MAP434
Contrôle de modèles dynamiques

Alexandre Ern

ENPC - INRIA - X

amphi du mardi 05 mars 2019

Contrôlabilité des systèmes linéaires

- Introduction au cours
- Formule de Duhamel
- Matrice de Kalman
- Poly, sections 1.1 et 1.3

Commentaires généraux

- La page web du cours est

  http://cermics.enpc.fr/~ern/MAP434

  S'y référer pour le déroulement des séances, le contenu des amphis, les planches d'exercices en PC et les annales d'examens

- La notation est basée sur l'examen final plus un bonus (entre 0 et 1 point) attribué par les enseignants de PC

- Lectures complémentaires
  - E. Trélat, *Contrôle optimal* (Vuibert, Paris, 2008)
  - P.-L. Lions, *Contrôle de modèles dynamiques* (Ecole Polytechnique, 2015)

Deux exemples

- **Contrôle d'un aspirateur-robot**
  - l'état du système est décrit par la position $(x(t), y(t))$ de l'aspirateur dans le plan et l'angle $\theta(t)$ de ses roues p.r. à une orientation de référence
  - on contrôle la vitesse de changement de l'angle des roues
  - la dynamique est régie par (système de Dubbins)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \cos(\theta(t)) \\ \dot{y}(t) = \sin(\theta(t)) \\ \dot{\theta}(t) = u(t) & \leftarrow \text{action sur le système} \end{cases}$$

- **Contrôle d'insectes nuisibles par des prédateurs**
  - état du système décrit par la population de proies $x(t)$ et de prédateurs $y(t)$
  - le contrôle s'exerce en rajoutant des prédateurs en quantité $u(t)$
  - la dynamique est régie par l'équation de Lotke–Volterra plus le contrôle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)(a - by(t)) \\ \dot{y}(t) = y(t)(cx(t) - d) + u(t) & \leftarrow \text{action sur le système} \end{cases}$$

(séparément, la population de proies croit à taux a, celle des prédateurs à jeun dépérit à taux d; au contact l'une de l'autre, la population de proies subit des pertes et celle des prédateurs se requinque (fréquence des rencontres $\sim x(t)y(t)$))

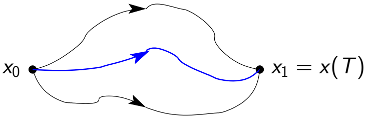
Cadre général

- Un **système de contrôle** est de la forme

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad \forall t \in [0, T]$$

  - **l'état** est décrit par le vecteur $x(t) \in \mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$
  - on agit sur le système par le biais d'un **contrôle** $u(t) \in \mathbb{R}^k$ $(k \geq 1)$
  - on pourra imposer des **contraintes** sur le contrôle : $u(t) \in U$ compact de $\mathbb{R}^k$
  - on prescrit en général la condition initiale $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$

- Deux questions naturelles
  - **Contrôlabilité.** Étant donné un état cible $x_1 \in \mathbb{R}^d$, existe-t-il un contrôle u amenant le système en x_1 en temps T à partir de x_0?
  - **Contrôle optimal.** Si la réponse est positive, existe-t-il un tel contrôle qui de plus minimise un certain critère $J(u)$?



Systèmes de contrôle linéaires

- On considère un contrôle $u \in L^1([0,T];\mathbb{R}^k)$
- On considère le système de contrôle linéaire dans $\mathbb{R}^d$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ \forall t \in [0,T], \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$$

avec des matrices $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $B \in \mathbb{R}^{d\times k}$

  - on dit que le système est **autonome** car les matrices A et B ne dépendent pas du temps

- Par la suite, on explicitera le fait que la trajectoire x dépend du contrôle u en la notant x_u

$$\dot{x}_u(t) = Ax_u(t) + Bu(t),\ \forall t \in [0,T], \qquad x_u(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$$

- Attention, le contrôle u n'est pas forcément continu (penser aux commutations), donc la trajectoire x_u n'est pas forcément de classe C^1

Fonctions absolument continues

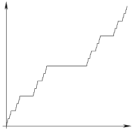
- On dit qu'une fonction $F : [0, T] \to \mathbb{R}^d$ est absolument continue et on écrit $F \in AC([0, T]; \mathbb{R}^d)$ s'il existe $f \in L^1([0, T]; \mathbb{R}^d)$ telle que

$$F(t) - F(0) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s, \quad \forall t \in [0, T]$$

- Si F est absolument continue sur $[0, T]$, alors
  - F est continue sur $[0, T]$
  - F est dérivable presque partout sur $[0, T]$, de dérivée égale à f

- Attention, si F est continue et **presque partout** dérivable, elle peut ne pas être égale à l'intégrale de sa dérivée (même si celle-ci est L^1)

l'escalier de Cantor



Formule de Duhamel

- Rappel du système de contrôle linéaire

$$\dot{x}_u(t) = Ax_u(t) + Bu(t),\ \forall t \in [0,T], \qquad x_u(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$$

- **Formule de Duhamel** (ou de variation de la constante)

$$x_u(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)\,\mathrm{d}s, \quad \forall t \in [0,T]$$

(Rappels : $e^A = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}A^n$, $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$, et si A_1, A_2 commutent ($A_1A_2 - A_2A_1 = 0$), alors $e^{A_1}e^{A_2} = e^{A_2}e^{A_1} = e^{A_1+A_2}$)

- La trajectoire x_u est dans $AC([0,T];\mathbb{R}^d)$; on a donc

$$\dot{x}_u(t) = Ax_u(t) + Bu(t) \qquad \text{p.p. dans } [0,T]$$

$$x_u(t) = x_0 + \int_0^t \big(Ax_u(s) + Bu(s)\big)\,\mathrm{d}s \quad \forall t \in [0,T]$$

Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes

- On considère le système de contrôle linéaire **autonome**

$$\dot{x}_u(t) = Ax_u(t) + Bu(t),\ \forall t \in [0,T], \qquad x_u(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$$

- On s'intéresse à la propriété suivante, dite de **contrôlabilité en temps T à partir de x_0** :

$$\forall x_1 \in \mathbb{R}^d, \quad \exists u \in L^\infty([0,T];\mathbb{R}^k), \quad x_u(T) = x_1$$

(on pourrait aussi chercher $u \in L^r([0,T];\mathbb{R}^k)$, $r \in \{1,2\}$)

- On cherche donc à atteindre la **cible** x_1 au temps T à partir de x_0
- En posant $x_2 = x_1 - e^{TA}x_0$, la contrôlabilité en T à partir de x_0 équivaut à

$$\forall x_2 \in \mathbb{R}^d, \quad \exists u \in L^\infty([0,T];\mathbb{R}^k), \quad x_2 = \int_0^T e^{(T-s)A}Bu(s)\,\mathrm{d}s$$

i.e., à la **surjectivité** de l'application

$$\Phi : L^\infty([0,T];\mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}^d, \quad \Phi(u) = \int_0^T e^{(T-s)A}Bu(s)\,\mathrm{d}s$$

Condition de Kalman

- On introduit la matrice de Kalman $C \in \mathbb{R}^{d\times dk}$ telle que

$$C = \big(B, AB, \cdots, A^{d-1}B\big)$$

- **(Kalman)** Le système linéaire autonome $\dot{x}_u(t) = Ax_u(t) + Bu(t)$ est contrôlable pour tout $T > 0$ et pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$ **ssi**

$$\mathrm{rang}(C) = d$$

  (ce qui signifie que la matrice C est de rang maximal)

- Il s'agit d'une condition purement algébrique sur les matrices A et B, indépendante de T et de x_0
  - noter qu'on n'impose pas de contrainte sur le contrôle
- On vérifie facilement que la condition de Kalman est **invariante par changement de base**

Preuve (1)

- Supposons que $\text{rang}(C) < d$
- Il existe donc $\Psi \in \mathbb{R}^d$, $\Psi \neq 0$, t.q.

$$\Psi^\dagger B = \Psi^\dagger AB = \cdots = \Psi^\dagger A^{d-1} B = 0 \,(\in \mathbb{R}^k)$$

  où $\Psi^\dagger$ désigne le transposé de Ψ ($\Psi^\dagger$ est un vecteur ligne)

- D'après le théorème d'Hamilton–Cayley, il existe des réels $s_0, \cdots, s_{d-1}$ t.q.

$$A^d = s_0 I + \cdots + s_{d-1} A^{d-1}$$

- On en déduit par récurrence que $\Psi^\dagger A^k B = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis que $\Psi^\dagger e^{tA} B = 0$ pour tout $t \in [0, T]$
- Par conséquent, $\Psi^\dagger \Phi(u) = 0$ pour tout contrôle u, i.e., l'application Φ ne peut être surjective

Preuve (2)

- Réciproquement, si l'application Φ n'est pas surjective, il existe $\Psi \in \mathbb{R}^d$, $\Psi \neq 0$, t.q.

$$\Psi^\dagger \int_0^T e^{(T-s)A} Bu(s)\,\mathrm{d}s = 0, \quad \forall u \in L^\infty([0,T];\mathbb{R}^k)$$

- Ceci implique que (choisir le contrôle $u(s) = B^\dagger e^{(T-s)A^\dagger}\Psi \in L^\infty([0,T];\mathbb{R}^k)$)

$$\Psi^\dagger e^{tA} B = 0\,(\in \mathbb{R}^k) \quad \forall t \in [0,T]$$

En $t = 0$, il vient $\Psi^\dagger B = 0$, puis en dérivant par rapport à t, il vient $\Psi^\dagger AB = 0$ et ainsi de suite; d'où

$$\Psi^\dagger B = \Psi^\dagger AB = \cdots = \Psi^\dagger A^{d-1} B = 0\,(\in \mathbb{R}^k)$$

La matrice C ne peut donc être de rang maximal

Exemple 1 : contrôle d'un tram

- L'état est la position $x(t)$ du tram le long d'un axe unidirectionnel et on contrôle l'accélération $u(t)$ (masse unité)

$$\ddot{x}(t) = u(t), \quad \forall t \in [0, T]$$

- Cela se récrit comme un système d'ordre un en temps ($d = 2$, $k = 1$)

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

- La matrice de Kalman $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ est

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{rang}(C) = 2$$

Le tram est contrôlable en tout temps T à partir de tout $X_0 = (x_0, v_0)$ (position et vitesse initiales) : quel que soit $X_1 = (x_1, v_1)$ (position et vitesse cibles en T), il existe $u \in L^\infty([0, T]; \mathbb{R})$ amenant le tram de X_0 en X_1 au temps T

Exemple 2 : circuit RLC

- Application en électronique : x (l'état) représente la charge du circuit et u (le contrôle) la tension appliquée

$$u(t) = L\ddot{x}(t) + R\dot{x}(t) + C^{-1}x(t)$$

ou encore $\ddot{x}(t) = -\frac{R}{L}\dot{x}(t) - \frac{1}{LC}x(t) + \frac{1}{L}u(t)$

- Système linéaire de contrôle ($d = 2$, $k = 1$)

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{LC} & \frac{-R}{L} \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u(t), \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

- La matrice de Kalman $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ est

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} & \frac{-R}{L^2} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{rang}(C) = 2$$

Le circuit électrique est contrôlable

Reformulation du critère de Kalman

- On introduit la matrice $G_T \in \mathbb{R}^{d\times d}$ t.q.

$$G_T = \int_0^T e^{(T-s)A} BB^\dagger e^{(T-s)A^\dagger}\,\mathrm{d}s$$

- G_T est symétrique positive (car $y^\dagger G_T y = \int_0^T |B^\dagger e^{(T-s)A^\dagger} y|^2_{\mathbb{R}^k}\,\mathrm{d}s \geq 0$, $\forall y \in \mathbb{R}^d$)
- **Lemme.** Le système linéaire autonome est contrôlable (en temps T à partir de x_0) **ssi** G_T est inversible
- Trois remarques
  - d'après le critère de Kalman ($\text{rang}(C) = d$), l'inversibilité de G_T est donc indépendante de T
  - le critère de Kalman est plus simple à vérifier que l'inversibilité de G_T
  - si $k < d$, la matrice $BB^\dagger$ n'est jamais inversible ...

Preuve

- Rappel : $G_T = \int_0^T e^{(T-s)A} BB^\dagger e^{(T-s)A^\dagger}\,\mathrm{d}s$
- Supposons G_T inversible et posons

$$\overline{u}(s) = B^\dagger e^{(T-s)A^\dagger} y, \qquad y = G_T^{-1}(x_1 - e^{TA}x_0)$$

Par la formule de Duhamel, on voit que

$$x_u(T) = e^{TA}x_0 + \int_0^T e^{(T-s)A} B\overline{u}(s)\,\mathrm{d}s = e^{TA}x_0 + G_T y = x_1$$

$\Longrightarrow$ **le système est contrôlable**

- Supposons qu'il existe $\Psi \in \mathbb{R}^d$, $\Psi \neq 0$, dans $\ker(G_T)$. Il vient

$$0 = \Psi^\dagger G_T \Psi = \int_0^T |B^\dagger e^{(T-s)A^\dagger}\Psi|_{\mathbb{R}^k}^2\,\mathrm{d}s$$

si bien que $\Psi^\dagger e^{(T-s)A}B = 0$ pour tout $s \in [0, T]$; par la formule de Duhamel, $\Psi^\dagger(x_u(T) - e^{TA}x_0) = 0$, ce qui montre que $x_u(T)$ est dans un hyperplan affine $\Longrightarrow$ **le système n'est pas contrôlable**

Systèmes linéaires instationnaires

- Un système de contrôle linéaire instationnaire (ou non-autonome) est de la forme
$$\dot{x}_u(t) = A(t)x_u(t) + B(t)u(t), \quad x_u(0) = x_0$$
- Pour les systèmes différentiels instationnaires
$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad x(0) = x_0$$
on utilise la notion de **résolvante** : $R : [0,T] \to \mathbb{R}^{d\times d}$ t.q.
$$\dot{R}(t) = A(t)R(t), \quad R(0) = I$$
  - si $A \in C^0([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$, $R \in C^1([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$
  - si $A \in L^1([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$, $R \in AC([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$
  - comme $\frac{d}{dt}\det(R(t)) = \mathrm{tr}(A(t))\det(R(t))$, $\det(R(0)) = 1$, $R(t)$ est inversible à tout temps ($\det(R(t))$ s'appelle le Wronskien au temps t)
  - dans le cas autonome, $A(t) = A$, on a $R(t) = e^{tA}$
- La solution du système différentiel instationnaire s'écrit
$$x_u(t) = R(t)x_0 + R(t)\int_0^t R(s)^{-1}b(s)\,\mathrm{d}s$$

Généralisation du critère de Kalman

- La solution du système de contrôle instationnaire est donnée par

$$x_u(t) = R(t)x_0 + R(t)\int_0^t R(s)^{-1}B(s)u(s)\,\mathrm{d}s$$

- **Lemme.** Le système instationnaire est contrôlable en temps T à partir de x_0 **ssi** la matrice de contrôlabilité

$$K_T := \int_0^T R(s)^{-1}B(s)B(s)^\dagger(R(s)^{-1})^\dagger\,\mathrm{d}s \in \mathbb{R}^{d\times d}$$

  est **inversible**
  - preuve identique au cas autonome
  - la condition dépend de T, mais pas de x_0 (contrôlabilité en temps T à partir de $x_0 \Longrightarrow$ contrôlabilité en temps T à partir de tout point)
  - si $k < d$, la matrice $B(s)B(s)^\dagger \in \mathbb{R}^{d\times d}$ n'est jamais inversible à s fixé
  - dans le cas autonome, on retrouve le critère précédent car $R(s) = e^{sA}$ et $B(s) = B$, d'où

$$K_T = e^{-TA}\left(\int_0^T e^{(T-s)A}BB^\dagger e^{(T-s)A^\dagger}\,\mathrm{d}s\right)e^{-TA^\dagger}$$

Contre-exemple

- On considère le système de contrôle linéaire instationnaire

$$\dot{X}_u(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X_u(t) + \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} u(t)$$

- On vérifie facilement que $R(s) = e^{sA} = \begin{pmatrix} cos(s) & -\sin(s) \\ \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix}$, d'où

$$R(s)^{-1}B(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies K_T = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice K_T n'est pas inversible, donc **le système n'est pas contrôlable**
(le problème vient du fait que $R(s)^{-1}B(s)$ est indépendant de s)

- En revanche, si B est constant non-nul, **le système est contrôlable**
  - B et AB sont des vecteurs orthogonaux non-nuls
  - la matrice de Kalman $C = (B, AB)$ est donc de rang plein