MAP434 - Contrôle de modèles dynamiques

Principe du minimum de Pontryaguine

Alexandre Ern

ENPC - INRIA - X

amphi du mardi 16 avril 2019

Plan de la séance

- Systèmes de contrôle non-linéaires
- PMP : énoncé et commentaires
- Application au système LQ
- Application à un système non-linéaire : ruche d'abeilles
- Poly, chapitre 5

Systèmes de contrôle non-linéaires

- On considère le système de contrôle non-linéaire

$$\dot{x}_u(t) = f(t, x_u(t), u(t)),\ \forall t \in [0, T], \quad x_u(0) = x_0$$

  - $x_u : [0, T] \to \mathbb{R}^d$, $T > 0$ **fixé**, CI $x_0 \in \mathbb{R}^d$ **fixée**
  - $u : [0, T] \to U \subset \mathbb{R}^k$, **sous-ensemble fermé non-vide**
  - $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}^d$

- On cherche un contrôle optimal $\overline{u}$ qui minimise le critère

$$J(u) = \int_0^T g(t, x_u(t), u(t))\,\mathrm{d}t + h(x_u(T))$$

avec $g : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

Hypothèses sur la dynamique et le contrôle

- On suppose que
  a) $f \in C^0([0,T] \times \mathbb{R}^d \times U; \mathbb{R}^d)$ et f est C^1 p.r. à x
  b) $\exists C$, $|f(t,y,v)| \leq C(1+|y|+|v|)$, $\forall t \in [0,T]$, $\forall y \in \mathbb{R}^d$, $\forall v \in U$
  c) $\forall R > 0$, $\exists C_R$, $|\frac{\partial f}{\partial x}(t,y,v)| \leq C_R(1+|v|)$, $\forall t \in [0,T]$, $\forall y \in \overline{B}(0,R)$, $\forall v \in U$

  (C et C_R sont des constantes génériques indépendantes de (t,y,v), C_R dépendant du rayon R de la boule $\overline{B}(0,R)$; les valeurs de C et C_R peuvent changer à chaque utilisation)

- On considère des contrôles dans

$$\mathcal{U} = L^1([0,T]; U)$$

  - une hypothèse suffisante d'intégrabilité est U borné

- **(Lem. 5.1)** Ces hypothèses assurent, pour tout contrôle $u \in \mathcal{U}$, $\exists!$ trajectoire $x_u \in AC([0,T]; \mathbb{R}^d)$

Existence et unicité des trajectoires

- on applique CL (local, mesurable en temps) au système $\dot{x}(t) = F(t, x(t))$ avec $F(t, x) = f(t, x, u(t))$
  - F est mesurable en t, continue en x
  - F est **localement lipschitzienne** en x: $\forall t \in [0, T]$, $\forall R$, $\forall x_1, x_2 \in \overline{B}(0, R)$,

$$|F(t, x_1) - F(t, x_2)| \leq C_0(t)|x_1 - x_2|, \quad C_0(t) = \sup_{y \in \overline{B}(0,R)} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, y, u(t))\right|$$

    Comme $C_0(t) \leq C_R(1 + |u(t)|)$, on a bien $C_0 \in L^1([0, T]; \mathbb{R}_+)$ [hyp. c)]
  - F est **localement intégrable** : $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\forall t \in [0, T]$, [hyp. b)]

$$|F(t, x)| \leq C(1 + |x| + |u(t)|) \in L^1([0, T]; \mathbb{R}_+)$$

- Il faut encore s'assurer que la trajectoire maximale est bien définie sur $[0, T]$ (**pas d'explosion!**)
  - **lemme de Gronwall** : Soit $\psi, z : [0, T] \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues t.q.

$$\exists \alpha \geq 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad z(t) \leq \alpha + \int_0^t \psi(s) z(s) \, \mathrm{d}s$$

    Alors, $z(t) \leq \alpha e^{\int_0^t \psi(s) \, \mathrm{d}s}$, $\forall t \in [0, T]$
  - comme $x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s), u(s)) \, \mathrm{d}s$, on applique le lemme de Gronwall avec $z(t) = |x(t)|$, $\psi(t) \equiv C$, $\alpha = |x_0| + C(T + \|u\|_{L^1([0,T];\mathbb{R}^k)})$ [hyp. b)]

Hypothèses sur le critère

- On suppose que
  - d) $g \in C^0([0,T] \times \mathbb{R}^d \times U)$ et g est C^1 p.r. à x; de plus, $h \in C^1(\mathbb{R}^d)$
  - e) $\forall R > 0$, $|g(t,y,v)| \leq C_R(1+|v|)$, $\forall t \in [0,T]$, $\forall y \in \overline{B}(0,R)$, $\forall v \in U$
  - f) $\forall R > 0$, $|\frac{\partial g}{\partial x}(t,y,v)| \leq C_R(1+|v|)$, $\forall t \in [0,T]$, $\forall y \in \overline{B}(0,R)$, $\forall v \in U$
  - g) g et h sont minorées resp. sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d \times U$ et $\mathbb{R}^d$
- Pour tout $u \in \mathcal{U}$, le critère $J(u)$ est bien défini
  - la trajectoire associée x_u est bien définie et $x_u(t) \in \overline{B}(0, R(u))$, $\forall t \in [0,T]$
  - $t \mapsto g(t, x_u(t), u(t))$ est intégrable [hyp. e)]
- L'infimum de J sur $\mathcal{U}$ est bien fini [hyp. g)]
- Les hypothèses d) et f) nous seront utiles pour définir l'état adjoint

Principe du minimum

- **(Thm.)** **Si** $\overline{u} \in \mathcal{U} = L^1([0,T];U)$ est un contrôle optimal de trajectoire associée $\overline{x} = x_{\overline{u}} \in AC([0,T];\mathbb{R}^d)$, **alors** p.p. $t \in [0,T]$,

$$\overline{u}(t) \in \arg\min_{v \in U} H(t, \overline{x}(t), \overline{p}(t), v)$$

où $H : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}$ est le **Hamiltonien** t.q.

$$H(t,x,p,u) = p^\dagger f(t,x,u) + g(t,x,u)$$

et $\overline{p} \in AC([0,T],\mathbb{R}^d)$ est l'**état adjoint** t.q.

$$\frac{d\overline{p}}{dt}(t) = -\overline{A}(t)^\dagger \overline{p}(t) - \overline{b}(t),\ \forall t \in [0,T], \quad \overline{p}(T) = \frac{\partial h}{\partial x}(\overline{x}(T))$$

où $\overline{A}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ et $\overline{b}(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)) \in \mathbb{R}^d$

  - $\overline{p}$ sol. d'un système linéaire (à $\overline{x}$, $\overline{u}$ fixés) instationnaire rétrograde en temps
  - $\overline{b}$ est bien intégrable [hyp. f)] et $\overline{A} \in L^1([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$ [hyp. c)]

- Un triplet $(\overline{x}, \overline{p}, \overline{u})$ satisfaisant ces conditions est appelé une **extrémale**

Commentaires

- Le PMP ne fournit ici qu'une **condition nécessaire d'optimalité**
  - il ne dit rien sur l'existence d'un contrôle optimal
  - il ne fournit pas *a priori* de condition suffisante
  - en pratique, on considère les extrémales et on fait le tri ...
- si on multiplie g et h par un facteur $\lambda \in \mathbb{R}_+$, le nouveau critère est $J_\lambda = \lambda J$, le nouvel état adjoint $\overline{p}_\lambda = \lambda \overline{p}$, et le nouvel Hamiltonien $H_\lambda = \lambda H$; H_λ et H ayant les **mêmes minimiseurs**, l'amplitude de $\overline{p}$ n'apporte pas d'information

Exemple de non-existence

- $\dot{x}_u(t) = u(t)$, $x_0 = 0$, $T = 1$,

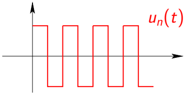
$$J(u) = \int_0^1 x_u(t)^2 + (u(t)^2 - 1)^2 \,\mathrm{d}t, \quad U = [-1{,}1]$$

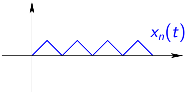
Alors, $\inf_{u \in \mathcal{U}} J(u) = 0$ et **il n'existe pas de contrôle optimal**

- on considère pour tout $n \in \mathbb{N}_*$ la suite minimisante de contrôles t.q.

$$u_n(t) = (-1)^k, \quad t \in [\tfrac{k}{2n}, \tfrac{k+1}{2n}[, \quad k \in \{0, \dots, 2n-1\}$$

Trajectoire associée x_n en dents de scie, $\|x_n\|_{L^\infty(0,1)} \leq \frac{1}{2n}$; d'où $J(u_n) \leq \frac{1}{4n^2}$





- si $\exists \overline{u} \in \mathcal{U}$ t.q. $J(\overline{u}) = 0 \Rightarrow \overline{x}(t) \equiv 0$ et $\overline{u}(t) \in \{-1, 1\}$, mais $\overline{u}(t) = \frac{d\overline{x}}{dt}(t) = 0$
- la difficulté est liée à la non convexité de J en u

Condition suffisante?

- Contre-exemple : $\dot{x}_u(t) = u(t)$, $x_0 = 0$, $T = 1$,

$$J(u) = \int_0^1 (x_u(t)^2 - 1)^2 \,\mathrm{d}t, \quad U = [-1{,}1]$$

  - $f(t, x, u) = u$, $g(t, x, u) = (x^2 - 1)^2$, $h = 0$
  - on cherche à minimiser la distance de $x(t)$ à l'ensemble $\{-1, 1\}$; les contraintes sur u font que $x(t) \in [-1{,}1]$, $\forall t \in [0, T] \Rightarrow$ il y a deux contrôles optimaux $\overline{u}_\pm(t) \equiv \pm 1$, $\forall t \in [0, T]$, et on a $\inf_{u \in \mathcal{U}} J(u) = \int_0^1 (t^2 - 1)^2 \,\mathrm{d}t = \frac{8}{15}$
  - si on considère $\overline{u}(t) \equiv 0$, la trajectoire associée est $\overline{x}(t) \equiv 0$ et l'état adjoint est $\overline{p}(t) \equiv 0$
  - le Hamiltonien à minimiser est $H(t, \overline{x}(t), \overline{p}(t), v) = (\overline{x}(t)^2 - 1)^2$, donc $\overline{u}(t) = 0$ satisfait bien la condition de minimisation; or $J(\overline{u}) = 1 > \frac{8}{15}$

- **(Prop. 5.12)** Le PMP fournit une **condition suffisante** d'optimalité si
  - $f(t, x, u) = A(t)x + B(t)u$, $A \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^{d \times d})$, $B \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^{d \times k})$
  - $\mathcal{U} = L^2([0, T]; U)$ où U est convexe fermé non-vide
  - g est convexe, différentiable en $(x, u) \in \mathbb{R}^d \times U$
  - h est convexe, différentiable en $x \in \mathbb{R}^d$

Retour sur le système LQ

- On a en posant $e_x = x - \xi$ ($\xi \in C^0([0,T];\mathbb{R}^d)$ trajectoire cible),

$$f(t,x,u) = Ax + Bu, \quad g(t,x,u) = \tfrac{1}{2}u^\dagger Ru + \tfrac{1}{2}e_x^\dagger Qe_x, \quad h(x) = \tfrac{1}{2}e_x^\dagger De_x$$

($Q, D \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symétriques **positives**, $R \in \mathbb{R}^{k\times k}$ symétrique **définie positive**)

- Il n'y a pas de contraintes sur le contrôle : $U = \mathbb{R}^k$

- Le Hamiltonien est

$$H(t,x,p,u) = p^\dagger(Ax + Bu) + \tfrac{1}{2}u^\dagger Ru + \tfrac{1}{2}e_x^\dagger Qe_x$$

On a donc (noter l'unicité du minimiseur)

$$\overline{u}(t) = \arg\min_{v\in\mathbb{R}^k}\left(\overline{p}^\dagger Bv + \tfrac{1}{2}v^\dagger Rv\right) \iff \overline{u}(t) = -R^{-1}B^\dagger\overline{p}(t)$$

- Comme $\frac{\partial f}{\partial x} = A$, $\frac{\partial g}{\partial x} = Qe_x$, $\frac{\partial h}{\partial x} = De_x$, on retrouve bien que

$$\frac{d\overline{p}}{dt}(t) = -A^\dagger\overline{p}(t) - Qe_{\overline{x}}(t),\ \forall t \in [0,T], \quad \overline{p}(T) = De_{\overline{x}}(T)$$

Système LQ avec contrainte

- L'ensemble des contrôles admissibles devient $L^2([0,T];U)$ où U est un sous-ensemble **convexe, fermé, non-vide** de $\mathbb{R}^k$
- Pour chaque $u \in L^2([0,T];U)$, $\exists!$ trajectoire $x_u \in AC([0,T];\mathbb{R}^d)$
- On cherche le **contrôle optimal** qui minimise dans $L^2([0,T];U)$ le critère

$$J(u) = \underbrace{\int_0^T u(t)^\dagger R u(t)\,\mathrm{d}t}_{J_R(u)} + \underbrace{\int_0^T e_{x_u}(t)^\dagger Q e_{x_u}(t)\,\mathrm{d}t + e_{x_u}(T)^\dagger D e_{x_u}(T)}_{=J_{QD}(u)}$$

  - $e_{x_u} = x_u - \xi$ où $\xi \in C^0([0,T];\mathbb{R}^d)$ est une **trajectoire cible**
- Existence et unicité du contrôle optimal $\overline{u} \in K$
  - $\Longrightarrow$ J est **fortement convexe** en u
  - $\Longrightarrow$ $K = L^2([0,T];U)$ est un sous-ensemble **convexe, fermé, non-vide** de $V = L^2([0,T];\mathbb{R}^k)$

Application du PMP

- Il existe un unique contrôle optimal $\overline{u} \in L^2([0,T];U)$
- On introduit **l'état adjoint** $\overline{p} \in C^1([0,T];\mathbb{R}^d)$ t.q.

$$\frac{d}{dt}\overline{p}(t) = -A^\dagger \overline{p}(t) - Qe_{\overline{x}}(t) \quad \forall t \in [0,T], \qquad \overline{p}(T) = De_{\overline{x}}(T)$$

  où $e_{\overline{x}} = \overline{x} - \xi$ et $\overline{x} = x_{\overline{u}}$
- On introduit le Hamiltonien $H : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}$ t.q.

$$H(t,x,p,u) = p^\dagger(Ax + Bu) + \tfrac{1}{2}u^\dagger Ru + \tfrac{1}{2}(x - \xi(t))^\dagger Q(x - \xi(t))$$

- Pour tout $t \in [0,T]$, $\overline{u}(t)$ est l'unique point de minimum de $H(t,\overline{x}(t),\overline{p}(t),v)$ sur U, i.e.

$$\overline{u}(t) = \arg\min_{v \in U} H(t,\overline{x}(t),\overline{p}(t),v)$$

  De manière équivalente

$$\overline{u}(t) = \arg\min_{v \in U} \left(v^\dagger B^\dagger \overline{p}(t) + \tfrac{1}{2}v^\dagger Rv \right)$$

  Si $U = \mathbb{R}^k$, on retrouve que $\overline{u}(t) = -R^{-1}B^\dagger \overline{p}(t)$

Preuve du PMP par inéquation d'Euler (1)

- La différentielle de J_R est immédiate à évaluer, celle de J_{QD} s'évalue à l'aide de l'état adjoint $\overline{p}$
- Pour tout $v \in K = L^2([0,T];U)$, on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\nabla J(\overline{u}), v - \overline{u})_V \\ &= (\nabla J_R(\overline{u}), v - \overline{u})_V + (\nabla J_{QD}(\overline{u}), v - \overline{u})_V \\ &= 2\int_0^T (v(t) - \overline{u}(t))^\dagger R\overline{u}(t) + (v(t) - \overline{u}(t))^\dagger B^\dagger \overline{p}(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

- De l'inéquation d'Euler dans $K \subset L^2([0,T];\mathbb{R}^k)$, on déduit que

$$\overline{u} = \arg\min_{v \in K} \mathcal{J}_{\overline{p}}(v), \quad \mathcal{J}_{\overline{p}}(v) = \int_0^T v(t)^\dagger B^\dagger \overline{p}(t) + \tfrac{1}{2} v(t)^\dagger R v(t)\,\mathrm{d}t$$

$\mathcal{J}_{\overline{p}}$ est fortement convexe, différentiable sur le convexe fermé non-vide K

  - $\mathcal{J}_{\overline{p}}$ est quadratique, la fonction $\overline{p}$ est ici fixée

Preuve du PMP par inéquation d'Euler (2)

- On pose pour tout $t \in [0, T]$,

$$u_\sharp(t) = \arg\min_{v \in U} \left(v^\dagger B^\dagger \overline{p}(t) + \tfrac{1}{2} v^\dagger R v \right)$$

De l'inéquation d'Euler dans $U \subset \mathbb{R}^k$, on déduit que

$$(v - u_\sharp(t))^\dagger R u_\sharp(t) + (v - u_\sharp(t))^\dagger B^\dagger \overline{p}(t) \geq 0, \quad \forall v \in U$$

- La fonction $u_\sharp(t)$ est lipschitzienne sur $[0, T]$
  - soit $t_1, t_2 \in [0, T]$; on a

$$(u_\sharp(t_2) - u_\sharp(t_1))^\dagger R u_\sharp(t_1) + (u_\sharp(t_2) - u_\sharp(t_1))^\dagger B^\dagger \overline{p}(t_1) \geq 0$$
$$(u_\sharp(t_1) - u_\sharp(t_2))^\dagger R u_\sharp(t_2) + (u_\sharp(t_1) - u_\sharp(t_2))^\dagger B^\dagger \overline{p}(t_2) \geq 0$$

  - En posant $\delta u_\sharp = u_\sharp(t_2) - u_\sharp(t_1)$, il vient

$$-(\delta u_\sharp)^\dagger R \delta u_\sharp + (\delta u_\sharp)^\dagger B^\dagger (\overline{p}(t_1) - \overline{p}(t_2)) \geq 0$$

  - comme R est **définie positive** (plus petite v.p. $\lambda_{\min}(R) > 0$), il vient

$$|u_\sharp(t_2) - u_\sharp(t_1)|_{\mathbb{R}^k} = |\delta u_\sharp|_{\mathbb{R}^k} \leq \lambda_{\min}(R)^{-1} \|B^\dagger\|_{\mathbb{R}^{k \times d}} |\overline{p}(t_2) - \overline{p}(t_1)|_{\mathbb{R}^d}$$

Conclusion

- La fonction $u_\sharp : [0,T] \to \mathbb{R}^k$ est mesurable, de carré sommable et à valeurs dans U; on a donc $u_\sharp \in K$
- Comme $\overline{u}(t) \in U$ p.p. $t \in [0,T]$, on a

$$\overline{u}(t)^\dagger B^\dagger \overline{p}(t) + \tfrac{1}{2}\overline{u}(t)^\dagger R\overline{u}(t) \geq u_\sharp(t)^\dagger B^\dagger \overline{p}(t) + \tfrac{1}{2}u_\sharp(t)^\dagger R u_\sharp(t)$$

- En intégrant de 0 à T, il vient

$$\mathcal{J}_{\overline{p}}(\overline{u}) \geq \mathcal{J}_{\overline{p}}(u_\sharp)$$

- Par unicité du minimiseur de $\mathcal{J}_{\overline{p}}$ sur K, on conclut que $\overline{u} = u_\sharp$

Modèle d'une ruche (1)

- On considère un modèle d'une ruche où la population d'abeilles $a(t)$ et celle des reines $r(t)$ évolue selon la dynamique

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{r}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha(1-u(t))-\beta)a(t) \\ \gamma u(t)a(t) \end{pmatrix}$$

  - le contrôle $u(t) \in [0,1]$ représente l'effort des abeilles pour fournir des reines
  - $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$ sont des paramètres t.q. $\alpha > \beta$; on pose

$$\varphi(v) = \alpha(1-v) - \beta, \quad v \in [0,1]$$

  - on suppose $a(0) > 0$; comme $\dot{a}(t) = \varphi(u(t))a(t)$, on a $a(t) > 0$, $\forall t \in [0,T]$
  - si $u(t) = 1$, $\dot{a}(t) = -\beta a(t) < 0$: la population d'abeilles décroît
  - si $u(t) = 0$, $\dot{a}(t) = (\alpha - \beta)a(t) > 0$: la population d'abeilles croît

- On cherche un contrôle optimal afin de maximiser la population de reines au temps T

$$J(u) = r(T)$$

Modèle d'une ruche (2)

- On applique le PMP avec $x = (a, r) \in \mathbb{R}^2$ et $f = (f_a, f_r)$

$$f(t, x, u) = \begin{pmatrix} \varphi(u)a \\ \gamma ua \end{pmatrix}, \quad g(t, x, u) = 0, \quad h(x) = -r$$

- Supposons que $\overline{u}(t)$ soit un contrôle optimal, de trajectoire $(\overline{a}(t), \overline{r}(t))$
  - comme $\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \varphi(\overline{u}) & 0 \\ \gamma\overline{u} & 0 \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$, l'état adjoint $\overline{p}(t) = (\overline{p}_a(t), \overline{p}_r(t))$ est t.q.

$$\frac{d\overline{p}_a}{dt}(t) = -\varphi(\overline{u}(t))\overline{p}_a(t) - \gamma\overline{u}(t)\overline{p}_r(t), \quad \frac{d\overline{p}_r}{dt}(t) = 0, \quad \overline{p}(T) = (0, -1)$$

  - on a donc $\overline{p}_r(t) \equiv -1$ et $\frac{d\overline{p}_a}{dt}(t) = -\varphi(\overline{u}(t))\overline{p}_a(t) + \gamma\overline{u}(t)$
  - en minimisant le Hamiltonien $(\overline{p}_a(t)f_a(t, \overline{x}(t), v) + \overline{p}_r(t)f_r(t, \overline{x}(t), v))$ sur $[0, 1]$, il vient, comme $\overline{a}(t) \neq 0$,

$$\overline{u}(t) = \arg\min_{v \in [0,1]} (-\overline{p}_a(t)\alpha - \gamma)v$$

    Le contrôle optimal est bang-bang et la fonction de commutation est $\psi(t) = -\overline{p}_a(t)\alpha - \gamma$
  - au temps final, $\psi(T) = -\gamma < 0$, d'où $\overline{u}(T) = 1$ (on fournit des reines!)

Modèle d'une ruche (3)

- **Étude des extrémales**
  - étude de l'état adjoint
    - si $\overline{p}_a(t) > -\frac{\gamma}{\alpha}$, $\overline{u} = 1$, et $\frac{d}{dt}\overline{p}_a(t) = \beta\overline{p}_a(t) + \gamma \geq 0$, i.e., $\overline{p}_a(t)$ est croissante
    - si $\overline{p}_a(t) < -\frac{\gamma}{\alpha}$, $\overline{u} = 0$, et $\frac{d}{dt}\overline{p}_a(t) = (\beta - \alpha)\overline{p}_a(t) \geq 0$, i.e., $\overline{p}_a(t)$ est encore croissante
    - $\overline{p}_a(t) = -\frac{\gamma}{\alpha}$ sur un intervalle de mesure positive est impossible car $\varphi(u)\frac{\gamma}{\alpha} + \gamma u = 1 - \frac{\beta}{\alpha} \neq 0$ pour tout u
  - détermination de la commutation
    - la fonction de commutation étant continue, $\exists t_* < T$ t.q. $\overline{u}(t) = 1$ sur $]t_*, T]$
    - sur $]t_*, T]$, $\frac{d\overline{p}_a}{dt}(t) = \beta\overline{p}_a(t) + \gamma$ et $\overline{p}_a(T) = 0$, d'où $\overline{p}_a(t) = -\frac{\gamma}{\beta}(1 - e^{\beta(t-T)})$
    - il y a commutation pour $\overline{p}_a(t_*) = -\frac{\gamma}{\alpha}$, i.e., $t_* = \frac{1}{\beta}\ln(1 - \frac{\beta}{\alpha}) + T < T$
    - **Cas 1.** $t_* < 0$ (T petit); le contrôle optimal est $\overline{u} \equiv 1$ sur $[0, T]$ (on fournit des reines en continu)
    - **Cas 2.** $t_* > 0$ (T suffisamment grand); le contrôle optimal est $\overline{u} \equiv 0$ sur $[0, t_*]$ et $\overline{u} \equiv 1$ sur $]t_*, T]$, on a $\overline{p}_a(t) = -\frac{\gamma}{\alpha}e^{(\beta-\alpha)(t-t_*)} < -\frac{\gamma}{\alpha}$ sur $[0, t_*]$