# MAP434 - Contrôle de modèles dynamiques

# PMP : preuves

**Alexandre Ern**

ENPC - INRIA - X

**amphi du mardi 23 avril 2019**

# Plan de la séance

- Rappel du PMP
- Esquisse de preuve
- Condition suffisante (cas convexe)
- Poly, sections 6.1 et 6.4

# Rappel : systèmes de contrôle non-linéaires

- On considère le système de contrôle non-linéaire

$$\dot{x}_u(t) = f(t, x_u(t), u(t)),\ \forall t \in [0,T], \quad x_u(0) = x_0$$

  - $x_u : [0,T] \to \mathbb{R}^d$, $T > 0$ **fixé**, CI $x_0 \in \mathbb{R}^d$ **fixée**
  - $u : [0,T] \to U \subset \mathbb{R}^k$, **sous-ensemble fermé non-vide**
  - $f : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}^d$

- On cherche un contrôle optimal $\overline{u} \in \mathcal{U} = L^1([0,T]; U)$ qui minimise le critère

$$J(u) = \int_0^T g(t, x_u(t), u(t))\,\mathrm{d}t + h(x_u(T))$$

  avec $g : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

- ... avec les hypothèses usuelles sur $f$, $g$ et $h$

# Principe du minimum

- **(Thm.)** **Si** $\overline{u} \in \mathcal{U}$ est un contrôle optimal de trajectoire associée $\overline{x} = x_{\overline{u}} \in AC([0,T];\mathbb{R}^d)$, **alors** en définissant l'**état adjoint** $\overline{p} \in AC([0,T],\mathbb{R}^d)$ t.q.

$$\frac{d\overline{p}}{dt}(t) = -\overline{A}(t)^\dagger \overline{p}(t) - \overline{b}(t),\ \forall t \in [0,T], \quad \overline{p}(T) = \frac{\partial h}{\partial x}(\overline{x}(T))$$

où $\overline{A}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ et $\overline{b}(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)) \in \mathbb{R}^d$, on a p.p. $t \in [0,T]$

$$\overline{u}(t) \in \arg\min_{v\in U} H(t,\overline{x}(t),\overline{p}(t),v)$$

où $H : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}$ est le **Hamiltonien** t.q.

$$H(t,x,p,u) = p^\dagger f(t,x,u) + g(t,x,u)$$

- Un triplet $(x,p,u)$ satisfaisant ces conditions est appelé une **extrémale**
- Le PMP ne fournit ici qu'une **condition nécessaire d'optimalité**
  - il ne dit rien sur l'existence d'un contrôle optimal
  - il ne fournit pas *a priori* de condition suffisante
  - en pratique, on considère les extrémales et on fait le tri ...

# Résolution numérique : méthode de tir

- Le PMP peut servir de base à une méthode numérique de résolution du problème de contrôle optimal : la **méthode de tir**
- On suppose qu'il est **facile de minimiser le Hamiltonien**, i.e., qu'on est capable d'évaluer la fonction

$$\zeta(t,x,p) := \arg\min_{v\in U} H(t,x,p,v), \quad \forall (t,x,p) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$$

  - on pose $z(t) = (x(t), p(t)) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$; on obtient une dynamique de la forme $\dot{z}(t) = F(t, z(t))$ avec $F : [0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$

$$F_x(t,(x,p)) = f(t,x,\zeta(t,x,p))$$
$$F_p(t,(x,p)) = -\tfrac{\partial f}{\partial x}(t,x,\zeta(t,x,p))^\dagger p - \tfrac{\partial g}{\partial x}(t,x,\zeta(t,x,p))$$

- Le principe de la méthode de tir est le suivant :
  - on se donne une CI $p_0 \in \mathbb{R}^d$ sur l'état adjoint; en intégrant le système ci-dessus, on obtient $p(T)$
  - on cherche $p_0 \in \mathbb{R}^d$ t.q. $\mathcal{F}(p_0) := p(T) - \frac{\partial h}{\partial x}(x(T)) = 0$
  - c'est un système de $d$ équations non-linéaires couplées dans $\mathbb{R}^d$, que l'on peut (tenter de) résoudre par la **méthode de Newton**

# En pratique ...

- Les deux principaux **avantages** de la méthode de tir sont
  - une très grande précision numérique
  - une efficacité même en grande dimension ($d \gg 1$)
- En revanche, les difficultés rencontrées avec la méthode de tir sont
  - un (très) petit domaine de convergence
  - la nécessité de vérifier après coup l'optimalité de la solution trouvée
  - la structure des commutations doit être connue à l'avance (la méthode de Newton exploitant la régularité de $\mathcal{F}$)
- On peut aussi utiliser une **méthode directe** qui **n'invoque pas le PMP**
  - on considère directement le problème de contrôle optimal
  - on se ramène en dimension finie : discrétiser en temps la dynamique (schéma d'Euler,...) et considérer p.ex. des contrôles constants par morceaux
  - on obtient ainsi un problème d'**optimisation non-linéaire sous contraintes en dimension finie**, qu'on peut résoudre de plusieurs façons (e.g., Sequential Quadratic Programming)
  - les méthodes directes sont de mise en œuvre simple; en revanche, elles sont souvent peu précises et deviennent très chères si $d$ est grand
  - on peut utiliser une méthode directe pour initialiser une méthode de tir

# Esquisse de preuve

- L'idée fondamentale de la preuve est de **tester l'optimalité** de $J(\overline{u})$ en faisant des **variations aiguille** (perturbation de $\overline{u}$ d'ordre un(!) sur un intervalle de temps de longueur $\delta \ll 1$)
- Soit $t \in [0, T[$ et $\delta \in ]0, T - t[$, $\delta \ll 1$; soit $v \in U$
- On pose $I_\delta := [t, t + \delta]$ et on considère le contrôle perturbé

$$L^1([0,T]; U) \ni u_\delta(t) = \begin{cases} \overline{u}(t), & \forall t \in [0,T] \setminus I_\delta \\ v, & \forall t \in I_\delta \end{cases}$$

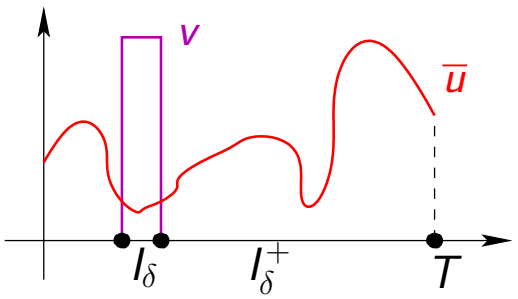
  On note $x_\delta = x_{u_\delta}$ la trajectoire associée au contrôle perturbé

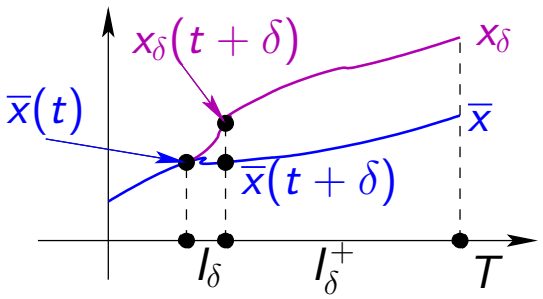
- On admet que p.p. $t \in [0, T[$, pour $\psi = f$ et $\psi = g$,

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{\delta} \int_{I_\delta} \psi(s, \overline{x}(s), \overline{u}(s)) \, \mathrm{d}s = \psi(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t))$$

  - de tels instants sont appelés **points de Lebesgue** de $\overline{u}$
  - par la suite, on considère que $t$ est un point de Lebesgue de $\overline{u}$

# Comparaison des trajectoires (1)




- Grâce à la continuité de $f$ en $(t,x)$ et à la propriété des points de Lebesgue, comme $x_\delta(t) = \overline{x}(t)$ et $x_\delta(s) = \overline{x}(s) + O(\delta)$, $\forall s \in [t,T]$ (stabilité du système dynamique), on a

$$x_\delta(t+\delta) = \overline{x}(t) + \int_{I_\delta} f(s, x_\delta(s), v)\,\mathrm{d}s = \overline{x}(t) + \delta f(t, \overline{x}(t), v) + o(\delta)$$

$$\overline{x}(t+\delta) = \overline{x}(t) + \int_{I_\delta} f(s, \overline{x}(s), \overline{u}(s))\,\mathrm{d}s = \overline{x}(t) + \delta f(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)) + o(\delta)$$

si bien que

$$x_\delta(t+\delta) - \overline{x}(t+\delta) = \delta(f(t, \overline{x}(t), v) - f(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t))) + o(\delta)$$

- On va maintenant comparer $x_\delta(s)$ et $\overline{x}(s)$ pour tout $s \in I_\delta^+ = [t+\delta, T]$

# Comparaison des trajectoires (2)

- On sait déjà que $x_\delta(s) - \overline{x}(s) = O(\delta)$, et on cherche à déterminer le terme d'ordre un en $\delta$
- On introduit la solution $y_\delta \in AC(I_\delta^+; \mathbb{R}^d)$ de

$$\dot{y}_\delta(s) = \overline{A}(s) y_\delta(s),\ \forall s \in I_\delta^+, \quad y_\delta(t+\delta) = f(t, \overline{x}(t), v) - f(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t))$$

où on rappelle que $\overline{A}(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(s, \overline{x}(s), \overline{u}(s))$

- On en déduit que

$$x_\delta(s) - \overline{x}(s) = \delta y_\delta(s) + \Phi_\delta(s),\ \forall s \in I_\delta^+, \quad \Phi_\delta = o(\delta) \text{ unif. sur } I_\delta^+$$

on a vu que $\Phi_\delta(t+\delta) = o(\delta)$ et $\dot{\Phi}_\delta(s) = \Psi_\delta(s) + \overline{A}(s)\Phi_\delta(s)$, $\forall s \in I_\delta^+$, où $\Psi_\delta(s) = o(\delta)$ unif. sur $I_\delta^+$ car $\Psi_\delta(s) = f(s, x_\delta(s), \overline{u}(s)) - f(s, \overline{x}(s), \overline{u}(s)) - \overline{A}(s)(x_\delta(s) - \overline{x}(s))$

- En conclusion,

$$x_\delta(s) - \overline{x}(s) = \delta y_\delta(s) + o(\delta) \text{ unif. sur } I_\delta^+$$

# Comparaison des critères

- Grâce à la comparaison des trajectoires, à la continuité de $g$ en $(t,x)$ et à la propriété des points de Lebesgue, il vient

$$
\begin{aligned}
J(u_\delta) - J(\overline{u}) &= \int_t^T g(s, x_\delta(s), u_\delta(s)) - g(s, \overline{x}(s), \overline{u}(s))\,\mathrm{d}s + h(x_\delta(T)) - h(\overline{x}(T)) \\
&= \int_{I_\delta} g(s, x_\delta(s), v) - g(s, \overline{x}(s), \overline{u}(s))\,\mathrm{d}s + \int_{I_\delta^+} g(s, x_\delta(s), \overline{u}(s)) - g(s, \overline{x}(s), \overline{u}(s))\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \delta \tfrac{\partial h}{\partial x}(\overline{x}(T))^\dagger y_\delta(T) + o(\delta) \\
&= \delta(g(t, \overline{x}(t), v) - g(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t))) + \delta \int_{t+\delta}^T \overline{b}(s)^\dagger y_\delta(s)\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \delta \tfrac{\partial h}{\partial x}(\overline{x}(T))^\dagger y_\delta(T) + o(\delta)
\end{aligned}
$$

où on rappelle que $\overline{b}(s) = \frac{\partial g}{\partial x}(s, \overline{x}(s), \overline{u}(s))$

- L'optimalité de $\overline{u}$ implique donc que

$$
0 \leq g(t, \overline{x}(t), v) - g(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)) + \int_{t+\delta}^T \overline{b}(s)^\dagger y_\delta(s)\,\mathrm{d}s + \frac{\partial h}{\partial x}(\overline{x}(T))^\dagger y_\delta(T) + o(1)
$$

# Introduction de l'état adjoint et conclusion

- L'état adjoint $\overline{p}$ t.q. $\frac{d\overline{p}}{dt}(s) = -\overline{A}(s)^\dagger \overline{p}(s) - \overline{b}(s)$ et $\overline{p}(T) = \frac{\partial h}{\partial x}(\overline{x}(T))$ nous permet d'éliminer la fonction $y_\delta$; on obtient

$$\int_{t+\delta}^{T} \overline{b}(s)^\dagger y_\delta(s)\,\mathrm{d}s + \frac{\partial h}{\partial x}(\overline{x}(T))^\dagger y_\delta(T) = \int_{t+\delta}^{T} (-\frac{d\overline{p}}{dt}(s) - \overline{A}(s)^\dagger \overline{p}(s))^\dagger y_\delta(s)\,\mathrm{d}s + \overline{p}(T)^\dagger y_\delta(T)$$

$$= \int_{t+\delta}^{T} -\frac{d}{dt}(\overline{p}(s)^\dagger y_\delta(s))\,\mathrm{d}s + \overline{p}(T)^\dagger y_\delta(T)$$

$$= \overline{p}(t+\delta)^\dagger y_\delta(t+\delta) = \overline{p}(t+\delta)^\dagger (f(t,\overline{x}(t),v) - f(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)))$$

- Comme $\overline{p}$ est continue, en faisant $\delta \downarrow 0$, on obtient

$$0 \leq g(t,\overline{x}(t),v) - g(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)) + \overline{p}(t)^\dagger (f(t,\overline{x}(t),v) - f(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)))$$

- En introduisant le Hamiltonien, on obtient la propriété escomptée

$$0 \leq H(t,\overline{x}(t),\overline{p}(t),v) - H(t,\overline{x}(t),\overline{p}(t),\overline{u}(t))$$

ce qui conclut la preuve car $v$ est arbitraire dans $U$

# Condition suffisante

- **(Prop. 5.12)** Le PMP fournit une **condition nécessaire et suffisante** d'optimalité si
  - $f(t,x,u) = A(t)x + B(t)u$, $A \in C^0([0,T];\mathbb{R}^{d\times d})$, $B \in C^0([0,T];\mathbb{R}^{d\times k})$
  - $\mathcal{U} = L^2([0,T];U)$ où $U \subset \mathbb{R}^k$ est convexe fermé non-vide
    (on travaille dans $L^2$ afin de se placer dans un cadre hilbertien)
  - $g$ est convexe, différentiable en $(x,u) \in \mathbb{R}^d \times U$
  - $h$ est convexe, différentiable en $x \in \mathbb{R}^d$

# Esquisse de preuve (1)

- La fonctionnelle $J$ est **convexe** en $u$ sur l'**ensemble convexe**

$$K := L^2([0,T];U)$$

- Soit $\overline{u} \in K$ un contrôle optimal (s'il existe ...) et $\overline{x} := x_{\overline{u}}$ la trajectoire associée

- D'après l'inéquation d'Euler, une CNS d'optimalité est

$$\langle J'(\overline{u}), v - \overline{u} \rangle_{L^2} \geq 0, \quad \forall v \in K$$

# Esquisse de preuve (2)

- On considère une perturbation du contrôle $v = \overline{u} + \delta u \in K$

$$J(\overline{u}) = \int_0^T g(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t))\,\mathrm{d}t + h(\overline{x}(T))$$

$$J(\overline{u} + \delta u) = \int_0^T g(t, x_{\overline{u}+\delta u}(t), \overline{u}(t) + \delta u(t))\,\mathrm{d}t + h(x_{\overline{u}+\delta u}(T))$$

- La perturbation de la trajectoire $\delta x(t) := x_{\overline{u}+\delta u}(t) - \overline{x}(t)$ est t.q.

$$\dot{\delta x}(t) = A(t)\delta x(t) + B(t)\delta u(t),\ \forall t \in [0, T], \quad \delta x(0) = 0$$

- Par des développements de Taylor, on montre que

$$\langle J'(\overline{u}), \delta u\rangle_{L^2} = \int_0^T \Big(\frac{\partial g}{\partial x}(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t))^\dagger \delta x(t) + \frac{\partial g}{\partial u}(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t))^\dagger \delta u(t)\Big)\,\mathrm{d}t + \frac{\partial h}{\partial x}(\overline{x}(T))^\dagger \delta x(T)$$

# Esquisse de preuve (3)

- On introduit l'état adjoint t.q. (ici, $\frac{\partial f}{\partial x}(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)) = A(t)$)

$$\dot{\overline{p}}(t)(t) = -A(t)^\dagger \overline{p}(t) - \frac{\partial g}{\partial x}(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)), \ \forall t \in [0, T], \quad \overline{p}(T) = \frac{\partial h}{\partial x}(\overline{x}(T))$$

- L'état adjoint permet de simplifier l'expression de la différentielle de $J$ :

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \Big( \frac{\partial g}{\partial x}(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t))^\dagger \delta x(t) \, \mathrm{d}t + \frac{\partial h}{\partial x}(\overline{x}(T))^\dagger \delta x(T) \\
&= \int_0^T \Big( -\dot{\overline{p}}(t) - A(t)^\dagger \overline{p}(t) \Big)^\dagger \delta x(t) \, \mathrm{d}t + \frac{\partial h}{\partial x}(\overline{x}(T))^\dagger \delta x(T) \\
&= \int_0^T \Big( -\dot{\overline{p}}(t)^\dagger \delta x(t) - \overline{p}(t)^\dagger \dot{\delta x}(t) + \overline{p}(t)^\dagger B(t) \delta u(t) \Big) \, \mathrm{d}t + \frac{\partial h}{\partial x}(\overline{x}(T))^\dagger \delta x(T) \\
&= \int_0^T (B(t)^\dagger \overline{p}(t))^\dagger \delta u(t) \, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

- En conclusion,

$$\langle J'(\overline{u}), \delta u \rangle_{L^2} = \int_0^T \Big( B(t)^\dagger \overline{p}(t) + \frac{\partial g}{\partial u}(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)) \Big)^\dagger \delta u(t) \, \mathrm{d}t$$

# Esquisse de preuve (4)

- On considère la fonctionnelle $\tilde{J} : K \to \mathbb{R}$ telle que

$$\tilde{J}(u) = \int_0^T \left( \overline{p}(t)^\dagger B(t) u(t) + g(t, \overline{x}(t), u(t)) \right) \mathrm{d}t$$

- L'expression précédente n'est rien d'autre que l'inéquation d'Euler dans $K = L^2([0,T]; U)$ pour la fonctionnelle convexe $\tilde{J}$

$$\overline{u} \in \arg\min_{u \in K} \tilde{J}(u)$$

- Cela veut dire que, p.p. $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
\overline{u}(t) &\in \arg\min_{v \in U} \overline{p}(t)^\dagger B(t) v + g(t, \overline{x}(t), v) \\
&= \arg\min_{v \in U} \overline{p}(t)^\dagger (A(t)\overline{x}(t) + B(t)v) + g(t, \overline{x}(t), v) \\
&= \arg\min_{v \in U} H(t, \overline{x}(t), \overline{p}(t), v)
\end{aligned}$$