MAP434 - Contrôle de modèles dynamiques

PMP : atteinte de cibles

Alexandre Ern

ENPC - INRIA - X

amphi du mardi 14 mai 2019

Plan de la séance

- Extension du PMP : atteinte de cible
- Exemple d'application : problème de Zermelo
- Poly, sections 6.2 et 6.3

Important : venir avec son portable demain en PC !!

Rappel : systèmes de contrôle non-linéaires

- On considère le système de contrôle non-linéaire

$$\dot{x}_u(t) = f(t, x_u(t), u(t)),\ \forall t \in [0,T], \quad x_u(0) = x_0$$

  - $x_u : [0,T] \to \mathbb{R}^d$, $T > 0$ **fixé**, CI $x_0 \in \mathbb{R}^d$ **fixée**
  - $u : [0,T] \to U \subset \mathbb{R}^k$, **sous-ensemble fermé non-vide**
  - $f : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}^d$

- On cherche un contrôle optimal $\overline{u} \in \mathcal{U} = L^1([0,T]; U)$ qui minimise le critère

$$J(u) = \int_0^T g(t, x_u(t), u(t))\,\mathrm{d}t + h(x_u(T))$$

  avec $g : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

- ... avec les hypothèses usuelles sur f, g et h

Rappel du PMP

- **(Thm.)** **Si** $\overline{u} \in \mathcal{U}$ est un contrôle optimal, **alors** en posant $\overline{x} := x_{\overline{u}} \in AC([0,T];\mathbb{R}^d)$ et définissant l'**état adjoint** $\overline{p} \in AC([0,T],\mathbb{R}^d)$ t.q.

$$\frac{d\overline{p}}{dt}(t) = -\overline{A}(t)^\dagger \overline{p}(t) - \overline{b}(t),\ \forall t \in [0,T], \quad \overline{p}(T) = \frac{\partial h}{\partial x}(\overline{x}(T))$$

où $\overline{A}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ et $\overline{b}(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)) \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\overline{u}(t) \in \arg\min_{v\in U} H(t,\overline{x}(t),\overline{p}(t),v) \qquad \text{p.p. } t \in [0,T]$$

où $H : [0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times U \to \mathbb{R}$ est le **Hamiltonien** t.q.

$$H(t,x,p,u) = p^\dagger f(t,x,u) + g(t,x,u)$$

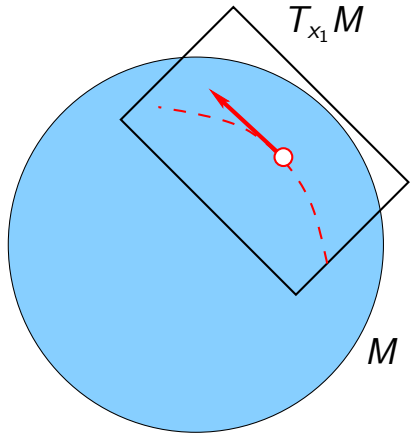
- Un triplet (x,p,u) satisfaisant ces conditions est appelé une **extrémale**
- Le PMP ne fournit ici qu'une **condition nécessaire d'optimalité**
  - il ne dit rien sur l'existence d'un contrôle optimal
  - il ne fournit pas *a priori* de condition suffisante
  - en pratique, on considère les extrémales et on fait le tri ...

Extension : atteinte de cible

- On rajoute la contrainte d'**atteindre une variété cible** M à l'instant $t = T$

$$x(T) \in M$$

  - M est une variété différentielle de classe C^1 de dimension $0 \leq d' \leq d$
  - en un point $x_1 \in M$, l'**espace tangent** $T_{x_1}M$ est l'ensemble des vecteurs vitesse des courbes tracées sur M passant par x_1
  - si $d' = 0$, $M = \{x_1\}$ **(cible ponctuelle)**, et $T_{x_1}M = \{0\}$
  - si $d' = d$, $M = \mathbb{R}^d$ **(contrainte de cible triviale)**, et $T_{x_1}M = \mathbb{R}^d$



- On cherche un contrôle optimal dans $\mathcal{U}_M := \{u \in L^1([0,T];U) \mid x_u(T) \in M\}$

PMP avec cible

- **Si** $\overline{u} \in \mathcal{U}_M$ est un contrôle optimal, **alors** en posant $\overline{x} := x_{\overline{u}} \in AC([0,T];\mathbb{R}^d)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ t.q. en définissant l'**état adjoint** $\overline{p} \in AC([0,T],\mathbb{R}^d)$ t.q.

$$\frac{d\overline{p}}{dt}(t) = -\overline{A}(t)^\dagger \overline{p}(t) - \lambda \overline{b}(t), \ \forall t \in [0,T]$$

où $\overline{A}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ et $\overline{b}(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)) \in \mathbb{R}^d$, et satisfaisant la **condition de transversalité** en temps final

$$\overline{p}(T) - \lambda \frac{\partial h}{\partial x}(\overline{x}(T)) \perp T_{\overline{x}(T)}M$$

on a $(p,\lambda) \neq (0,0)$ et

$$\overline{u}(t) = \arg\min_{v\in U} H(t,\overline{x}(t),\overline{p}(t),\lambda,v) \qquad \text{p.p. } t \in [0,T]$$

où $H : [0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+\times U \to \mathbb{R}$ est le **Hamiltonien** t.q.

$$H(t,x,p,\lambda,u) = p^\dagger f(t,x,u) + \lambda g(t,x,u)$$

- Un quadruplet $(\overline{x},\overline{p},\lambda,\overline{u})$ satisfaisant ces conditions est appelé une **extrémale**

Commentaires

- Comme $(p, \lambda) \neq (0, 0)$, deux cas peuvent se produire :
  - $\lambda \neq 0$: le PMP étant invariant par un facteur d'échelle positif sur $(\overline{p}, \lambda)$, on peut supposer que $\lambda = 1$; on dit que l'extrémale est **normale**
  - $\lambda = 0$: on a nécessairement $\overline{p} \not\equiv 0$; on dit que l'extrémale est **anormale**

- Lorsque $M = \mathbb{R}^d$ (contrainte de cible triviale), toute extrémale est normale
  - la condition de transversalité devient $\overline{p}(T) = \lambda \frac{\partial h}{\partial x}(\overline{x}(T))$ car $T_{\overline{x}(T)} M = \mathbb{R}^d$
  - si $\lambda = 0$, la dynamique de $\overline{p}$ montre que $\overline{p} \equiv 0$, ce qui est exclu

- Lorsque la variété M est de dimension $d' < d$, il y a "plus de possibilités" pour $\overline{p}(T)$, et il peut y avoir des **extrémales anormales**

- On peut remplacer la contrainte de cible par une pénalisation dans le critère en rajoutant un terme de la forme $\frac{1}{\epsilon} d(\overline{x}(T), M)^2$
  - on étudie les extrémales $(\overline{x}_\epsilon, \overline{p}_\epsilon, \overline{u}_\epsilon)$ du système pénalisé
  - si $\overline{p}_\epsilon$ reste borné quand $\epsilon \to 0^+$, l'extrémale du système pénalisé tend vers une extrémale normale du système contraint
  - si $|\overline{p}_\epsilon| \to +\infty$ quand $\epsilon \to 0^+$, on obtient une extrémale anormale

Cas où T n'est pas fixé

- Lorsque le temps T pour joindre la cible M **n'est pas fixé**, on a également une **condition de transversalité** au temps final T

$$\min_{v \in U} H(T, \overline{x}(T), \overline{p}(T), \lambda, v) = 0$$

  - Si le Hamiltonien est autonome ($\frac{\partial H}{\partial t} = 0$), $\overline{x}$, $\overline{p}$ de classe C^1, et $\overline{u}$ point critique de $H(\overline{x}(t), \overline{p}(t), \lambda, \cdot)$, alors **le Hamiltonien minimisé est nul en tout temps**

$$\mathcal{H}(t) := H(\overline{x}(t), \overline{p}(t), \lambda, \overline{u}(t)) = 0 \qquad \forall t \in [0, T]$$

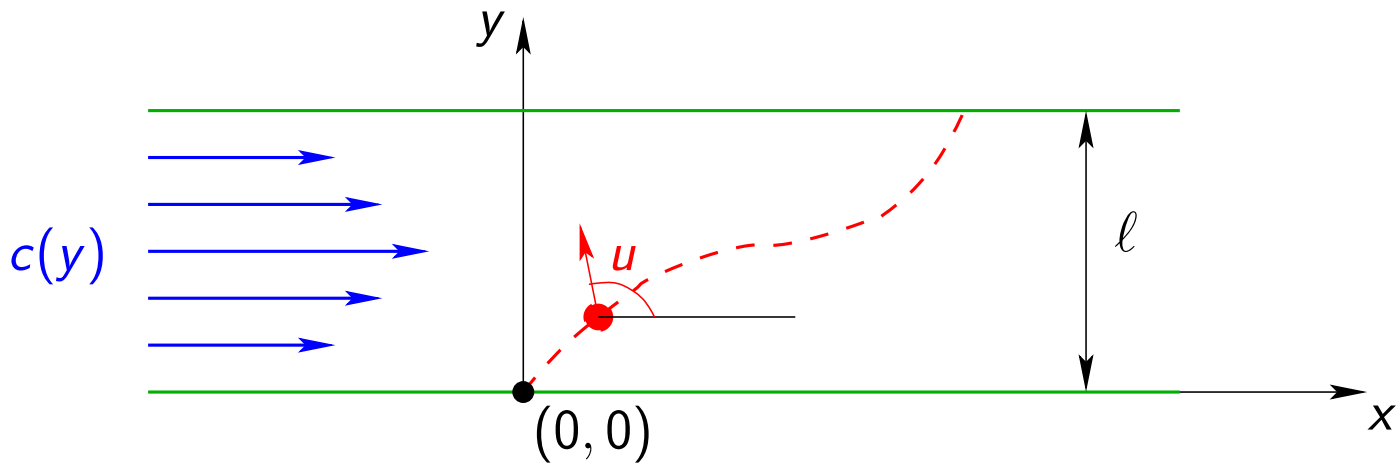
- **Exemple** : temps-optimalité pour un système linéaire autonome avec contrainte de cible ponctuelle $M = \{x_1\}$

$$f(t, x, u) = Ax + Bu, \quad g(t, x, u) = 1, \quad h(x) = 0$$

  - l'état adjoint satisfait $\frac{d\overline{p}}{dt}(t) = -A^\dagger \overline{p}(t)$, $\forall t \in [0, T]$, et la condition de transversalité sur $\overline{p}(T)$ est triviale ($\overline{p}(T) \perp 0$)
  - le Hamiltonien vaut $H(x, p, \lambda, u) = p^\dagger(Ax + Bu) + \lambda$ (il est autonome)
  - la condition de minimisation donne $\overline{u}(t) = \arg\min_{v \in U} \overline{p}(t)^\dagger Bv$

Problème de Zermelo

- Barque traversant un canal de largeur ℓ
  - le contrôle est l'angle u de la barque p.r. à l'axe horizontal représentant les deux berges
  - barque de vitesse v, courant de vitesse $c(y)$
  - on suppose que $c(y) > v$, $\forall y \in [0, \ell]$ **(hypothèse de courant fort)**



- On considère trois problèmes de contrôle optimal pour atteindre la berge opposée
  - minimiser le déport latéral
  - minimiser le temps de traversée
  - atteindre un point de la berge opposée en temps minimal

Minimisation du déport latéral (1)

- L'état de la barque est décrit par le couple $X = \binom{x}{y}$ donnant les coordonnées de la barque
- La trajectoire de la barque est régie par la dynamique suivante :

$$\dot{X}(t) = f(X(t), u(t)) = \begin{pmatrix} v\cos(u(t)) + c(y(t)) \\ v\sin(u(t)) \end{pmatrix}$$

  et la CI est $X(0) = \binom{0}{0}$
- Dans le problème de minimisation du déport latéral, le critère fait intervenir les fonctions

$$g(t, X, u) \equiv 0, \quad h(X) = x$$

  et on rajoute la contrainte de cible $y(T) = \ell$; le temps final est libre

Minimisation du déport latéral (2)

- Comme $\overline{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & c'(\overline{y}(t)) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\overline{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, l'état adjoint $\overline{p} = \begin{pmatrix} \overline{p}_x \\ \overline{p}_y \end{pmatrix}$ satisfait

$$\overline{p}_x = cste, \quad \frac{d\overline{p}_y}{dt}(t) = -c'(\overline{y}(t))\overline{p}_x$$

et la condition de transversalité sur $\overline{p}(T)$ donne

$$\begin{pmatrix} \overline{p}_x - \lambda \\ \overline{p}_y(T) \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \overline{p}_x = \lambda$$

- Le Hamiltonien vaut

$$H(X, p, \lambda, u) = (p_x \cos(u) + p_y \sin(u))v + p_x c(y)$$

  - la condition de minimisation nous donne le contrôle optimal si $|\overline{p}| \neq 0$

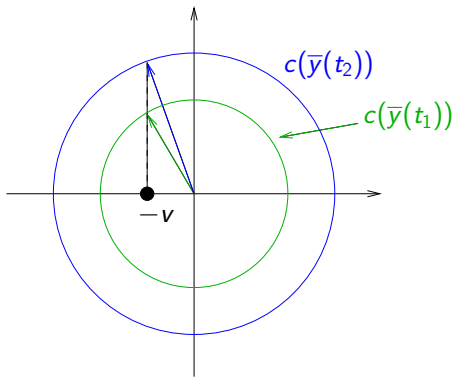
$$\cos(\overline{u}) = -\frac{\overline{p}_x}{|\overline{p}|}, \quad \sin(\overline{u}) = -\frac{\overline{p}_y}{|\overline{p}|}$$

  - le Hamiltonien minimisé vaut $H(\overline{X}(t), \overline{p}(t), \lambda, \overline{u}(t)) = -|\overline{p}(t)|v + \overline{p}_x c(\overline{y}(t))$
  - la condition de transversalité sur H donne $-|\overline{p}(T)|v + \overline{p}_x c(\overline{y}(T)) = 0$

Minimisation du déport latéral (3)

- Il n'y a pas d'extrémale anormale
  - si $\lambda = 0$, alors $\overline{p}_x = \lambda = 0$
  - donc $\overline{p}_y$ est constant et s'annule au temps final (transversalité sur H) $\Rightarrow \overline{p}_y$ serait également nul, ce qui est exclu $\Rightarrow$ nous pouvons supposer $\overline{p}_x = \lambda = 1$
  - par conséquent, on a toujours $\overline{p} \neq \binom{0}{0}$, si bien que le contrôle optimal est bien tel que $\cos(\overline{u}) = -\frac{\overline{p}_x}{|\overline{p}|}$, $\sin(\overline{u}) = -\frac{\overline{p}_y}{|\overline{p}|}$
- On a $|\overline{p}(t)| = \frac{c(\overline{y}(t))}{v}$, $\forall t \in [0, T]$
  - cette relation est satisfaite en T (transversalité sur H)
  - en dérivant par rapport au temps, comme $|\overline{p}| = (1 + \overline{p}_y^2)^{1/2}$, il vient $\frac{d|\overline{p}|}{dt} = \frac{\overline{p}_y}{|\overline{p}|}\frac{d\overline{p}_y}{dt} = \sin(\overline{u})c'(\overline{y}) = \frac{1}{v}\frac{d\overline{y}}{dt}c'(\overline{y}) = \frac{1}{v}\frac{dc(\overline{y})}{dt}$
- En conclusion, le contrôle optimal s'écrit comme un feedback

$$\cos(\overline{u}(t)) = -\frac{v}{c(\overline{y}(t))} \quad \forall t \in [0, T]$$



- L'angle de la trajectoire dans le repère cartésien est $\overline{u}(t) - \frac{\pi}{2}$

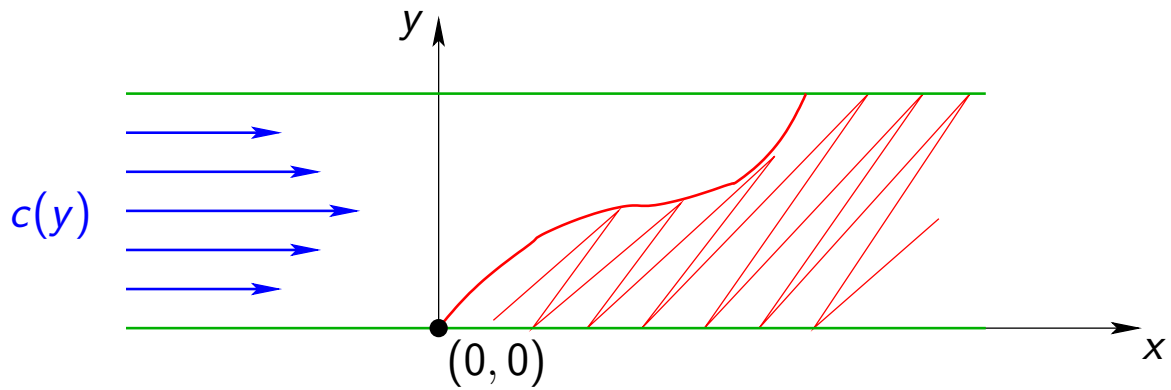
Commentaires

- **Stationnarité du Hamiltonien minimisé**
  - on a $H(X,p,\lambda,u) = p^\dagger f(X,u) + \lambda g(X,u)$ (ici $g=0$)
  - le contrôle optimal $\overline{u}$ étant régulier en temps, la minimisation du Hamiltonien implique $\frac{\partial H}{\partial u}(\overline{X}(t),\overline{p}(t),\lambda,\overline{u}(t)) = 0$
  - comme $\frac{d\overline{X}}{dt}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(\overline{X}(t),\overline{p}(t),\lambda,\overline{u}(t))$ et $\frac{d\overline{p}}{dt}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(\overline{X}(t),\overline{p}(t),\lambda,\overline{u}(t))$, il vient $\frac{d}{dt}H(\overline{X}(t),\overline{p}(t),\lambda,\overline{u}(t)) = 0$
  - le Hamiltonien minimisé étant nul en T (transversalité), on conclut que

$$H(\overline{X}(t),\overline{p}(t),\lambda,\overline{u}(t)) = 0, \quad \forall t \in [0,T]$$

  - cette propriété permet de montrer directement que $|\overline{p}(t)| = \frac{c(\overline{y}(t))}{v}$, $\forall t \in [0,T]$

- **Ensemble atteignable**
  - la résolution du problème de déport latéral permet de déterminer l'ensemble atteignable par tout contrôle



Minimisation du temps de traversée

- Le critère fait cette fois intervenir les fonctions $g(t, X, u) \equiv 1$, $h(X) \equiv 0$; on a toujours la contrainte de cible $y(T) = \ell$ et le temps final reste libre
- Les équations de l'état adjoint sont inchangées ($\overline{p}_x = cste$, $\frac{d\overline{p}_y}{dt} = -c'(\overline{y})\overline{p}_x$)
  - la condition de transversalité sur $\overline{p}$ est maintenant $\overline{p}_x(T) = 0$, d'où $\overline{p}_x \equiv 0$
  - donc $\overline{p}_y = cste$
- Le Hamiltonien vaut $H(X, p, \lambda, u) = (p_x \cos(u) + p_y \sin(u))v + p_x c(y) + \lambda$
  - $H(\overline{X}, \overline{p}, \lambda, u) = \overline{p}_y \sin(u)v + \lambda$ car $\overline{p}_x = 0$
  - $\overline{p}_y \neq 0$, sinon la cond. de transversalité sur H donnerait $\lambda = 0$
  - la commande optimale est t.q. $\sin(\overline{u}(t)) = 1$, i.e., $\overline{u}(t) = \frac{\pi}{2}$
  - "ne jamais naviguer contre le courant si on veut atteindre la rive opposée le plus vite possible"

Atteindre une cible en temps minimal

- La cible est $\binom{x_1}{\ell}$ où x_1 est situé en aval du point de déport minimal
  - on considère $g \equiv 1$ et $h \equiv 0$
  - les équations de l'état adjoint restent inchangées, mais la condition de transversalité sur $\overline{p}(T)$ devient triviale
  - le Hamiltonien est $H(X, p, \lambda, u) = (p_x \cos(u) + p_y \sin(u))v + p_x c(y) + \lambda$, le Hamiltonien minimisé est $-|\overline{p}(t)|v + \overline{p}_x c(\overline{y}(t)) + \lambda \equiv 0$, $\forall t \in [0, T]$

- **Extrêmale anormale** $(\lambda = 0)$
  - on obtient à nouveau $\cos(\overline{u}(t)) = -\frac{v}{c(\overline{y}(t))}$
  - c'est possible si x_1 est l'**abscisse du point de déport minimal**

- **Extrêmale normale** $(\lambda = 1)$
  - en utilisant le Hamiltonien minimisé et $\cos(\overline{u}(t)) = -\frac{\overline{p}_x}{|\overline{p}(t)|}$, il vient

$$\cos(\overline{u}(t)) = \frac{\overline{p}_x v}{1 - \overline{p}_x c(\overline{y}(t))}$$

    pourvu que $\overline{p}_x \in]-\infty, \frac{1}{v + c_\sharp}[$ où $c_\sharp = \max_{y \in [0,\ell]} c(y)$
  - on obtient une famille de courbes à un paramètre
  - lorsque $\overline{p}_x \to -\infty$, on tend vers l'extrémale anormale
  - la valeur $\overline{p}_x = 0$ correspond à la traversée en temps minimum