MAP434 - Contrôle de modèles dynamiques

Optimisation dans les espaces de Hilbert

Alexandre Ern

ENPC - INRIA - X

amphi du mardi 19 mars 2019

Plan de la séance

- Introduction : contrôle optimal pour atteindre une cible
- Optimisation dans les espaces de Hilbert
- Exemple : système linéaire-quadratique (LQ)
- Poly, sections 3.1, 3.2 et 4.1

Contrôle optimal sous critère quadratique

- Soit le système de contrôle linéaire autonome ($A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $B \in \mathbb{R}^{d\times k}$)

$$\dot{x}_u(t) = Ax_u(t) + Bu(t),\ \forall t \geq 0 \qquad x_u(0) = x_0$$

  On souhaite atteindre la cible $x_1 \in \mathbb{R}^d$ au temps T

- On suppose la condition de Kalman $\mathrm{rang}(C) = d$ satisfaite; il existe donc au moins un contrôle permettant d'atteindre la cible

- En général, il existe plusieurs contrôles permettant d'atteindre la cible, et on souhaite en sélectionner un qui **optimise un critère**, p.ex. qui minimise le critère quadratique

$$J(u) = \int_0^T |u(t)|^2_{\mathbb{R}^k}\,\mathrm{d}t$$

- Vu la forme du critère, on considère des contrôles dans $V := L^2([0,T];\mathbb{R}^k)$
- On cherche donc un contrôle optimal $\overline{u} \in V$ amenant le système en x_1 en temps T en partant de x_0, i.e., tel que pour tout autre contrôle $v \in V$ ayant les mêmes propriétés, on a

$$J(v) \geq J(\overline{u})$$

Synthèse du contrôle optimal

- On rappelle que la condition de Kalman est équivalente à l'inversibilité de la matrice $G_T \in \mathbb{R}^{d\times d}$ t.q.

$$G_T = \int_0^T e^{(T-s)A} BB^\dagger e^{(T-s)A^\dagger}\,\mathrm{d}s$$

- On pose

$$\overline{u}(t) = B^\dagger e^{(T-t)A^\dagger} y, \quad \forall t \in [0,T], \qquad y = G_T^{-1}(x_1 - e^{TA}x_0)$$

- On a bien $\overline{u} \in V = L^2([0,T];\mathbb{R}^k)$
- Le contrôle $\overline{u}$ amène x_0 en x_1 en temps T car

$$x_{\overline{u}}(T) = e^{TA}x_0 + \int_0^T e^{(T-t)A} B\overline{u}(t)\,\mathrm{d}t = e^{TA}x_0 + G_T y = x_1$$

L^2-optimalité

- Soit $u \in L^2([0,T];\mathbb{R}^k)$ un autre contrôle amenant x_0 en x_1 en temps T
- $\delta = u - \overline{u}$ amène 0 en 0 en temps T, i.e., $\int_0^T e^{(T-t)A} B\delta(t)\,\mathrm{d}t = 0$
- En développant, il vient

$$
\begin{aligned}
J(u) = J(\overline{u}+\delta) &= \int_0^T |\overline{u}(t)+\delta(t)|^2_{\mathbb{R}^k}\,\mathrm{d}t \\
&= J(\overline{u}) + 2\int_0^T \delta(t)^\dagger \overline{u}(t)\,\mathrm{d}t + J(\delta) \\
&= J(\overline{u}) + 2\int_0^T \delta(t)^\dagger (B^\dagger e^{(T-t)A^\dagger} y)\,\mathrm{d}t + J(\delta) \\
&= J(\overline{u}) + 2\int_0^T (e^{(T-t)A} B\delta(t))^\dagger y\,\mathrm{d}t + J(\delta) \\
&= J(\overline{u}) + 2\left(\int_0^T e^{(T-t)A} B\delta(t)\,\mathrm{d}t\right)^\dagger y + J(\delta) = J(\overline{u}) + J(\delta) \geq J(\overline{u})
\end{aligned}
$$

Formalisation

- On introduit **l'espace de Hilbert** $V = L^2([0,T];\mathbb{R}^k)$
- On introduit le sous-ensemble $K \subset V$ tel que

$$K = \{u \in V \mid \int_0^T e^{(T-t)A} Bu(t)\,\mathrm{d}t = x_1 - e^{TA}x_0\}$$

- On introduit la **fonctionnelle** $J : V \to \mathbb{R}$ telle que

$$J(u) = \int_0^T |u(t)|^2_{\mathbb{R}^k}\,\mathrm{d}t \; (= \|u\|_V^2)$$

- On considère le problème de minimisation sous contraintes

$$\inf_{u \in K} J(u)$$

- On a vu que $\overline{u} \in K$ et $J(\overline{u}) = \inf_{u \in K} J(u)$

Optimisation dans les espaces de Hilbert

- On considère le problème d'optimisation abstrait

$$\inf_{v \in K} J(v)$$

  - K est un sous-ensemble **fermé non-vide** d'un **espace de Hilbert** V
  - $J : K \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle continue sur K

- Nous allons présenter trois types de résultats
  - existence/unicité du minimiseur pour des fonctionnelles convexes
  - condition nécessaire d'optimalité (cas différentiable)
  - condition suffisante d'optimalité (cas différentiable et convexe)

Fonctionnelles convexes

- On suppose que le sous-ensemble K est **convexe**
- On dit que l'application J est **convexe** sur K si

$$J(\theta u + (1-\theta)v) \leq \theta J(u) + (1-\theta)J(v), \quad \forall u, v \in K,\ \forall \theta \in [0,1]$$

et **strictement convexe** si l'inégalité est stricte pour $u \neq v$, $\theta \in]0,1[$

- On dit que J est **fortement convexe** ou **α-convexe** s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$J\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{J(u)+J(v)}{2} - \frac{\alpha}{8}\|u-v\|_V^2, \quad \forall u, v \in K$$

- **(Prop. 3.6)** Minoration des fonctionnelles fortement convexes : si J est fortement convexe et continue sur un sous-ensemble convexe K, il existe deux constantes $\gamma > 0$ et $\delta \in \mathbb{R}$ telles que

$$J(v) \geq \gamma\|v\|_V^2 + \delta, \quad \forall v \in K$$

Minimisation de fonctionnelles convexes

- **(Thm. 3.7)** On suppose que
  - K est **convexe** fermé non-vide
  - J est une fonctionnelle **convexe** et continue sur K
  - J est infinie à l'infini dans K : pour toute suite $(v^n) \in K^{\mathbb{N}}$ telle que $\|v^n\|_V \to +\infty$, on a $J(v^n) \to +\infty$

  Alors, il existe au moins un minimiseur de J sur K

- **(Thm. 3.8)** On suppose que
  - K est **convexe** fermé non-vide
  - J est une fonctionnelle **fortement convexe** et continue sur K

  Alors, il existe un unique minimiseur de J sur K

Fonctionnelles différentiables

- On suppose que $J : V \to \mathbb{R}$ est différentiable (au sens de Fréchet) sur V : pour tout $v \in V$, il existe un vecteur $\nabla J(v) \in V$ t.q.

$$J(v + \delta v) = J(v) + (\nabla J(v), \delta v)_V + o(\delta v), \qquad \forall \delta v \in V$$

  où $\lim_{\delta v \to 0} \frac{o(\delta v)}{\|\delta v\|_V} = 0$
  - on a utilisé ici l'identification entre V et son espace dual V' afin d'identifier la différentielle de J en v avec son représentant dans V

- Noter que si J est différentiable, elle est *a fortiori* continue

Caractérisation de la convexité

- **(Prop. 3.9)** Soit $J : V \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle différentiable et $\alpha > 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
  - J est **fortement convexe** de paramètre α
  - $J(v) \geq J(u) + (\nabla J(u), v - u)_V + \frac{1}{2}\alpha\|u - v\|_V^2$, $\forall u, v \in V$
  - $(\nabla J(u) - \nabla J(v), u - v)_V \geq \alpha\|u - v\|_V^2$, $\forall u, v \in V$
- Remarque : la troisième assertion est souvent un moyen commode de montrer la forte convexité
- De manière similaire, la **convexité** de J équivaut aux assertions ci-dessus avec $\alpha = 0$

Equation d'Euler - cas sans contraintes

- Soit $J : V \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle différentiable sur V
- Si $\overline{v}$ est minimiseur de J sur V, alors $\overline{v}$ vérifie la condition d'Euler (CN)

$$\nabla J(\overline{v}) = 0 \ (\in V)$$

  Si J est convexe, cette condition est également suffisante (CS)

- Preuve
  - **CN (indép. de la convexité)**: pour tout $\delta v \in V$, on a

$$0 \leq J(\overline{v} + \delta v) - J(\overline{v}) = (\nabla J(\overline{v}), \delta v)_V + o(\delta v)$$

    On divise par $\|\delta v\|_V$ puis $\delta v \to 0$; on déduit $(\nabla J(\overline{v}), \delta v)_V \geq 0$; comme δv est arbitraire dans V, on conclut que $\nabla J(\overline{v}) = 0$
  - **CS (utilise la convexité)** : la deuxième assertion de la Prop. 3.9 nous donne

$$\forall v \in V, \qquad J(v) \geq J(\overline{v}) + (\underbrace{\nabla J(\overline{v})}_{=0}, v - \overline{v})_V = J(\overline{v})$$

Inéquation d'Euler - cas avec contraintes

- Soit K un sous-ensemble convexe fermé non-vide et $J : K \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle différentiable
- Si $\overline{v}$ est minimseur de J sur V, alors $\overline{v}$ vérifie l'inéquation d'Euler (CN)

$$(\nabla J(\overline{v}), v - \overline{v})_V \geq 0, \quad \forall v \in K$$

  Si J est convexe, cette condition est également suffisante (CS)

- Preuve
  - **CN (utilise la convexité de K)**: pour tout $v \in K$ et tout $t \in]0, 1]$, $\overline{v} + t(v - \overline{v}) \in K$ car K est convexe, si bien que

$$0 \leq J(\overline{v} + t(v - \overline{v})) - J(\overline{v}) = t(\nabla J(\overline{v}), v - \overline{v})_V + o(t(v - \overline{v}))$$

    On divise par t puis $t \to 0^+$
  - **CS (utilise la convexité de J)** :

$$J(v) \geq J(\overline{v}) + (\nabla J(\overline{v}), v - \overline{v})_V \geq J(\overline{v}), \quad \forall v \in K$$

- Si $\bar{v}$ est situé **à l'intérieur de K**, l'inéquation d'Euler devient $\nabla J(\bar{v}) = 0$.

Application au contrôle optimal

- $V = L^2([0,T];\mathbb{R}^k)$ est un espace de Hilbert
- $J(v) = \|v\|_V^2$ est **fortement convexe** ($\alpha = 2$) par la formule de la médiane

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_V^2 = \frac{\|u\|_V^2 + \|v\|_V^2}{2} - \frac{1}{4}\|u-v\|_V^2$$

- $K = \{v \in V \mid \int_0^T e^{(T-t)A} Bv(t)\,\mathrm{d}t = x_1 - e^{TA}x_0\}$ est convexe, fermé, non-vide
  - non-vide : Kalman
  - convexe: linéarité de la dépendance au contrôle
  - fermé : si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ converge vers v dans V, on a

$$x_1 - e^{TA}x_0 = \int_0^T e^{(T-t)A} Bv_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^T e^{(T-t)A} Bv(t)\,\mathrm{d}t$$

  donc v amène x_0 en x_1 en temps T, i.e., $v \in K$

- Il existe un unique contrôle optimal $\overline{u}$ qui minimise J sur K
- En utilisant l'inéquation d'Euler, on montre que $\overline{u}(t) = B^\dagger e^{(T-t)A^\dagger} y$, $y = G_T^{-1}(x_1 - e^{TA}x_0)$

Exemple : le système LQ (1)

- On se donne
  - un intervalle de temps $[0, T]$, $T > 0$
  - une matrice $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ et une matrice $B \in \mathbb{R}^{d \times k}$
  - une condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^d$
- Le système de contrôle est

$$\dot{x}_u(t) = Ax_u(t) + Bu(t) \quad \forall t \in [0, T], \qquad x_u(0) = x_0$$

  Il s'agit d'un système **linéaire** (autonome)
- L'ensemble des contrôles admissibles est ici $L^2([0, T]; \mathbb{R}^k)$
  - pour chaque $u \in L^2([0, T]; \mathbb{R}^k)$, $\exists!$ trajectoire $x_u \in AC([0, T]; \mathbb{R}^d)$ (formule de Duhamel)

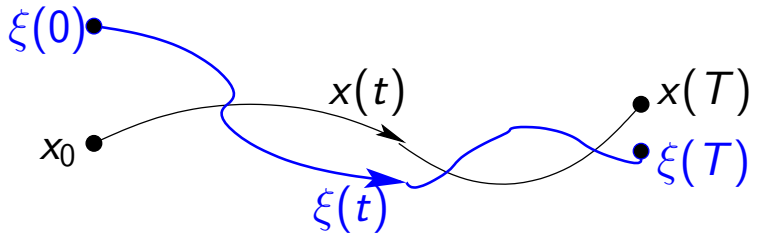
Le système LQ (2)

- On cherche le **contrôle optimal** qui minimise dans $L^2([0,T];\mathbb{R}^k)$ le critère

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u(t)^\dagger R u(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^T e_{x_u}(t)^\dagger Q e_{x_u}(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2} e_{x_u}(T)^\dagger D e_{x_u}(T)$$

  - $e_{x_u} = x_u - \xi$ où $\xi \in C^0([0,T];\mathbb{R}^d)$ est une **trajectoire cible**
  - $Q, D \in \mathbb{R}^{d\times d}$ sont des matrices symétriques **positives**
  - $R \in \mathbb{R}^{k\times k}$ est une matrice symétrique **définie positive**

- Le critère J résulte d'une **pondération** entre l'atteinte de la trajectoire cible et le fait que le contrôle ne soit pas "trop grand" dans L^2
  - on a besoin de la définie positivité de R pour que le problème de contrôle optimal soit bien posé
  - on peut prendre $Q = D = 0$; le contrôle optimal est alors trivial ($u \equiv 0$)
  - on ne s'impose pas ici d'atteindre de cible au temps final T



Formalisation du problème

- On a

$$\dot{x}_u(t) = Ax_u(t) + Bu(t) \quad \forall t \in [0,T], \qquad x_u(0) = x_0$$

$$J(u) = \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^T u(t)^\dagger R u(t)\,\mathrm{d}t}_{=J_R(u)} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^T e_{x_u}(t)^\dagger Q e_{x_u}(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2} e_{x_u}(T)^\dagger D e_{x_u}(T)}_{=J_{QD}(u)}$$

où $e_{x_u} = x_u - \xi$ et $\xi \in C^0([0,T];\mathbb{R}^d)$ est une trajectoire cible

- On se place dans l'espace de Hilbert $V = L^2([0,T];\mathbb{R}^k)$ et on cherche le contrôle optimal $\overline{u} \in V$ t.q.

$$J(\overline{u}) = \inf_{v \in V} J(v)$$

- On va montrer que
  - J est fortement convexe (et continue) $\Longrightarrow \exists!$ contrôle optimal $\overline{u} \in V$
- La semaine prochaine, on montrera que
  - J est différentiable $\Longrightarrow$ on a la CNS d'optimalité $\nabla J(\overline{u}) = 0$ $(\in V)$
  - et on calculera la différentielle de J en $\overline{u}$

Forte convexité de J

- Comme R est symétrique définie positive, J_R est fortement convexe en u de paramètre $\alpha = \lambda_{\min}(R)$ (plus petite valeur propre de R)
  - on raisonne à t fixé; dans $\mathbb{R}^k$, on a

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{u+v}{2}\right)^\dagger R\left(\tfrac{u+v}{2}\right) &= \tfrac{1}{2}(u^\dagger Ru + v^\dagger Rv) - \tfrac{1}{4}(u-v)^\dagger R(u-v)\\ &\leq \tfrac{1}{2}(u^\dagger Ru + v^\dagger Rv) - \tfrac{1}{4}\lambda_{\min}(R)|u-v|^2_{\mathbb{R}^k}\end{aligned}$$

- J_{QD} est convexe en u comme composée d'une application convexe par une application affine
  - comme $x_u(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)\,\mathrm{d}s$, l'application qui à $u \in L^2([0,T];\mathbb{R}^k)$ associe $e_{x_u} \in C^0([0,T];\mathbb{R}^d)$ est affine
  - comme Q et D sont symétriques positives, J_{QD} est convexe en e_x
  - par composition, J_{QD} est convexe en u

- J est fortement convexe comme somme d'une application fortement convexe (J_R) et d'une application convexe (J_{QD})

- J est également continue