

MAP434 - Contrôle de modèles dynamiques
Ensembles atteignables - temps optimalité

Alexandre Ern

ENPC - INRIA - X

amphi du 09 avril 2019

Plan de la séance

- Ensemble atteignable : cas général
- Ensemble atteignable : cas linéaire
- Temps-optimalité pour les systèmes linéaires
- Poly, sections 1.3, 2.2, 3.3

Ensemble atteignable : cas général

- On considère le système de contrôle non-linéaire

$$\dot{x}_u(t) = f(t, x_u(t), u(t)), \quad \forall t \in [0, T], \quad x_u(0) = x_0$$

- Pour tout $t \in [0, T]$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$, on définit l'**ensemble atteignable** en temps t à partir de x_0 comme

$$\mathcal{A}(t, x_0) = \{x_1 \in \mathbb{R}^d \mid \exists u \in L^\infty([0, t]; U) \text{ t.q. } x_u(t) = x_1\}$$

où U est un sous-ensemble **compact** non-vide de \mathbb{R}^k
($L^1([0, t]; U) = L^\infty([0, t]; U)$ si U est borné)

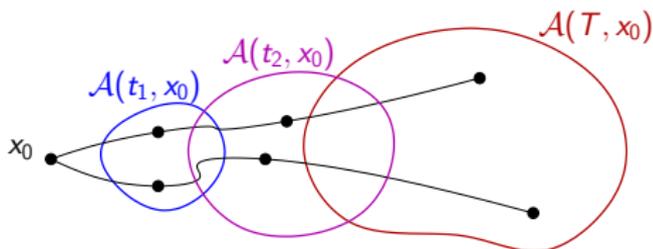
Variation continue en temps

- **(Lem. 2.9)** On suppose que
 - f est de classe C^0 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times U$
 - U est un sous-ensemble **compact** de \mathbb{R}^k
 - les trajectoires sont **uniformément bornées**

$$\exists M > 0, \quad \forall u \in L^\infty([0, T]; U), \quad \sup_{t \in [0, T]} |x_u(t)| \leq M$$

Alors, l'ensemble $\mathcal{A}(t, x_0)$ varie **continûment** en t sur $[0, T]$

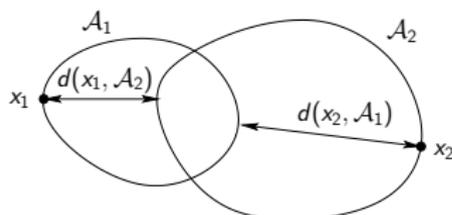
- Ces hypothèses sont bien vérifiées dans le cas linéaire



Preuve

- Rappel : distance de Hausdorff entre deux sous-ensembles de \mathbb{R}^d

$$d(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = \max \left(\sup_{x_1 \in \mathcal{A}_1} d(x_1, \mathcal{A}_2), \sup_{x_2 \in \mathcal{A}_2} d(x_2, \mathcal{A}_1) \right)$$



- Soit $\epsilon > 0$, on va montrer qu'il existe $\delta > 0$ t.q.

$$\forall t_1, t_2 \in [0, T], \quad |t_1 - t_2| \leq \delta \implies d(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \leq \epsilon$$

où $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}(t_1, x_0)$, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}(t_2, x_0)$; supposons $t_2 > t_1$ pour fixer les idées

- soit $x_2 \in \mathcal{A}_2$, $\exists u \in L^\infty([0, t_2]; U)$ t.q. $x_2 = x_0 + \int_0^{t_2} f(s, x(s), u(s)) ds$
- avec ce même contrôle, on pose $x_1 = x_0 + \int_0^{t_1} f(s, x(s), u(s)) ds \in \mathcal{A}(t_1, x_0)$
- d'après les hypothèses sur f , x et u ,

$$|x_2 - x_1| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(s, x(s), u(s))| ds \leq C|t_2 - t_1|$$

- d'où $d(x_2, \mathcal{A}_1) \leq |x_2 - x_1| \leq C|t_2 - t_1|$; on raisonne de même pour $x_1 \in \mathcal{A}_1$

- **(Lem. 2.11)** On suppose que
 - f est de classe C^0 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times U$ et de classe C^1 en x
 - U est un sous-ensemble **compact** de \mathbb{R}^k
 - les trajectoires sont **uniformément bornées**
 - pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$, l'ensemble des vecteurs vitesse

$$K(t, x) = \{f(t, x, u) \mid u \in U\}$$

est un sous-ensemble **convexe** de \mathbb{R}^d

Alors, l'ensemble atteignable $\mathcal{A}(t, x_0)$ est **compact** pour tout $t \in [0, T]$

- Ces hypothèses sont bien vérifiées dans le cas linéaire avec U **convexe**
- Nous allons admettre ce résultat.

Ensemble atteignable : cas linéaire

- On considère le système de contrôle linéaire autonome

$$\dot{x}_u(t) = Ax_u(t) + Bu(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad x_u(0) = x_0$$

- On suppose le contrôle à valeurs dans le sous-ensemble **compact non-vide** $U \subset \mathbb{R}^k$
- Pour tout $t \in [0, T]$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$, on définit l'**ensemble atteignable** en temps t à partir de x_0 comme

$$\mathcal{A}(t, x_0) = \{x_1 \in \mathbb{R}^d \mid \exists u \in L^\infty([0, t]; U) \text{ t.q. } x_u(t) = x_1\}$$

- **(Thm. 1.19)** $\forall t \in [0, T]$, $\mathcal{A}(t, x_0)$ est **compact**, **convexe**, et varie **continûment** en t
 - nous avons déjà établi les propriétés de variation continue et de compacité
 - il reste à prouver la convexité, qui est **spécifique au cas linéaire**

Preuve de convexité : cas U convexe

- La preuve de convexité de $\mathcal{A}(t, x_0)$ est élémentaire dans le cas U convexe
- Soit $x_1, x_2 \in \mathcal{A}(t, x_0)$, soit $\theta \in [0, 1]$
 - par définition, il existe $u_i : [0, T] \rightarrow U$, $i \in \{1, 2\}$, t.q.

$$x_i = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu_i(s) ds$$

- posons $u(t) = \theta u_1(t) + (1 - \theta)u_2(t)$, $\forall t \in [0, T]$; u est mesurable et à valeurs dans U par **convexité** de U
- par linéarité, la trajectoire associée à u vérifie

$$x_u(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s) ds = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2$$

ce qui signifie que $\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in \mathcal{A}(t, x_0)$

Preuve de convexité : cas général

- L'ensemble atteignable $\mathcal{A}(t, x_0)$ est convexe même si U ne l'est pas!
- **(Lemme de Lyapunov)** Soit $t > 0$, $f \in L^1([0, t]; \mathbb{R}^n)$; le sous-ensemble $\{\int_E f(s) ds \mid E \subset [0, t] \text{ mesurable}\} \subset \mathbb{R}^n$ est convexe
 - soit $x_1, x_2 \in \mathcal{A}(t, x_0)$, soit $\theta \in [0, 1]$
 - $\exists u_i : [0, t] \rightarrow U$, $i \in \{1, 2\}$, t.q. $y_i = x_i - e^{tA}x_0 = \int_0^t e^{(t-s)A}Bu_i(s) ds$
 - on considère $f(t) = (e^{(t-s)A}Bu_1(s), e^{(t-s)A}Bu_2(s)) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$
 - on a $\int_{\{0\}} f(s) ds = (0, 0)$, $\int_{[0, T]} f(s) ds = (y_1, y_2)$
 - par le lemme de Lyapunov, $\exists E \subset [0, t]$ mesurable t.q. $\int_E f(s) ds = (\theta y_1, \theta y_2)$
 - on a $\int_{E^c} f(s) ds = \int_{[0, t]} f(s) ds - \int_E f(s) ds = ((1 - \theta)y_1, (1 - \theta)y_2)$
 - on pose $u(s) = u_1(s)$ si $s \in E$ et $u(s) = u_2(s)$ si $s \in E^c$
 - $u : [0, t] \rightarrow U$ est bien mesurable et la trajectoire associée satisfait

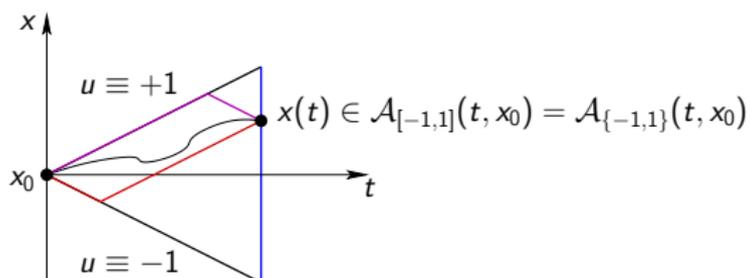
$$\begin{aligned}x_u(t) - e^{tA}x_0 &= \int_{[0, t]} e^{(t-s)A}Bu(s) ds \\ &= \int_E e^{(t-s)A}Bu_1(s) ds + \int_{E^c} e^{(t-s)A}Bu_2(s) ds = \theta y_1 + (1 - \theta)y_2\end{aligned}$$

ce qui montre que $\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 = x_u(t) \in \mathcal{A}(t, x_0)$

Illustration

- Contrôle de la vitesse d'un point matériel

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in U = [-1, 1]$$



- On considère le système de contrôle **linéaire autonome**

$$\dot{x}_u(t) = Ax_u(t) + Bu(t), \quad \forall t \geq 0 \quad x_u(0) = x_0$$

avec $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ et $B \in \mathbb{R}^{d \times k}$

- On impose des **contraintes sur le contrôle** : u est à valeurs dans un **compact (non-vide) $U \subset \mathbb{R}^k$** ; on note

$$\mathcal{U}_t = L^\infty([0, t]; U)$$

- Le problème de temps-optimalité est le suivant :
 - on se donne une **cible** $x_1 \in \mathbb{R}^d$
 - on suppose qu'il existe au moins une trajectoire reliant x_0 à x_1 (en temps fini)
 - parmi toutes ces trajectoires, on cherche celle(s) qui le fait en **temps minimal**

Rappel sur les ensembles atteignables

- L'ensemble atteignable en temps t à partir de x_0 est défini comme

$$\mathcal{A}(t, x_0) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \exists u \in \mathcal{U}_t \text{ t.q. } x_u(t) = y\}$$

- Pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{A}(t, x_0)$ est **compact**, **convexe**, et varie **continûment** en t
- Étant donnée une cible $x_1 \in \mathbb{R}^d$, atteignable en temps fini, i.e., t.q. l'ensemble $\{t \geq 0 \mid x_1 \in \mathcal{A}(t, x_0)\}$ est non-vide, on cherche

$$t_* = \inf\{t \geq 0 \mid x_1 \in \mathcal{A}(t, x_0)\}$$

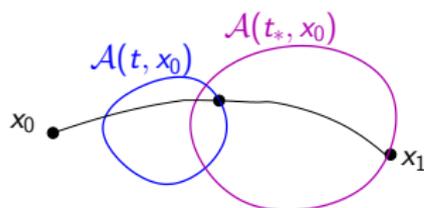
Comme $\mathcal{A}(t, x_0)$ varie continûment en t , l'ensemble $\{t \geq 0 \mid x_1 \in \mathcal{A}(t, x_0)\}$ est **fermé** dans \mathbb{R} , si bien que la borne inférieure t_* est **atteinte**

- considérer une suite minimisante $t_n \downarrow t_*$ et constater que $0 = d(x_1, \mathcal{A}(t_n, x_0)) \rightarrow d(x_1, \mathcal{A}(t_*, x_0))$ par variation continue en temps

Caractérisation géométrique

- **(Lem. 3.13)** On a nécessairement $x_1 \in \partial\mathcal{A}(t_*, x_0)$
 - la preuve utilise la convexité et la variation continue en temps de l'ensemble atteignable
- Un raisonnement identique s'applique pour tout $t \in [0, t_*]$: si $x_*(t)$ est la trajectoire associée à un contrôle temps-minimal, on a

$$x_*(t) \in \partial\mathcal{A}(t, x_0), \quad \forall t \in [0, t_*]$$



- On dit qu'un contrôle $u \in \mathcal{U}_t$ est **extrémal** si la trajectoire associée vérifie $x(s) \in \partial\mathcal{A}(s, x_0), \forall s \in [0, t]$
 - un contrôle temps-optimal est nécessairement extrémal
 - la réciproque est fautive (l'extrémalité ne distingue pas minimalité et maximalité ...)

- **(Thm. 3.16)** Soit $T > 0$, on suppose U compact, non-vide et convexe. Le contrôle $u \in \mathcal{U}_T$ est extrémal sur $[0, T]$ **ssi** il existe une solution non triviale $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ de l'équation $\dot{p}(t) = -A^\dagger p(t)$, appelée **état adjoint**, t.q.

$$p(t)^\dagger B u(t) = \min_{v \in U} p(t)^\dagger B v, \quad \text{p.p. } t \in [0, T]$$

- noter que la condition initiale sur p n'est pas connue a priori
 - seule l'orientation de $p(t)$ compte, pas son amplitude
 - si u est extrémal sur $[0, T]$, il l'est sur $[0, t]$ pour tout $t \in [0, T]$
- Dans le cas mono-entrée (contrôle scalaire, $k = 1$) avec $U = [-a, a]$, $a > 0$, la condition de minimisation implique que

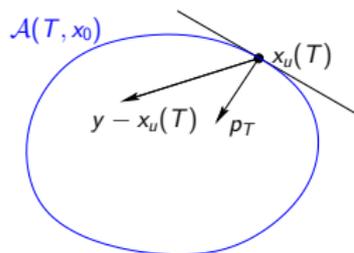
$$u(t) = -a \operatorname{sign}(p(t)^\dagger B)$$

$t \mapsto p(t)^\dagger B \in \mathbb{R}$ est la **fonction de commutation**, et les temps t_c où u change de signe sont appelés **temps de commutation** et correspondent aux zéros de la fonction de commutation

Preuve : CN (1)

- Soit $u \in \mathcal{U}_T$ un contrôle extrémal et $x_u(t)$ la trajectoire associée
- Comme $x_u(T) \in \partial\mathcal{A}(T, x_0)$ et que $\mathcal{A}(T, x_0)$ est convexe, il existe un hyperplan séparant au sens large $x_u(T)$ et $\mathcal{A}(T, x_0)$, i.e.,

$$\exists p_T \in \mathbb{R}^d, \quad p_T^\dagger(y - x_u(T)) \geq 0, \quad \forall y \in \mathcal{A}(T, x_0)$$



Preuve : CN (2)

- En notant $\hat{u} \in \mathcal{U}_T$ un contrôle quelconque associé à une trajectoire amenant au point $y \in \mathcal{A}(T, x_0)$, l'inégalité $p_T^\dagger(y - x_u(T)) \geq 0$ s'écrit

$$\int_0^T p_T^\dagger e^{(T-t)A} B \hat{u}(t) dt \geq \int_0^T p_T^\dagger e^{(T-t)A} B u(t) dt$$

- En introduisant l'état adjoint t.q. $\dot{p}(t) = -A^\dagger p(t)$, $p(T) = p_T$, l'inégalité ci-dessus se réécrit

$$\int_0^T p(t)^\dagger B \hat{u}(t) dt \geq \int_0^T p(t)^\dagger B u(t) dt$$

On raisonne par l'absurde

- supposons $p(t)^\dagger B u(t) > \min_{v \in U} p(t)^\dagger B v$ sur un sous-ensemble de $[0, T]$ de mesure > 0 ; d'où $\int_0^T p(t)^\dagger B u(t) dt > \int_0^T \min_{v \in U} p(t)^\dagger B v dt$
- on considère \hat{u} sur $[0, T]$ à valeurs dans U t.q. $p(t)^\dagger B \hat{u}(t) = \min_{v \in U} p(t)^\dagger B v$; on montre que \hat{u} peut être choisi mesurable sur $[0, T]$, i.e., $\hat{u} \in \mathcal{U}_T$
- on a ainsi obtenu $\int_0^T \min_{v \in U} p(t)^\dagger B v dt = \int_0^T p(t)^\dagger B \hat{u}(t) dt \geq \int_0^T p(t)^\dagger B u(t) dt > \int_0^T \min_{v \in U} p(t)^\dagger B v dt$; d'où la contradiction cherchée

- Supposons qu'il existe un état adjoint non trivial t.q. le contrôle vérifie

$$\rho(t)^\dagger B u(t) = \min_{v \in U} \rho(t)^\dagger B v, \quad \text{p.p. } t \in [0, T]$$

- En remontant le raisonnement précédent, on déduit que

$$\rho(t)^\dagger (y - x_u(t)) \geq 0, \quad \forall y \in \mathcal{A}(t, x_0), \quad \forall t \in [0, T]$$

- Si $x_u(t) \in \overset{\circ}{\mathcal{A}}(t, x_0)$, il existerait $\epsilon > 0$ t.q. $x(t) - \epsilon p(t) \in \mathcal{A}(t, x_0)$; d'où

$$\rho(t)^\dagger (y - x_u(t)) = -\epsilon |p(t)|_{\mathbb{R}^d}^2 \geq 0$$

ce qui fournit la contradiction cherchée

- Remarque : on peut montrer que si
 - le système linéaire autonome est **contrôlable**
 - toutes les v.p. de A sont **réelles**

alors un contrôle extrémal a au plus $(d - 1)$ **commutations**

Application : contrôle d'un tram (1)

- Le tram est repéré par sa position $x(t)$ le long d'un axe unidirectionnel; on contrôle l'accélération $u(t)$ (masse unité)

$$\ddot{x}(t) = u(t) \in U := [-1, 1], \quad \forall t \in [0, T]$$

- En posant $X(t) = (x(t), v(t))$ où $v(t) = \dot{x}(t)$, on obtient

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On part de la CI $(x_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ et on souhaite atteindre la cible $(0, 0)$ en temps minimal

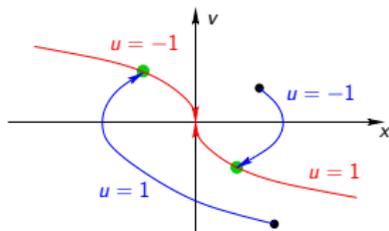
- On introduit l'état adjoint $p(t) = (p_x(t), p_v(t))$ t.q. $\dot{p}(t) = -A^\dagger p(t)$
 - on a donc $\dot{p}_x(t) = 0$, $\dot{p}_v(t) = -p_x(t)$, i.e., $p_x(t) = p_{x0}$ et $p_v(t) = p_{v0} - p_{x0}t$
- La condition de minimalité est

$$u(t) = -\text{signe}(p(t)^\dagger B) = -\text{signe}(p_v(t))$$

Il y a au plus une commutation car $p_v(t)$ est affine en t , et **le contrôle temps-optimal est bang-bang**

Application : contrôle d'un tram (2)

- Calcul des trajectoires dans l'espace des phases (plan (x, v))
 - si $u = 1$, on a $x(t) - \frac{1}{2}v(t)^2 = cste$: les trajectoires sont des paraboles d'axe Ox , parcourues dans le sens des v croissants
 - si $u = -1$, on a $x(t) + \frac{1}{2}v(t)^2 = cste$: les trajectoires sont des paraboles d'axe $-Ox$, parcourues dans le sens des v décroissants



- Les deux demi-paraboles en rouge forment la **courbe de commutation**
 - le point vert indique la commutation sur chaque trajectoire
- Le contrôle optimal s'écrit comme un **feedback**
 - $u = 1$ si X est **au-dessous** de la courbe de commutation (accélérer)
 - $u = -1$ si X est **au-dessus** (décélérer)

Application : oscillateur harmonique (1)

- On considère l'oscillateur harmonique $\ddot{x}(t) + x(t) = u(t)$ avec la CI $(x(0), \dot{x}(0)) = (x_0, v_0)$ et on souhaite atteindre la cible $(0, 0)$ (position et vitesse nulles) en temps minimal sous la contrainte $u(t) \in U := [-1, 1]$
- En posant $X(t) = (x(t), v(t))$ où $v(t) = \dot{x}(t)$, on obtient

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- On introduit l'état adjoint t.q. $\dot{p}(t) = -A^\dagger p(t)$
 - l'amplitude de $p(t)$ est conservée, on peut la choisir égale à un
 - on obtient donc $p(t) = (p_x(t), p_v(t)) = (\cos(t + \varphi), -\sin(t + \varphi))$ (le vecteur adjoint tourne dans le sens horaire à vitesse angulaire 1)
- La condition de minimalité est

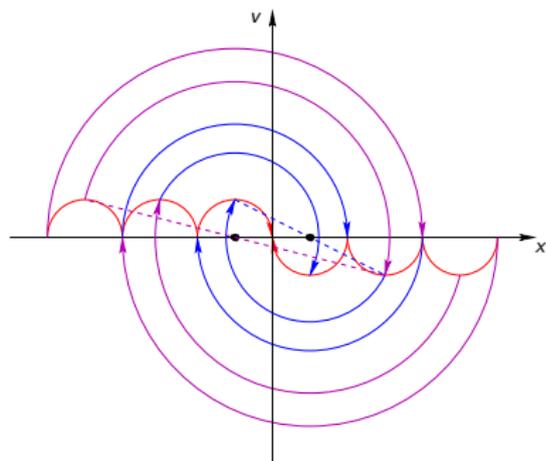
$$u(t) = -\text{signe}(p(t)^\dagger B) = -\text{signe}(p_v(t))$$

Il y a commutation chaque fois que la composante p_v change de signe, et **le contrôle temps-optimal est bang-bang**

Application : oscillateur harmonique (2)

- Calcul des trajectoires

- si u est constant, $(x(t) - u)^2 + v(t)^2 = cste$ et le point $(x(t), v(t))$ tourne dans le sens horaire autour du point $(u, 0)$
- si $u = 1$, les trajectoires sont des arcs de cercle centrés en $(1, 0)$
- si $u = -1$, les trajectoires sont des arcs de cercle centrés en $(-1, 0)$



- la courbe en rouge est la courbe de commutation

- points sur cercles bleus/violetés atteignent $(0, 0)$ en une/deux commutations
- dans l'espace des phases, on parcourt un demi-cercle entre deux commutations, car cela correspond au temps que met p_v pour changer de signe (cf. les lignes en pointillés)