terre. La norme $|\cdot|$ est la norme euclidienne. Le système libre $F = 0$ correspond aux équations de Kepler bien connues. On écrit ces équations sous la forme d'un système d'ordre un adimensionné :

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \eta, \\ \dot{\eta} &= -\alpha^2 \frac{q}{|q|^3}, \end{aligned} \tag{2}$$

où $q = x/x_f$ est le vecteur position adimensionné, $x_f = 42165$ km est le rayon de l'orbite géostationnaire et $\alpha = \sqrt{\frac{\mu}{x_f^3}} = 0.26$ heure^{-1}.

Le but est de transférer le satellite d'une condition initiale (ici une orbite circulaire basse de rayon $q_b = 0.1575 = \frac{x_0}{1.75 x_f}$, $x_0 = 11625$ km) à une orbite géostationnaire (orbite circulaire de période 24 heures). Les conditions initiales pour calculer ces orbites sont données dans le tableau ci-dessous. On effectuera l'optimisation d'une part en poussée minimale avec deux impulsions (en poussant à l'instant initial et o l'instant final) et d'autre part en temps minimal (la poussée étant alors limitée en norme, mais exercée à tout temps). On rappelle que l'orbite est circulaire lorsque les vecteurs position et vitesse initiaux satisfont $\eta(0) = \frac{\alpha}{|q(0)|^{\frac{3}{2}}} \mathcal{R} q(0)$ où $\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ dans le plan (on a donc $|\eta(0)|^2 = \frac{\alpha^2}{|q(0)|}$ et la force de gravitation équilibre la force centrifuge).

Orbite	Position initiale	Vitesse initiale
Géostationnaire	$q(0) = (0, 1)$	$\eta(0) = (-\alpha, 0)$
Circulaire basse	$q(0) = (q_b, 0)$	$\eta(0) = \left(0, \frac{\alpha}{\sqrt{q_b}}\right)$

2 Transfert en poussée minimale

Une trajectoire qui permet de passer d'une orbite circulaire basse à une autre orbite circulaire dans le même plan par deux manœuvres impulsionnelles est appelée une orbite de Hohmann. [1] On suppose le satellite sur une orbite circulaire basse et on souhaite l'amener sur l'orbite géostationnaire (en tournant dans le sens trigonométrique)

- — en exerçant une poussée ponctuelle à $t = 0$ (ce qui revient à ajouter un delta de vitesse vectorielle ΔV_0 à la vitesse initiale) ;
- — en laissant le satellite par gravitation atteindre à t_f l'orbite géostationnaire en un point $q(t_f)$ (en supposant l'énergie totale suffisante pour croiser cette orbite) ;
- — et enfin, en exerçant une poussée ponctuelle à t_f (soit un delta de vitesse vectorielle ΔV_f) pour corriger en amplitude et direction la vitesse pour que le satellite suive ensuite par gravitation l'orbite géostationnaire, i.e., pour que sa vitesse soit $\alpha \mathcal{R} q(t_f)$.

On cherche à minimiser les deux poussées exercées :

$$\min \frac{1}{2}(|\Delta V_0|^2 + |\Delta V_f|^2)$$

sous les contraintes

$$|q(t_f)|^2 - 1 = 0, \qquad \eta(t_f) + \Delta V_f = \alpha \mathcal{R} q(t_f),$$

où $(q(t), \eta(t))$ est solution de l'équation différentielle (2) avec comme condition initiale

$$q(0) = q_0 \qquad \eta(0) = \eta_0 + \Delta V_0$$

où $q_0 = (q_b, 0)$ et $\eta_0 = (0, \frac{\alpha}{\sqrt{q_b}})$ correspondent aux position et vitesse du satellite sur la trajectoire initiale. Nous pouvons reformuler ce problème sous la forme

$$\min_{u_0 \in \mathbb{R}^2} J(u_0) = \min_{u_0 \in \mathbb{R}^2} \frac{1}{2}(|u_0 - \eta_0|^2 + |\eta(t_f) - \alpha \mathcal{R} q(t_f)|^2), \tag{3}$$

avec les contraintes $\dot{q}(t) = \eta(t)$ sur $[0, t_f]$, $\dot{\eta} = -\alpha^2 \frac{q}{|q|^3}$ sur $[0, t_f]$, $q(0) = q_0$, $\eta(0) = u_0$, et $|q(t_f)|^2 - 1 = 0$. Il s'agit d'un problème de contrôle optimal pour lequel le contrôle s'exerce sur la condition initiale.

1. https:\\fr.wikipedia.org\wiki\Orbite_de_transfert

Question 1. On perturbe u_0 en $u_0 + \delta w_0$, $0 < \delta \ll 1$. En linéarisant le système différentiel direct, écrire l'équation au premier ordre de la trajectoire perturbée $y + \delta z$ avec $y = (q, \eta) \in \mathbb{R}^4$ et $z = (r, \nu) \in \mathbb{R}^4$, et préciser la condition initiale sur z.

Question 2. On note $t_f + \delta\tau$ la perturbation sur le temps final, et δe et $\delta\zeta$ les perturbations sur les position et vitesse finales. Evaluer e et ζ et montrer la condition de transversalité sur la trajectoire perturbée $(q(t_f), e)_{\mathbb{R}^2} = 0$.

Question 3. On introduit l'état adjoint $p = (s, \mu) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\dot{p} = -A(q, \eta)^\dagger p$ et satisfaisant les conditions de tranversalité suivantes au temps final :

$$\mu(t_f) = \eta(t_f) - \alpha\mathcal{R}q(t_f), \qquad (s(t_f) - \alpha\mathcal{R}\eta(t_f), \mathcal{R}q(t_f))_{\mathbb{R}^2} = 0,$$

ainsi que la condition

$$(s(t_f), \eta(t_f))_{\mathbb{R}^2} = \alpha^2(\mu(t_f), q(t_f))_{\mathbb{R}^2}.$$

Calculer la variation à l'ordre un du critère.

Question 4. Montrer que le problème à résoudre se reformule de la manière suivante : chercher $(u_0, s_0, t_f) \in \mathbb{R}^5$ tel que si $(y, p) = ((q, \eta), (s, \mu))$ est solution du système différentiel

$$\dot{y} = (\eta, -\alpha^2 \tfrac{q}{|q|^3}), \qquad \dot{p} = -A(q, \eta)^\dagger p, \qquad t \in [0, t_f],$$

avec pour conditions initiales $(q_0, u_0, s_0, \eta_0 - u_0)$, alors les 5 conditions d'annulation suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} |q(t_f)|^2 - 1 &= 0, \\ -\mu(t_f) + \eta(t_f) - \alpha\mathcal{R}q(t_f) &= 0, \\ (-s(t_f) + \alpha\mathcal{R}\eta(t_f), \mathcal{R}q(t_f))_{\mathbb{R}^2} &= 0, \\ (s(t_f), \eta(t_f))_{\mathbb{R}^2} - \alpha^2(\mu(t_f), q(t_f))_{\mathbb{R}^2} &= 0. \end{aligned}$$

Ce problème peut être résolu par un algorithme de tir qui est une méthode itérative de type point fixe.

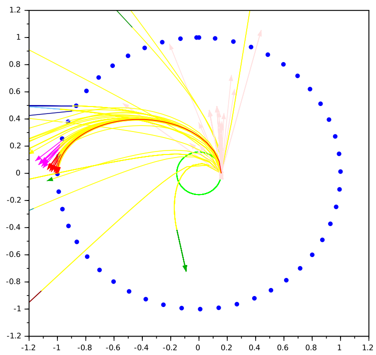

FIGURE 2 – Algorithme de tir : cas orbite circulaire basse.

3 Transfert en temps minimal

On suppose maintenant que la poussée est limitée, $|F| \leq F_{\max}$, et qu'elle s'exerce durant toute la trajectoire sans diminution de masse. On introduit le paramètre $\beta = \dfrac{F_{\max}}{mp_f}$ exprimé en h^{-2} avec par exemple pour une poussée plutôt forte

$$F_{\max} = 3000\text{N}, \qquad m = 1500\text{kg},$$

et pour une poussée assez faible

$$F_{\max} = 60\text{N}, \qquad m = 1500\text{kg}.$$

L'équation de la dynamique sous contrôle devient

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \eta, \\ \dot{\eta} &= -\alpha^2 \frac{q}{|q|^3} + \beta u, \end{aligned} \tag{4}$$

avec la contrainte sur le contrôle $u(t) \in \mathbb{R}^2 : |u(t)| \leq 1$, et les conditions initiales sont données par

$$q(0) = q_0, \qquad \eta(0) = \eta_0.$$

Les contraintes de cible à temps final deviennent

$$\exists t_f \quad \text{tel que} \quad |q(t_f)|^2 - 1 = 0, \quad \eta(t_f) = \alpha \mathcal{R} q(t_f),$$

et la fonctionnelle à minimiser est

$$J(u) = t_f = \int_0^{t_f} 1 dt.$$

Question 5. On perturbe $u(t)$ en $u(t) + \delta w(t)$, avec $|(u + \delta w)(t)| \leq 1$ pour tout t et $0 < \delta \ll 1$. En linéarisant le système différentiel direct, écrire l'équation au premier ordre de la trajectoire perturbée $y + \delta z$ avec $y = (q, \eta) \in \mathbb{R}^4$ et $z = (r, \nu) \in \mathbb{R}^4$.

Question 6. On note $t_f + \delta\tau$ la perturbation sur le temps final, et δe et $\delta\zeta$ les perturbations sur les position et vitesse finales. Evaluer e et ζ et montrer les conditions de transversalité sur la ptrajectoire perturbée $(q(t_f), e)_{\mathbb{R}^2} = 0$ et $\zeta = \alpha \mathcal{R} e$.

Question 7. On introduit l'état adjoint $p = (s, \mu) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\dot{p} = -A(q, \eta)^\dagger p$ et satisfaisant les conditions de transversalité suivantes au temps final t_f :

$$(s(t_f) - \alpha \mathcal{R} \mu(t_f), \mathcal{R} q(t_f))_{\mathbb{R}^2} = 0 \qquad (s(t_f), \dot{q}(t_f))_{\mathbb{R}^2} + (\mu(t_f), \dot{\eta}(t_f))_{\mathbb{R}^2} = -1.$$

On notera que la première de ces conditions correspnd à la condition de tranversalité sur l'état adjoint vue en cours (perpendicularité par rapport à l'espace tangent à la variété cible) et que la deuxième correspond à la condition de transversalité sur le Hamiltonien en admettant que l'extrémale est normale. Calculer la variation à l'ordre un du critère.

Question 8. Montrer que le problème à résoudre se reformule de la manière suivante : chercher $(s_0, \mu_0, t_f) \in \mathbb{R}^5$ tel que si (y, p) est solution du système différentiel

$$\dot{y} = (\eta, -\alpha^2 \tfrac{q}{|q|^3}) + (0, -\beta \tfrac{\mu(t)}{|\mu(t)|}), \qquad \dot{p} = -A(q, \eta)^\dagger p, \qquad t \in [0, t_f],$$

avec pour conditions initiales $(q_0, \eta_0, s_0, \mu_0)$, alors les 5 conditions d'annulation sont vérifiées :

$$\begin{aligned}
|q(t_f)|^2 - 1 &= 0, \\
\eta(t_f) - \alpha \mathcal{R} q(t_f) &= 0, \\
(-s(t_f) + \alpha \mathcal{R} \mu(t_f), \mathcal{R} q(t_f))_{\mathbb{R}^2} &= 0, \\
(s(t_f), \dot{q}(t_f))_{\mathbb{R}^2} + (\mu(t_f), \dot{\eta}(t_f))_{\mathbb{R}^2} + 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Ce problème peut être résolu par un algorithme de tir qui est une méthode itérative de type point fixe.

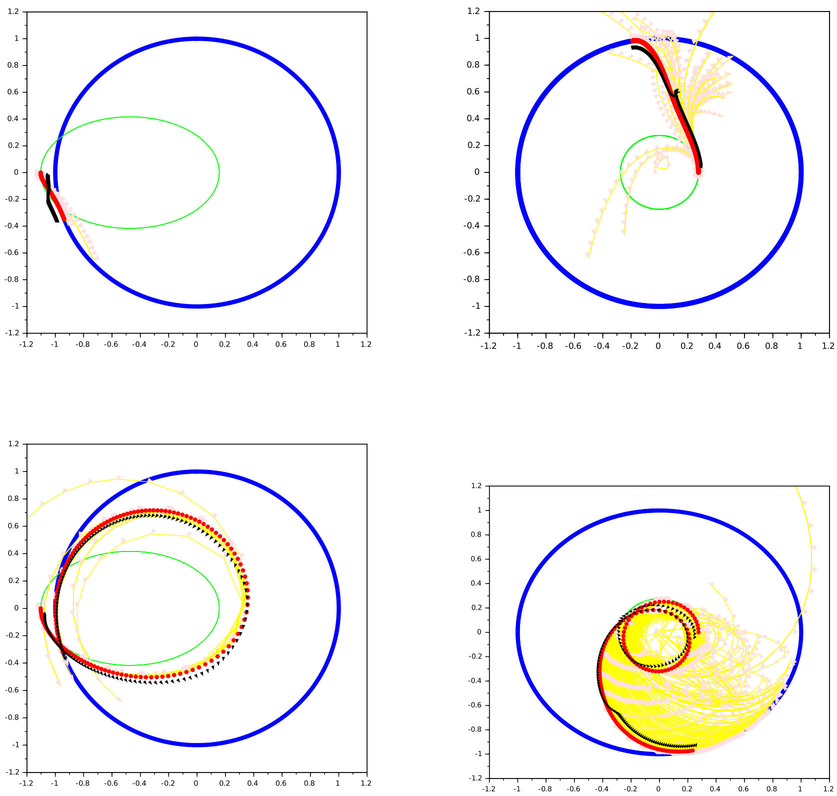

FIGURE 3 – Algorithme de tir : minimum global ou local.

4 Simulations Scilab

On intègre l'équation de la dynamique en utilisant un algorithme de Runge–Kutta adaptatif (ce qui permet de ne pas spécifier le pas de discrétisation dans la fonction scilab `ode` : `z=ode(“rk”,`x_0`,0,t,f)`). On trace la trajectoire dans le plan (x, y) ainsi que les énergies cinétique $(E_c = \frac{1}{2}|\eta|^2)$, potentielle $(E_p = -\frac{\alpha^2}{|q|})$ et totale $(E = E_c + E_p)$ en fonction du temps.

Afin de résoudre le système à cinq équations et cinq inconnues qui résulte de l'écriture du principe du minimum de Pontryaguin, on utilise la fonction scilab `fsolve :` t_f`=fsolve(`t_{f0}`,Xzero)` où t_{f0} est le point d'initialisation de l'algorithme qui recherche à annuler la fonction `Xzero`(t). Ici on doit choisir des solutions initiales $(u_0^0, s_0^0, t_f^0) \in \mathbb{R}^5$. Noter que la fonction à minimiser fera appel à *ode* pour intégrer la dynamique ainsi que la dynamique adjointe à chaque itération.

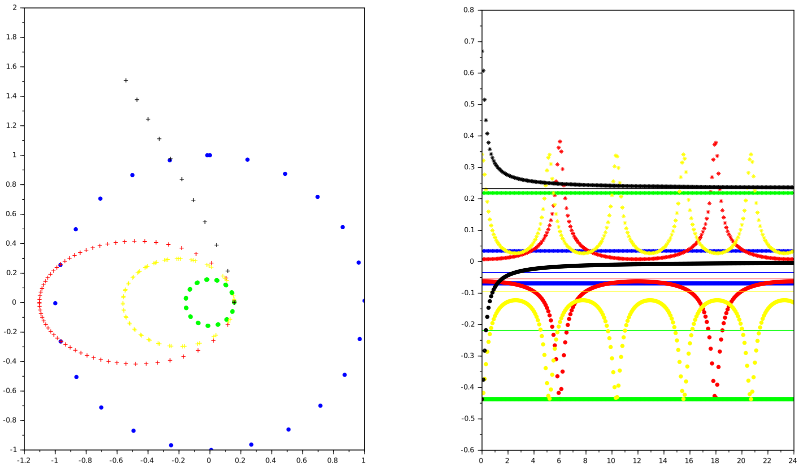

FIGURE 4 – Quelques orbites et les énergies associées.

On peut considèrer d'autres orbites parmi celles données dans le tableau suivant :

Orbite	Position initiale	Vitesse initiale
Géostationnaire	$q(0) = (0, 1)$	$\eta(0) = (-\alpha, 0)$
Circulaire basse	$q(0) = \left(\frac{p_0}{1.75p_f}, 0\right)$	$\eta(0) = \left(0, \alpha\sqrt{\frac{1.75p_f}{p_0}}\right)$
Elliptique d'exentricité faible	$q(0) = \left(\frac{p_0}{1.75p_f}, 0\right)$	$\eta(0) = \left(0, 1.25\alpha\sqrt{\frac{1.75p_f}{p_0}}\right)$
Elliptique d'exentricité 0.75	$q(0) = \left(-\frac{p_0}{0.25p_f}, 0\right)$	$\eta(0) = \left(0, -0.25\alpha\sqrt{\frac{p_f}{p_0}}\right)$
Orbite d'exentricité forte	$q(0) = \left(\frac{p_0}{1.75p_f}, 0\right)$	$\eta(0) = \left(0, 1.75\alpha\sqrt{\frac{1.75p_f}{p_0}}\right)$
Elliptique idéale	$q(0) = \left(\frac{p_0}{1.75p_f}, 0\right)$	$\eta(0) = \left(0, \alpha\sqrt{\frac{1.75p_f}{p_0}}\sqrt{\frac{2}{\frac{p_0}{1.75p_f}+1}}\right)$