# MAP434 - Contrôle de modèles dynamiques

# Contrôle optimal du système LQ

**Alexandre Ern**

ENPC - INRIA - X

**amphi du mardi 26 mars 2019**

# Plan de la séance

- Le système linéaire-quadratique
- Différentielle du critère : état adjoint
- Principe du minimum : Hamiltonien
- Équation de Riccati : feedback
- Poly, sections 4.2, 4.3 et 4.4

# Le système LQ (1)

- On se donne
  - un intervalle de temps $[0,T]$, $T > 0$
  - une matrice $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ et une matrice $B \in \mathbb{R}^{d\times k}$
  - une condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^d$
- Le système de contrôle est

$$\dot{x}_u(t) = Ax_u(t) + Bu(t) \quad \forall t \in [0,T], \qquad x_u(0) = x_0$$

  Il s'agit d'un système **linéaire** (autonome)
- L'ensemble des contrôles admissibles est ici $L^2([0,T];\mathbb{R}^k)$
  - pour chaque $u \in L^2([0,T];\mathbb{R}^k)$, $\exists!$ trajectoire $x_u \in AC([0,T];\mathbb{R}^d)$ (formule de Duhamel)

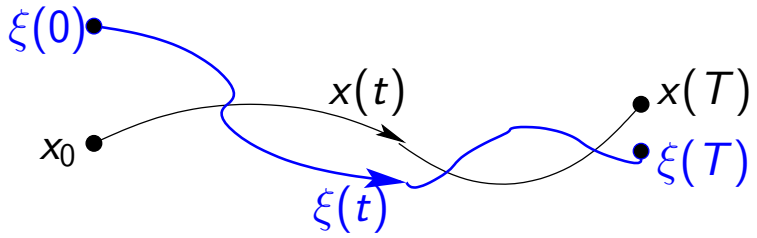
# Le système LQ (2)

- On cherche le **contrôle optimal** qui minimise dans $L^2([0,T];\mathbb{R}^k)$ le critère

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u(t)^\dagger R u(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^T e_{x_u}(t)^\dagger Q e_{x_u}(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2} e_{x_u}(T)^\dagger D e_{x_u}(T)$$

  - $e_{x_u} = x_u - \xi$ où $\xi \in C^0([0,T];\mathbb{R}^d)$ est une **trajectoire cible**
  - $Q, D \in \mathbb{R}^{d\times d}$ sont des matrices symétriques **positives**
  - $R \in \mathbb{R}^{k\times k}$ est une matrice symétrique **définie positive**

- Le critère $J$ résulte d'une **pondération** entre l'atteinte de la trajectoire cible et le fait que le contrôle ne soit pas "trop grand" dans $L^2$
  - on a besoin de la définie positivité de $R$ pour que le problème de contrôle optimal soit bien posé
  - on peut prendre $Q = D = 0$; le contrôle optimal est alors trivial ($u \equiv 0$)
  - on ne s'impose pas ici d'atteindre de cible au temps final $T$



# Formalisation

- On a

$$\dot{x}_u(t) = Ax_u(t) + Bu(t) \quad \forall t \in [0,T], \qquad x_u(0) = x_0$$

$$J(u) = \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^T u(t)^\dagger R u(t)\,\mathrm{d}t}_{=J_R(u)} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^T e_{x_u}(t)^\dagger Q e_{x_u}(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2} e_{x_u}(T)^\dagger D e_{x_u}(T)}_{=J_{QD}(u)}$$

où $e_{x_u} = x_u - \xi$ et $\xi \in C^0([0,T];\mathbb{R}^d)$ est une trajectoire cible

- On se place dans l'espace de Hilbert $V = L^2([0,T];\mathbb{R}^k)$ et on cherche le contrôle optimal $\overline{u} \in V$ t.q.

$$J(\overline{u}) = \inf_{v \in V} J(v)$$

- On a vu la semaine dernière que
  - $J$ est fortement convexe (et continue) $\Longrightarrow \exists!$ contrôle optimal $\overline{u} \in V$

- Nous allons mainteant établir que
  - $J$ est différentiable $\Longrightarrow$ on a la CNS d'optimalité $\nabla J(\overline{u}) = 0$ $(\in V)$
  - puis nous allons calculer la différentielle de $J$ en $\overline{u}$

# Différentiabilité de $J$

- La différentiabilité de $J_R$ est immédiate : $R$ étant symétrique, il vient

$$J_R(u+\delta u) = J_R(u) + \int_0^T \delta u(t)^\dagger R u(t)\,\mathrm{d}t + J_R(\delta u)$$

Comme $\frac{J_R(\delta u)}{\|\delta u\|_V} \leq \lambda_{\max}(R)\|\delta u\|_V$, on conclut que $\nabla J_R(u) = Ru \in V$ (ce qui signifie $\nabla J_R(u)(t) = Ru(t)$ p.p. sur $[0,T]$)

- Pour différentier $J_{QD}$, on considère la trajectoire perturbée $x_{u+\delta u}$ associée au contrôle perturbé $u+\delta u$; on pose $\delta x = x_{u+\delta u} - x_u$
  - par linéarité, on a

$$\dot{\delta x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t), \qquad \delta x(0) = 0$$

$\delta x$ est linéaire en $\delta u$ et $\|\delta x\|_{C^0([0,T];\mathbb{R}^d)} \leq C\|\delta u\|_V$ car $\delta x(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} B\delta u(s)\,\mathrm{d}s$

  - comme $Q$ et $D$ sont symétriques, on obtient

$$(\nabla J_{QD}(u), \delta u)_V = \int_0^T \delta x(t)^\dagger Q e_{x_u}(t)\,\mathrm{d}t + \delta x(T)^\dagger D e_{x_u}(T)$$

  - on souhaite faire apparaître $\delta u$ au membre de droite ...

# État adjoint

- On introduit **l'état adjoint** $p \in C^1([0,T];\mathbb{R}^d)$ solution de l'équation **rétrograde**

$$\dot{p}(t) = -A^\dagger p(t) - Qe_{x_u}(t), \quad \forall t \in [0,T], \qquad p(T) = De_{x_u}(T)$$

- En intégrant par parties en temps, on constate que

$$\begin{aligned}
(\nabla J_{QD}(u), \delta u)_V &= \int_0^T \delta x(t)^\dagger Qe_{x_u}(t)\,\mathrm{d}t + \delta x(T)^\dagger De_{x_u}(T) \\
&= -\int_0^T \delta x(t)^\dagger (\dot{p}(t) + A^\dagger p(t))\,\mathrm{d}t + \delta x(T)^\dagger p(T) \\
&= \int_0^T \left(\dot{\delta x}(t)^\dagger p(t) - \delta x(t)^\dagger A^\dagger p(t)\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^T (B\delta u(t))^\dagger p(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T \delta u(t)^\dagger B^\dagger p(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

- En conclusion, $\nabla J_{QD}(u) = B^\dagger p \in V = L^2([0,T];\mathbb{R}^k)$

# CNS d'optimalité

- **Thm. 4.5** La trajectoire $\overline{x}$ associée au contrôle $\overline{u}$ est **optimale ssi** le contrôle optimal s'écrit
$$\overline{u}(t) = -R^{-1}B^{\dagger}\overline{p}(t), \quad \forall t \in [0,T]$$
où le vecteur adjoint $\overline{p} : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ est t.q. (avec $e_{\overline{x}}(t) = \overline{x}(t) - \xi(t)$)
$$\frac{d}{dt}\overline{p}(t) = -A^{\dagger}\overline{p}(t) - Qe_{\overline{x}}(t), \quad \forall t \in [0,T], \qquad \overline{p}(T) = De_{\overline{x}}(T)$$
Un triplet $(\overline{x}, \overline{p}, \overline{u})$ satisfaisant ces conditions est appelé une **extrémale**
- Preuve : on a montré que $\nabla J(\overline{u}) = R\overline{u} + B^{\dagger}\overline{p} \in V$
- Remarques
  - attention, il n'y a pas de condition initiale sur $\overline{p}$, mais une condition finale
  - noter que $\overline{x}, \overline{p} \in C^1([0,T]; \mathbb{R}^d)$
  - on pourrait définir l'état adjoint comme un **vecteur ligne** $\widehat{p} := \overline{p}^{\dagger}$ ; le système différentiel rétrograde s'écrirait $\frac{d}{dt}\widehat{p}(t) = -\widehat{p}(t)A - e_x(t)^{\dagger}Q$, $\widehat{p}(T) = e_x(T)^{\dagger}D$ et le contrôle optimal deviendrait $u(t) = -R^{-1}B^{\dagger}\widehat{p}(t)^{\dagger}$

# Exemple : planification du mouvement (1)

- Point matériel dont on contrôle la vitesse ($d = k = 1$)

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad \forall t \in [0, T], \qquad x(0) = x_0$$

- Le critère à minimiser dans $V = L^2([0, T]; \mathbb{R})$ est

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T \left( x(t)^2 + u(t)^2 \right) \mathrm{d}t$$

- On a $A = 0$, $B = 1$, $R = 1$, $Q = 1$, $D = 0$, $\xi \equiv 0$ (cible nulle)

- La commande optimale est $\overline{u}(t) = -\overline{p}(t)$ où l'état adjoint est solution de $\frac{d}{dt}\overline{p}(t) = -\overline{x}(t)$, $\forall t \in [0, T]$, $\overline{p}(T) = 0$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \overline{x}(t) \\ \overline{p}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=Z} \begin{pmatrix} \overline{x}(t) \\ \overline{p}(t) \end{pmatrix}, \qquad e^{tZ} = \begin{pmatrix} \cosh(t) & -\sinh(t) \\ -\sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$$

# Exemple : planification du mouvement (2)

- On en déduit (l'état adjoint initial est encore inconnu)

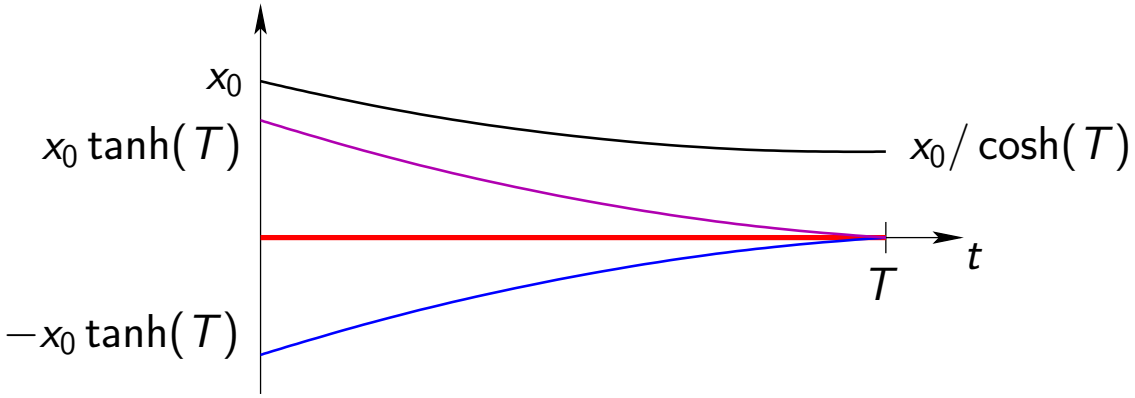
$$\overline{x}(t) = x_0 \cosh(t) - \overline{p}(0) \sinh(t)$$
$$\overline{p}(t) = -x_0 \sinh(t) + \overline{p}(0) \cosh(t)$$

Comme $\overline{p}(T) = 0$, on peut déterminer $\overline{p}(0)$; il vient $\overline{p}(0) = x_0 \tanh(T)$

- En conclusion, l'extrémale s'écrit

$$\overline{x}(t) = x_0 \frac{1}{\cosh(T)} \cosh(T - t)$$
$$\overline{p}(t) = x_0 \frac{1}{\cosh(T)} \sinh(T - t)$$
$$\overline{u}(t) = -\overline{p}(t) = -x_0 \frac{1}{\cosh(T)} \sinh(T - t)$$

- Illustration : trajectoire $\overline{x}(t)$, état adjoint $\overline{p}(t)$, contrôle $\overline{u}(t)$, cible $\xi(t)$



# Principe du minimum : Hamiltonien

- Le **Hamiltonien** est l'application $H : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ t.q.

$$H(t,x,p,u) = p^\dagger(Ax + Bu) + \tfrac{1}{2}u^\dagger Ru + \tfrac{1}{2}(x - \xi(t))^\dagger Q(x - \xi(t))$$

**attention !!** dans cette écriture, $(x,p,u)$ désigne un vecteur générique de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k$

- Un calcul élémentaire montre que

$$\begin{aligned}
\nabla_x H(t,x,p,u) &= A^\dagger p + Q(x - \xi(t)) \\
\nabla_p H(t,x,p,u) &= Ax + Bu \\
\nabla_u H(t,x,p,u) &= B^\dagger p + Ru
\end{aligned}$$

(on identifie les dérivées partielles à des vecteurs colonne, $p^\dagger Ax = (A^\dagger p)^\dagger x$, etc)

# Principe du minimum

- On considère maintenant l'extrémale $(\overline{x}, \overline{p}, \overline{u})$
  - pour tout $t \in [0, T]$, on peut évaluer $H$ et ses dérivées en $(t, \overline{x}(t), \overline{p}(t), \overline{u}(t))$
- On constate que

$$\frac{d\overline{x}}{dt}(t) = \nabla_p H(t, \overline{x}(t), \overline{p}(t), \overline{u}(t)), \qquad \frac{d\overline{p}}{dt}(t) = -\nabla_x H(t, \overline{x}(t), \overline{p}(t), \overline{u}(t))$$

$$\nabla_u H(t, \overline{x}(t), \overline{p}(t), \overline{u}(t)) = 0$$

- Comme $v \mapsto H(t, x, p, v)$ est fortement convexe en $v \in \mathbb{R}^k$ pour tout $(t, x, p) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ **fixé**, la dernière condition équivaut à

$$\overline{u}(t) = \arg\min_{v \in \mathbb{R}^k} H(t, \overline{x}(t), \overline{p}(t), v), \quad \forall t \in [0, T]$$

C'est le **principe du minimum de Pontryaguine**

  - on aurait pu définir $\widehat{H} := -H$ et aboutir à un principe du maximum pour $\widehat{H}$

# Cas particulier : cible nulle

- Lorsque $\xi \equiv 0$ sur $[0,T]$, le Hamiltonien $H$ ne dépend pas du temps, i.e., on a $\frac{\partial H}{\partial t}(t,x,p,u) = 0$
- On peut considérer le long de l'extrémale l'application $\mathcal{H} : [0,T] \to \mathbb{R}$ t.q.

$$\mathcal{H}(t) = H(\overline{x}(t), \overline{p}(t), \overline{u}(t)), \quad \forall t \in [0,T]$$

- Les résultats précédents montrent que

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{H}}(t) &= \left(\nabla_x H\right)^\dagger \frac{d\overline{x}}{dt}(t) + \left(\nabla_p H\right)^\dagger \frac{d\overline{p}}{dt}(t) + \left(\nabla_u H\right)^\dagger \frac{d\overline{u}}{dt}(t) \\ &= -\left(\frac{d\overline{p}}{dt}(t)\right)^\dagger \frac{d\overline{x}}{dt}(t) + \left(\frac{d\overline{x}}{dt}(t)\right)^\dagger \frac{d\overline{p}}{dt}(t) + 0 = 0\end{aligned}$$

**La valeur du Hamiltonien $\mathcal{H}(t)$ se conserve le long de l'extrémale**

# Exemple : planification du mouvement

- On rappelle que $A = 0$, $B = 1$, $R = 1$, $Q = 1$, $D = 0$, $\xi \equiv 0$ (cible nulle)
- Le Hamiltonien est défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et vaut

$$H(x, p, u) = pu + \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{2}x^2$$

- $(x, p)$ étant fixés, $H$ est quadratique en $u$
- Le principe du minimum de Pontryaguine implique que le contrôle optimal $\overline{u}(t)$ est, pour tout $t \in [0, T]$, le minimiseur de $H(\overline{x}(t), \overline{p}(t), v)$ sur $\mathbb{R}$; d'où

$$\overline{u}(t) = -\overline{p}(t)$$

- On évalue le Hamiltonien le long de l'extrémale; il vient

$$\mathcal{H}(t) = H(\overline{x}(t), \overline{p}(t), \overline{u}(t)) = \tfrac{1}{2}(\overline{x}(t)^2 - \overline{p}(t)^2) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{x_0}{\cosh(T)}\right)^2$$

car $\overline{x}(t) = \frac{x_0}{\cosh(T)}\cosh(T - t)$, $\overline{p}(t) = \frac{x_0}{\cosh(T)}\sinh(T - t)$

# Équation de Riccati : feedback

- Pour simplifier, on suppose que la cible est nulle
- **(Thm. 4.15)** Il existe une unique matrice $P \in C^1([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$ solution de l'équation de Riccati

$$\begin{aligned}&\dot{P}(t) = -A^\dagger P(t) - P(t)A + P(t)BR^{-1}B^\dagger P(t) - Q, \quad \forall t \in [0,T]\\ &P(T) = D\end{aligned}$$

  et on a pour tout $t \in [0,T]$, $\overline{p}(t) = P(t)\overline{x}(t)$. De plus, $P$ est **symétrique semi-définie positive**, et **définie positive** si $D$ l'est

- Le contrôle optimal $\overline{u}$ se met sous forme de boucle fermée $\overline{u}(t) = K(t)\overline{x}(t)$ car

$$\overline{u}(t) = -R^{-1}B^\dagger \overline{p}(t) = \underbrace{-R^{-1}B^\dagger P(t)}_{=:K(t)}\overline{x}(t)$$

- La valeur optimale du critère est $J(\overline{u}) = \frac{1}{2}x_0^\dagger P(0)x_0$

# Preuve (1) : dépendance linéaire

- Le problème LQ étant bien posé, on a vu qu'il existe un unique couple $(\overline{x}, \overline{p}) \in C^1([0,T]; \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ t.q.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\overline{x}(t) = A\overline{x}(t) - BR^{-1}B\overline{p}(t), & \overline{x}(0) = x_0 \\ \frac{d}{dt}\overline{p}(t) = -A^{\dagger}\overline{p}(t) - Q\overline{x}(t), & \overline{p}(T) = D\overline{x}(T) \end{cases}$$

- Par linéarité, le couple $(\overline{x}, \overline{p})$ dépend linéairement de la condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^d$

- Il existe des matrices $\mathcal{X}, \mathcal{P}$ dans $C^1([0,T]; \mathbb{R}^{d \times d})$ t.q.

$$\overline{x}(t) = \mathcal{X}(t)x_0, \quad \overline{p}(t) = \mathcal{P}(t)x_0, \quad \forall t \in [0,T]$$

et $\mathcal{X}(0) = I$

# Preuve (2) : invertibilité de $\mathcal{X}(t)$

- On va montrer que la matrice $\mathcal{X}(t)$ est inversible sur $[0, T]$
- Par l'absurde, soit $s \in [0, T]$ et $0 \neq x_0 \in \mathbb{R}^d$ t.q. $\overline{x}(s) = \mathcal{X}(s)x_0 = 0$
  - $s > 0$ car $\mathcal{X}(0) = I$
  - on a $\frac{d}{dt}\left(\overline{p}(t)^\dagger \overline{x}(t)\right) = -\overline{x}(t)^\dagger Q\overline{x}(t) - (B^\dagger \overline{p}(t))^\dagger R^{-1} B^\dagger \overline{p}(t) \leq 0$
  - en intégrant de $s$ à $T$, comme $\overline{x}(s) = 0$, il vient

$$0 = (D\overline{x}(T))^\dagger \overline{x}(T) + \int_s^T \overline{x}(t)^\dagger Q\overline{x}(t) + (B^\dagger \overline{p}(t))^\dagger R^{-1} B^\dagger \overline{p}(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$$

  - $D, Q, R$ étant symétriques (semi-)définies positives, on en déduit $\overline{u}(t) = -R^{-1}B^\dagger \overline{p}(t) = 0$ pour tout $t \in [s, T]$
  - donc $\frac{d}{dt}\overline{x}(t) = A\overline{x}(t)$ et $\overline{x}(s) = 0$; d'où $\overline{x}(t) = 0$ sur $[s, T]$
  - de même $\frac{d}{dt}\overline{p}(t) = -A^\dagger \overline{p}(t)$ et $\overline{p}(T) = D\overline{x}(T) = 0$; d'où $\overline{p}(t) = 0$ sur $[s, T]$
- On en déduit que $(\overline{x}, \overline{p})$ vérifie un système différentiel linéaire avec conditions finales $\overline{x}(T) = \overline{p}(T) = 0$; d'où $\overline{x}(t) = \overline{p}(t) = 0$ sur $[0, T]$; en particulier, $x_0 = 0$

# Preuve (3) : équation de Riccati

- On pose $P(t) = \mathcal{P}(t)\mathcal{X}(t)^{-1}$ sur $[0,T]$; $P \in C^1([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$
- On calcule

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\overline{p}(t) &= (\tfrac{d}{dt}P(t))\overline{x}(t) + P(t)\tfrac{d}{dt}\overline{x}(t)\\ &= (\tfrac{d}{dt}P(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B^{\dagger}P(t))\overline{x}(t)\end{aligned}$$

et par ailleurs $\frac{d}{dt}\overline{p}(t) = -A^{\dagger}\overline{p}(t) - Q\overline{x}(t)$, d'où

$$(\tfrac{d}{dt}P(t) + P(t)A + A^{\dagger}P(t) - P(t)BR^{-1}B^{\dagger}P(t) + Q)\overline{x}(t) = 0$$

pour tout $t \in [0,T]$ et pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$

- Pour tout $t \in [0,T]$ fixé, $\overline{x}(t)$ décrit $\mathbb{R}^d$ lorsque $x_0$ décrit $\mathbb{R}^d$ (car $\mathcal{X}(t)$ est inversible) $\Longrightarrow P$ satisfait l'équation de Riccati pour tout $t \in [0,T]$
- Même raisonnement : $\overline{p}(T) = D\overline{x}(T) = P(T)\overline{x}(T)$; $\overline{x}(T)$ décrit $\mathbb{R}^d$ lorsque $x_0$ décrit $\mathbb{R}^d \Longrightarrow P(T) = D$

# Preuve (4) : propriétés de $P$

- $P$ est solution d'un système différentiel quadratique; la non-linéarité satisfait donc une condition de Lipschitz locale $\Longrightarrow$ **unicité** de la solution
- L'unicité prouve que $P$ est **symétrique** car $P^\dagger$ satisfait la même équation
- Positivité de $P(t)$, $\forall t \in [0,T]$ :
  - soit $x \in \mathbb{R}^d$, posons $x_0 = \mathcal{X}(t)^{-1}x$ de sorte que $x = \overline{x}(t)$ où $\overline{x}$ est la trajectoire optimale issue de $x_0$
  - comme $\overline{p}(t)^\dagger \overline{x}(t)$ est décroissante en temps,

$$x^\dagger P(t)x = \overline{x}(t)^\dagger P(t)\overline{x}(t) \geq \overline{x}(T)^\dagger D\overline{x}(T) \geq 0$$

    ce qui montre que $P(t)$ est **semi-définie positive**
  - enfin, si $D$ est définie positive, cela entraîne $\overline{x}(T) = 0$, d'où $x = \mathcal{X}(t)\mathcal{X}(T)^{-1}\overline{x}(T) = 0$, i.e., $P(t)$ est **définie positive**

# Preuve (5) : valeur optimale du critère

- Il vient

$$
\begin{aligned}
J(\overline{u}) &= \frac{1}{2}\int_0^T \left(\overline{x}(t)^\dagger Q\overline{x}(t) + \overline{u}(t)^\dagger R\overline{u}(t)\right)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\overline{x}(T)^\dagger D\overline{x}(T) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T \left(\overline{x}(t)^\dagger Q\overline{x}(t) - \overline{p}(t)^\dagger B\overline{u}(t)\right)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\overline{x}(T)^\dagger D\overline{x}(T) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T \left(\overline{x}(t)^\dagger Q\overline{x}(t) - \overline{p}(t)^\dagger B\overline{u}(t)\right)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\overline{p}(T)^\dagger\overline{x}(T) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T -\frac{d}{dt}\left(\overline{p}(t)^\dagger\overline{x}(t)\right)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\overline{p}(T)^\dagger\overline{x}(T) \\
&= \frac{1}{2}\overline{p}(0)^\dagger\overline{x}(0) = \frac{1}{2}x_0^\dagger P(0)x_0
\end{aligned}
$$

# Représentation linéaire de l'équation de Riccati

- Au lieu de résoudre un système différentiel quadratique de taille $\frac{d(d+1)}{2}$ ($P$ est symétrique), on peut considérer un système différentiel linéaire de taille $2d$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & -BR^{-1}B^{\dagger} \\ -Q & -A^{\dagger} \end{pmatrix}}_{=\mathbb{A}\in\mathbb{R}^{(2d)\times(2d)}} \begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix}$$

- On note $R(t) = e^{(T-t)\mathbb{A}}$ la résolvante (t.q. $R(T) = I$)

- On pose $R(t) = \begin{pmatrix} R_1(t) & R_2(t) \\ R_3(t) & R_4(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2d)\times(2d)}$
  - on a $x(t) = R_1(t)x(T) + R_2(t)p(T)$, $p(t) = R_3(t)x(T) + R_4(t)p(T)$
  - or $p(T) = Dx(T)$, donc en posant $\mathcal{X}_T(t) = R_1(t) + R_2(t)D$, $\mathcal{P}_T(t) = R_3(t) + R_4(t)D$, il vient $x(t) = \mathcal{X}_T(t)x(T)$ et $p(t) = \mathcal{P}_T(t)x(T)$

- En conclusion, la matrice $P(t)$ s'obtient à partir de la résolvante d'un système **linéaire** de taille $2d$

$$P(t) = (R_3(t) + R_4(t)D)(R_1(t) + R_2(t)D)^{-1} \in \mathbb{R}^{d\times d}$$

# Exemple : planification du mouvement

- On rappelle que $A = 0$, $B = 1$, $R = 1$, $Q = 1$, $D = 0$
- L'équation de Riccati pour la fonction $P(t)$, ici à valeurs scalaires, s'écrit

$$\dot{P}(t) = P(t)^2 - 1 \quad \forall t \in [0, T], \qquad P(T) = 0$$

  On obtient $P(t) = \tanh(T - t)$

- Le contrôle optimal se met sous forme de boucle fermée

$$\overline{u}(t) = K(t)\overline{x}(t), \qquad K(t) = -P(t) = -\tanh(T - t)$$

  (pour mémoire, $\overline{x}(t) = \frac{x_0}{\cosh(T)} \cosh(T - t)$, $\overline{u}(t) = -\overline{p}(t) = -\frac{x_0}{\cosh(T)} \sinh(T - t)$)

- La valeur optimale du critère est $J(\overline{u}) = \frac{1}{2} x_0^2 P(0) = \frac{1}{2} x_0^2 \tanh(T)$