MAP434 - Contrôle de modèles dynamiques

Contrôlabilité des systèmes non-linéaires

Alexandre Ern

ENPC - INRIA - X

amphi du mardi 12 mars 2019

Plan de la séance

- Théorème de Cauchy–Lipschitz
- Différentielle de Fréchet
- Contrôlabilité locale
- Poly, sections 2.1 et 2.3

Théorème de Cauchy–Lipschitz (CL)

- On cherche $x : [0, T] \to \mathbb{R}^d$ solution du **problème de Cauchy**

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \quad \forall t \in [0, T], \qquad x(0) = x_0$$

(données : temps d'observation $T > 0$, état initial $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $F : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$)

- Il s'agit d'un système différentiel avec condition initiale

- Pour les systèmes de contrôle, on a $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ avec $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ et $u \in L^1([0, T]; \mathbb{R}^k)$

- On récrit ceci $\dot{x}(t) = F(t, x(t))$ avec

$$F(t, x) := f(t, x, u(t)) : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

CL - cas continu et Lipschitz global

- On suppose F continue : $F \in C^0([0,T] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$
- On suppose F globalement lipschitzienne en x

  $$\exists C_0 \in \mathbb{R}_+, \quad \forall t \in [0,T],\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d, \quad |F(t,x_1) - F(t,x_2)|_{\mathbb{R}^d} \leq C_0 |x_1 - x_2|_{\mathbb{R}^d}$$

  où $|\cdot|_{\mathbb{R}^d}$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ (on note plus simplement $|\cdot|$ s'il n'y a pas d'ambiguïté)
- Alors, il existe une unique solution au pb. de Cauchy dans $C^1([0,T]; \mathbb{R}^d)$
- Cette solution vérifie

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \quad \forall t \in [0,T]$$

Principe de la preuve

- x est solution ssi $x(t) = x_0 + \int_0^t F(s, x(s))\,\mathrm{d}s$, $\forall t \in [0, T]$
- On cherche un point fixe de l'application $\Phi : Y \to Y$, $Y = C^0([0,T]; \mathbb{R}^d)$

$$\Phi(y)(t) = x_0 + \int_0^t F(s, y(s))\,\mathrm{d}s, \quad \forall t \in [0, T]$$

- On montre que Φ est strictement contractante
- On conclut par le théorème du point fixe de Picard (puisque Y est un espace métrique complet)

Preuve de la propriété de contraction

- On considère la norme $\|y\|_Y = \sup_{t\in[0,T]}(e^{-C_0 t}|y(t)|_{\mathbb{R}^d})$ qui est équivalente à la norme usuelle $\sup_{t\in[0,T]}|y(t)|_{\mathbb{R}^d}$ pour laquelle Y est complet
- Φ est bien strictement contractante car

$$
\begin{aligned}
\|\Phi(y_1)-\Phi(y_2)\|_Y &= \sup_{t\in[0,T]}\left(e^{-C_0 t}|\Phi(y_1)(t)-\Phi(y_2)(t)|_{\mathbb{R}^d}\right)\\
&\le \sup_{t\in[0,T]}\left(e^{-C_0 t}\int_0^t |F(s,y_1(s))-F(s,y_2(s))|_{\mathbb{R}^d}\,\mathrm{d}s\right)\\
&\le \sup_{t\in[0,T]}\left(e^{-C_0 t}C_0\int_0^t |y_1(s)-y_2(s)|_{\mathbb{R}^d}\,\mathrm{d}s\right)\\
&= \sup_{t\in[0,T]}\left(e^{-C_0 t}C_0\int_0^t e^{C_0 s}e^{-C_0 s}|y_1(s)-y_2(s)|_{\mathbb{R}^d}\,\mathrm{d}s\right)\\
&\le \left(\sup_{t\in[0,T]} e^{-C_0 t}C_0\int_0^t e^{C_0 s}\,\mathrm{d}s\right)\|y_1-y_2\|_Y\\
&= \left(\sup_{t\in[0,T]} 1-e^{-C_0 t}\right)\|y_1-y_2\|_Y = \left(1-e^{-C_0 T}\right)\|y_1-y_2\|_Y
\end{aligned}
$$

CL - cas mesurable et Lipschitz global

- Pour les systèmes de contrôle, on a $F(t,x) = f(t,x,u(t))$, $u \in L^1([0,T];\mathbb{R}^k)$
  - F n'est pas forcément continue en temps
  - exemple : commutation (u change brusquement d'une valeur à une autre)

- **(Thm. 2.2)** On suppose que
  - F est mesurable en t et continue en x (F est de Carathéodory)
  - F est intégrable en t, i.e., $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $F(\cdot,x) \in L^1([0,T];\mathbb{R}^d)$
  - F est globalement lipschitzienne en x

$$\begin{aligned}
&\exists C_0(t) \in L^1([0,T];\mathbb{R}_+) \\
&\text{p.p. } t \in [0,T],\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d, \quad |F(t,x_1) - F(t,x_2)| \leq C_0(t)|x_1 - x_2|
\end{aligned}$$

Alors il existe une unique solution au pb. de Cauchy $x \in AC([0,T];\mathbb{R}^d)$ t.q.

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0 + \int_0^t F(s,x(s))\,\mathrm{d}s, && \forall t \in [0,T] \\
\dot{x}(t) &= F(t,x(t)), && \text{p.p. } t \in [0,T]
\end{aligned}$$

- Exemple : $F(t,x) = A(t)x + r(t)$, $A \in L^1([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$, $r \in L^1([0,T];\mathbb{R}^d)$

Dynamique non-linéaire

- L'hypothèse "F globalement lipschitzienne en x" est rarement vérifiée ...
- Explosion en temps fini : exemple avec $F(t,x) = 1 - x^2$

$$\dot{x}(t) = 1 - x(t)^2, \quad \forall t \geq 0, \qquad x(0) = x_0$$

  - si $|x_0| \leq 1$, $x(t) = \tanh(t + t_0)$ avec $\tanh(t_0) = x_0$ et $\lim_{t\to\infty} x(t) = 1$ **(existence globale en temps)**
  - si $|x_0| > 1$, $x(t) = \coth(t + t_0)$ avec $\coth(t_0) = x_0$
    - si $x_0 > 1$, $t_0 > 0$ et $\lim_{t\to\infty} x(t) = 1$ **(existence globale en temps)**
    - si $x_0 < -1$, $t_0 < 0$ et $\lim_{t\uparrow t_0} |x(t)| = +\infty$ **(explosion en temps fini)**
- Si F est seulement continue, on peut perdre l'unicité
  - exemple avec $F(t,x) = \sqrt{|x|}$: $\dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|}$, $x(0) = 0$
  - $x(t) \equiv 0$ est solution
  - il en est de même de $x(t) = \frac{1}{4}t^2$ (et de $x(t) = \frac{1}{4}\max(t - t_0, 0)^2$, $\forall t_0 > 0$)

CL - cas mesurable et Lipschitz local

- **(Thm. 2.6)** On suppose que
  - F est mesurable en t et continue en x (F est de Carathéodory)
  - F est intégrable en t, i.e., $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $F(\cdot, x) \in L^1([0,T]; \mathbb{R}^d)$
  - F est localement lipschitzienne en x

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \exists r > 0, \quad \exists C_0(t) \in L^1([0,T]; \mathbb{R}_+)$$
$$\text{p.p. } t \in [0,T], \ \forall x_1, x_2 \in B(x,r), \quad |F(t,x_1) - F(t,x_2)| \le C_0(t)|x_1 - x_2|$$

  Alors il existe une unique solution **maximale** au pb. de Cauchy définie sur l'intervalle $J \subseteq [0,T]$ avec
  - soit $J = [0,T]$ soit $J = [0, T_*[$ et $\lim_{t \uparrow T_*} |x(t)| = \infty$
  - $x \in AC(J; \mathbb{R}^d)$, $x(t) = x_0 + \int_0^t F(s, x(s))\,\mathrm{d}s, \forall t \in J$, et $\dot{x}(t) = F(t, x(t))$, p.p. $t \in J$

- Exemple : explosion pour un système de contrôle
  - $f(t,x,u) = x^2 + u$, problème de Cauchy $\dot{x}(t) = x(t)^2 + u(t), x(0) = 0$
  - pour $u \equiv u_0$ constant, on a $x(t) = \sqrt{u_0}\tan(\sqrt{u_0}\,t)$
  - explosion au temps fini $T_* = \frac{\pi}{2\sqrt{u_0}}$ qui dépend de u_0

Contrôlabilité locale (1)

- On considère le système de contrôle non-linéaire

$$\dot{x}_u(t) = f(t, x_u(t), u(t)),\ \forall t \in [0, T], \qquad x_u(0) = x_0$$

- L'**application entrée-sortie** en temps T à partir de x_0 est l'application

$$E_{T,x_0} : \mathcal{U}_{T,x_0} \to \mathcal{A}(T, x_0), \quad E_{T,x_0}(u) = x_u(T)$$

  - $\mathcal{U}_{T,x_0} \subset L^\infty([0,T]; U)$ est le **domaine** de E_{T,x_0}; c'est l'ensemble des contrôles tels que la trajectoire issue de x_0 est bien définie sur $[0, T]$
  - U est un sous-ensemble fermé non-vide de $\mathbb{R}^k$
  - l'ensemble atteignable $\mathcal{A}(T, x_0)$ est l'**image** de E_{T,x_0}

- Cas linéaire autonome $f(t, x, u) = Ax + Bu,\ U = \mathbb{R}^k$
  - $\mathcal{A}(T, x_0) = \mathbb{R}^d$ **ssi** les matrices A et B vérifient la condition de Kalman

Contrôlabilité locale (2)

- La question de la **contrôlabilité locale** est la suivante :
  - soit $y \in \mathcal{A}(T, x_0)$; par définition, $\exists u_y \in \mathcal{U}_{T,x_0}$ amenant x_0 en y en temps T
  - existe-t-il un voisinage V_y de y dans $\mathbb{R}^d$ t.q. $V_y \subset \mathcal{A}(T, x_0)$, i.e., pour tout $y' \in V_y$, $\exists u_{y'} \in \mathcal{U}_{T,x_0}$ amenant x_0 en y' en temps T?
- On va répondre à cette question en considérant la **différentielle** de E_{T,x_0}

Différentielle de Fréchet

- Soit V un espace de Banach de norme $\|\cdot\|_V$, $J : V \to \mathbb{R}$ une application
- L'espace dual V' est composé des formes linéaires **continues** sur V : $\forall \phi \in V'$, $\phi : V \to \mathbb{R}$ et on a

$$\exists C > 0, \quad |\langle \phi, v\rangle| \leq C \|v\|_V, \quad \forall v \in V$$

- On dit que J est **différentiable (au sens de Fréchet)** en $v \in V$ ssi il existe $J'(v) \in V'$ t.q.

$$J(v + \delta v) = J(v) + \langle J'(v), \delta v\rangle + o(\delta v), \qquad \forall \delta v \in V$$

  - la différentielle $J'(v) : V \to \mathbb{R}$ est une **forme linéaire continue** sur V
  - la notation $o(\delta v)$ signifie que $\lim_{\delta v \to 0} \frac{o(\delta v)}{\|\delta v\|_V} = 0$

- Soit V, W des espaces de Banach et $J : V \to W$ une application. On dit que J est **différentiable (au sens de Fréchet)** en $v \in V$ ssi il existe une application linéaire continue $J'(v) : V \to W$ t.q.

$$J(v + \delta v) = J(v) + J'(v)(\delta v) + o(\delta v)\ (\in W), \qquad \forall \delta v \in V$$

Exemples

- En dimension finie ou dans un espace de Hilbert, on peut utiliser le théorème de Riesz pour **identifier** la forme linéaire continue $J'(v) \in V'$ avec son représentant $\nabla J(v) \in V$
  - En notant $(\cdot,\cdot)_V$ le produit scalaire dans V, on a

$$J(v+\delta v) = J(v) + (\nabla J(v), \delta v)_V + o(\delta v), \qquad \forall \delta v \in V$$

  - Cas de la dimension finie : $V = \mathbb{R}^d$, $J(v_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}$

$$J'(v) = \left(\tfrac{\partial J}{\partial v_1}, \dots, \tfrac{\partial J}{\partial v_d}\right), \qquad \nabla J(v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial J}{\partial v_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial J}{\partial v_d} \end{pmatrix}$$

- Exemple : $V = L^2(\Omega)$, $J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega v(x)^2 \,\mathrm{d}x$
  - $J(v+\delta v) = \frac{1}{2}\int_\Omega v(x)^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega v(x)\delta v(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega \delta v(x)^2$
  - on a donc $J(v+\delta v) = J(v) + \int_\Omega v(x)\delta v(x)\,\mathrm{d}x + o(\delta v)$
  - d'où $\langle J'(v), \delta v\rangle = \int_\Omega v(x)\delta v(x)\,\mathrm{d}x$, $\nabla J(v) = v$

Différentielle de l'application entrée-sortie (1)

- On se place dans le cas **sans contrainte**, i.e., $U = \mathbb{R}^k$: on se restreint à des contrôles dans $L^\infty([0,T];\mathbb{R}^k)$
  - on rappelle que $\mathcal{U}_{T,x_0} \subset L^\infty([0,T];\mathbb{R}^k)$ est le domaine de l'application E_{T,x_0}
  - on montre que $\mathcal{U}_{T,x_0}$ est un ouvert de $L^\infty([0,T];\mathbb{R}^k)$ (dépendance continue de la solution d'un système différentiel en des paramètres)
  - dans le cas avec contraintes, il faut se placer dans l'intérieur de $\mathcal{U}_{T,x_0}$
- Soit $u \in \mathcal{U}_{T,x_0}$ et $x_u \in AC([0,T];\mathbb{R}^d)$ la trajectoire associée
- Soit $\delta u \in L^\infty([0,T];\mathbb{R}^k)$ t.q. $u + \delta u \in \mathcal{U}_{T,x_0}$
- On considère le système linéarisé le long de la trajectoire $(x_u(t), u(t))$

$$\dot{\delta x}(t) = A_u(t)\delta x(t) + B_u(t)\delta u(t), \quad \forall t \in [0,T], \qquad \delta x(0) = 0$$

où $A_u(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_u(t), u(t)) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ et $B_u(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(t, x_u(t), u(t)) \in \mathbb{R}^{d\times k}$

Différentielle de l'application entrée-sortie (2)

- On se place dans l'espace de Banach $V = L^\infty([0,T];\mathbb{R}^k)$, $W = \mathbb{R}^d$

- **(Lemme 2.15)** L'application entrée-sortie E_{T,x_0} est différentiable (au sens de Fréchet) en tout $u \in \mathcal{U}_{T,x_0}$ et on a, pour tout $\delta u \in L^\infty([0,T];\mathbb{R}^k)$,

$$\langle E'_{T,x_0}(u), \delta u \rangle = \delta x(T)$$

  $E'_{T,x_0}(u)$ est **l'application entrée-sortie pour le système linéarisé** le long de la trajectoire $(x_u(t), u(t))$

- On obtient bien une forme linéaire continue en δu car on a

$$\langle E'_{T,x_0}(u), \delta u \rangle = R(T) \int_0^T R(s)^{-1} B_u(s) \delta u(s) \, \mathrm{d}s \le C \|\delta u\|_{L^\infty([0,T];\mathbb{R}^k)}$$

  où $R(t)$ est la résolvante du système linéarisé, i.e., la solution matricielle dans $\mathbb{R}^{d\times d}$ de $\dot{R}(t) = A_u(t)R(t)$, $\forall t \in [0,T]$, $R(0) = I$

Esquisse de preuve

- Soit $\delta u \in V = L^\infty([0,T];\mathbb{R}^k)$ t.q. $u + \delta u \in \mathcal{U}_{T,x_0}$
- On note $x_{u+\delta u}$ la trajectoire associée à $u + \delta u$ issue de x_0
  - en effectuant des développements de Taylor sur f, il vient

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_{u+\delta u}(t) - \dot{x}_u(t) &= f(t, x_{u+\delta u}(t), u(t) + \delta u(t)) - f(t, x_u(t), u(t)) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_u(t), u(t))(x_{u+\delta u}(t) - x_u(t)) + \frac{\partial f}{\partial u}(t, x_u(t), u(t))\delta u(t) + o(\delta u) \\
&= A_u(t)(x_{u+\delta u}(t) - x_u(t)) + B_u(t)\delta u(t) + o(\delta u)
\end{aligned}
$$

  car $x_{u+\delta u} - x_u = O(\delta u)$ (dépendance continue en un paramètre)
  - en posant $\epsilon(t) = x_{u+\delta u}(t) - x_u(t) - \delta x(t)$, on en déduit que $\epsilon(0) = 0$ et

$$\dot{\epsilon}(t) = A_u(t)\epsilon(t) + o(\delta u)$$

  et par des arguments de stabilité, on montre que $\epsilon = o(\delta u)$

- En conclusion, on obtient

$$
\begin{aligned}
E_{T,x_0}(u + \delta u) - E_{T,x_0}(u) &= x_{u+\delta u}(T) - x_u(T) \\
&= \delta x(T) + \epsilon(T) = \delta x(T) + o(\delta u)
\end{aligned}
$$

Application

- **(Thm. 2.17)** Si le système linéarisé le long de la trajectoire $(x_u(t), u(t))$ est contrôlable (en temps T), alors le système non-linéaire est localement contrôlable (en temps T à partir de x_0)
  - si le système linéarisé est contrôlable, E'_{T,x_0} est surjective
  - on conclut par le théorème de la submersion (variante des fonctions implicites)
  - soit V, W des espaces de Banach, $F : V \to W$ continûment différentiable, soit $v \in V$. Si $F'(v) : V \to W$ est **surjective**, alors F est **localement surjective** au voisinage de $F(v)$

- Cas particulier : **point d'équilibre d'un système autonome** $f(x_0, u_0) = 0$
  - si les matrices $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0)$ et $B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0)$ vérifient la condition de Kalman, le système non-linéaire est localement contrôlable en (x_0, u_0)
  - comme $f(x_0, u_0) = 0$, la trajectoire de référence est réduite à un point, si bien que le système linéarisé est également autonome $\Longrightarrow$ on peut appliquer la condition de Kalman
  - pour un système de contrôle affine de la forme $f(t, x, u) = ug(t, x)$, on montre, par **inversion du temps**, il existe un voisinage de x_0 d'où on peut mener tout point à la position d'équilibre x_0 en temps T

Illustration : pendule inversé

- Pendule inversé (masse vers le haut, tige vers le bas) dans un plan
  - extrémité supérieure repérée par l'angle θ avec la verticale dans le sens horaire
  - on contrôle l'accélération horizontale du point inférieur de la tige
  - $\ddot{\theta}(t) = \sin(\theta(t)) - u(t)\cos(\theta(t))$ (longueur $l = 1$, masse $m = 1$)

- En posant $x = (x_1, x_2) = (\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^2$, on se ramène à un système d'ordre un

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \qquad f(x, u) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \sin(x_1) - u\cos(x_1) \end{pmatrix}$$

On calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x, u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos(x_1) + u\sin(x_1) & 0 \end{pmatrix}$, $\frac{\partial f}{\partial u}(x, u) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(x_1) \end{pmatrix}$

- On considère le point d'équilibre instable $(x_0, u_0) = ((0, 0), 0)$
  - le système linéarisé autour de ce point est $\dot{\delta x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t)$ avec

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  - la condition de Kalman est bien satisfaite car $C = (B, AB) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
  - $\Longrightarrow$ le pendule inversé est **localement contrôlable** autour de (x_0, u_0)