ECOLE POLYTECHNIQUE – Promotion 2014
Contrôle de modèles dynamiques (MAP434)

Examen classant du 8 juin 2016
Durée : 3 heures

Sujet proposé par X. Blanc

Le sujet comporte 4 pages et est composé de deux exercices indépendants. Une attention particulière sera apportée à la précision des réponses. Certaines questions sont plus difficiles et sont signalées par une astérisque (*).

Exercice I. Conduite automatique d'un véhicule ferroviaire

On considère un véhicule suivant une trajectoire rectiligne. On note x sa position, v sa vitesse, et a son accélération. On suppose qu'on peut contrôler la dérivée de l'accélération, et on note u le contrôle correspondant. Le système s'écrit donc

$$\dot{x}(t) = v(t), \quad \dot{v}(t) = a(t), \quad \dot{a}(t) = u(t), \quad u(t) \in [-1, 1]. \tag{1}$$

La donnée initiale est $x(0) = v(0) = a(0) = 0$. On souhaite déterminer un contrôle optimal pour amener le véhicule à la position $L > 0$ au temps $T > 0$ avec vitesse et accélération nulle : $x(T) = L$, $v(T) = 0$, $a(T) = 0$. La fonction coût utilisée sera

$$J(u) = \int_0^T |u(t)| dt.$$

Question 1. Le système (1) est-il contrôlable ?

Question 2. Dans le cas où le contrôle est une constante $u(t) = u_0$, résoudre le système (1).

Question 3. On suppose que u est un contrôle amenant à l'état final $x(T) = L$, $v(T) = 0$, $a(T) = 0$. Calculer $\int_0^T u(t)dt$, $\int_0^T tu(t)dt$, et $\int_0^T t^2 u(t)dt$.

Question 4. On note $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ l'état adjoint. Donner l'équation dont il est solution (on ne demande pas de préciser la donnée finale).

Question 5.
5.a. Enoncer le principe du minimum de Pontriaguine pour le contrôle optimal $\overline{u}(t)$, presque partout en la variable t. On admettra pour cela que le résultat du cours reste valable même si la fonction g définissant le coût n'est pas dérivable.
5.b. Démontrer que p_3 ne peut pas être constante égale à 1 ni constante égale à -1.
5.c. En déduire que presque partout en t, le contrôle optimal ne peut prendre que les valeurs $-1, 0, 1$.

Question 6. En utilisant la forme de $p_3(t)$, déterminer le nombre maximal de discontinuités du contrôle optimal.

Question 7.
7.a. (*) Démontrer que le contrôle optimal a au moins 4 sauts.
7.b. (*) Démontrer que le contrôle optimal prend successivement les valeurs $1, 0, -1, 0, 1$.

Question 8. On appelle $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \tau_4$ les temps de saut du contrôle optimal.
8.a. En utilisant un argument de symétrie (et en admettant que le contrôle optimal $\overline{u}$ est unique), démontrer que $\tau_4 = T - \tau_1$ et que $\tau_3 = T - \tau_2$.
8.b. Démontrer que $\tau_2 = \frac{T}{2} - \tau_1$.
8.c. En déduire que $\tau = \tau_1$ vérifie la relation $L = \frac{1}{4}\tau T\,(T - 2\tau)\,.$

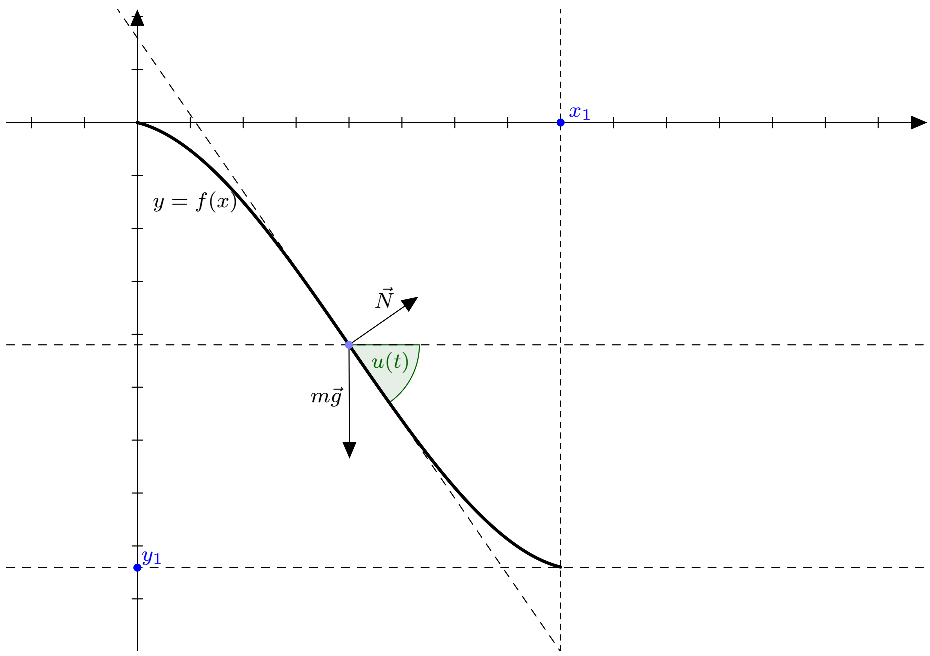

Figure 1: Glissière définie par la fonction $f \leq 0$.

Exercice II. La brachistochrone

On cherche la forme optimale d'une glissière (entre deux altitudes données) pour que, si une bille est lâchée sur cette glissière (à vitesse initiale nulle), elle arrive à l'autre extrémité en un minimum de temps. Ce problème s'appelle le problème de la courbe brachistochrone.

La glissière est modélisée par une courbe, définie par la fonction de classe C^1

$$f : [0, x_1] \longrightarrow \mathbb{R},$$

où $x_1 > 0$, f est à valeurs négatives, $f(0) = 0$ (altitude de départ) et $f(x_1) = y_1 < 0$ (altitude d'arrivée). On note $(x(t), y(t))$ les coordonnées de la bille à l'instant $t \geq 0$, $\vec{N}$ la force exercée par la glissière sur la bille, qui est donc normale à la courbe. La bille est par ailleurs soumise à la pesanteur $\vec{g}$. Enfin, on appelle $u(t)$ l'angle entre l'horizontale et la tangente à la courbe au point $(x(t), y(t))$. Voir la figure 1, sur laquelle la fonction u n'est pas a priori le contrôle optimal cherché.

Question 1. Déterminer le lien entre $u(t) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $f'(x(t))$. En admettant que x et y sont de classe C^1, en déduire que u est continue. Dans toute la suite, on utilisera u comme variable de contrôle du système.

Question 2. Les équations du mouvement de la bille s'écrivent

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = w(t)\cos(u(t)), & x(0) = 0, \quad x(T) = x_1, \\ \dot{y}(t) = -w(t)\sin(u(t)), & y(0) = 0, \quad y(T) = y_1, \\ \dot{w}(t) = g\sin(u(t)), & w(0) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Ici, $w(t)$ est l'amplitude de la vitesse projetée sur la tangente à la courbe.

2.a. Calculer $2gy(t) + w(t)^2$.

2.b. Si $y_1 > 0$, le point (x_1, y_1) est-il atteignable ? On supposera dans la suite que $y_1 \leq 0$.

2.c. Démontrer que le problème (2) peut se ramener au problème de temps minimal :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = w(t)\cos(u(t)), & x(0) = 0, \quad x(T) = x_1, \\ \dot{w}(t) = g\sin(u(t)), & w(0) = 0 \quad w(T) = w_1, \end{cases} \tag{3}$$

et préciser la valeur de w_1^2.

On considère à présent l'ensemble des contrôles admissibles, c'est-à-dire qui permettent d'atteindre le point (x_1, w_1). On admet que cet ensemble est non vide, et qu'il existe un contrôle optimal $u(t)$. Toutes les trajectoires seront supposées de classe C^1.

Question 3. Soit v tel que $u + \delta v$ est un contrôle admissible, où u est le contrôle optimal.
3.a. En supposant que, à l'ordre 1 en δ, la trajectoire associée à $u + \delta v$ est de la forme $(\tilde{x}, \tilde{w})$ avec $\tilde{x} = x + \delta\xi$ et $\tilde{w} = w + \delta\eta$, établir le système vérifié par (ξ, η).
3.b. On admet que le temps minimal $\tilde{T}$ tel que $(\tilde{x}, \tilde{w})$ atteint la cible vérifie $\tilde{T} = T + \delta\tau$ à l'ordre 1 en δ. En déduire $\xi(T)$ et $\eta(T)$ en fonction de $u(T), \tau, g, w_1$.

Question 4. Donner l'équation vérifiée par l'état adjoint noté $p = (p_x, p_w)$.

Question 5. On définit le Hamiltonien :

$$H(x, w, p_x, p_w, u) = p_x w \cos(u) + p_w g \sin(u) + 1, \tag{4}$$

et on suppose que $(p_x(T), p_w(T))$ vérifient $H(x(T), w(T), p_x(T), p_w(T), u(T)) = 0$. En déduire que

$$\tau = \int_0^T v(t) \left[g p_w(t) \cos(u(t)) - w(t) p_x(t) \sin(u(t))\right] dt.$$

Question 6. Démontrer que pour tout t, le contrôle $u(t)$ est point critique de l'application

$$u \mapsto H(x(t), w(t), p_x(t), p_w(t), u). \tag{5}$$

On admettra dans la suite qu'il s'agit d'un minimum.

Question 7. En supposant que $p_x(t)^2 w(t)^2 + g^2 p_w(t)^2 \neq 0$, déterminer $\cos(u(t))$ et $\sin(u(t))$ en fonction de $x(t), w(t), p_x(t), p_w(t)$.

Question 8. Dans cette question, on pose $\gamma(t) = p_x(t)^2 w(t)^2 + g^2 p_w(t)^2$.
8.a. Calculer $\frac{d}{dt}(p_x(t)w(t))$ et $\dfrac{d}{dt}(g p_w(t))$.
8.b. Démontrer que la fonction γ ne s'annule sur aucun sous-intervalle de $[0, T]$.
8.c. Calculer la quantité $V(t) = \inf\{H(x(t), w(t), p_x(t), p_w(t), u),\ u \in \mathbb{R}\}$ en fonction de $\gamma(t)$.
8.d. En déduire que γ est constante, et que

$$\cos(u(t)) = -p_x w(t), \quad \sin(u(t)) = -g p_w(t). \tag{6}$$

Question 9.
9.a. Démontrer que p_x ne s'annule pas.
9.b. Déterminer l'équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par w et la résoudre en utilisant p_x comme paramètre.
9.c. En déduire les expressions de $x(t)$ et $y(t)$ en fonction p_x g et t.
9.d. Démontrer que $p_x < 0$.

Question 10. Les courbes obtenues à la question précédente s'appellent des cycloïdes.
10.a. Dans le cas où $y_1 = 0$, calculer p_x et T.
10.b. Dans le cas général, démontrer que la trajectoire optimale a au plus un point tel que $\dot{y}(t) = 0$.
10.c. Démontrer la propriété suivante :

- Si $y_1 > -\dfrac{2x_1}{\pi}$, alors la courbe optimale admet exactement un point de minimum.
- Si $y_1 < -\frac{2x_1}{\pi}$, alors la courbe optimale est décroissante.

ECOLE POLYTECHNIQUE – Promotion 2014
Contrôle de modèles dynamiques (MAP434)

Examen classant du 8 juin 2016

Durée : 3 heures

Correction

Sujet proposé par X. Blanc

Exercice I. Conduite automatique d'un véhicule ferroviaire

Question 1. Le système s'écrit $\dot{X} = AX + Bu$, avec

$$X = \begin{pmatrix} x \\ v \\ a \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit donc que la matrice de Kalman s'écrit

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang 3, donc d'après le théorème du rang (Théorème 3.3.1 du polycopié), le système est contrôlable.

Remarque. *Le théorème 3.3.1 du polycopié suppose en fait que l'ensemble U des contrôles est $\mathbb{R}^k$ (ici $k = 1$), ce qui n'est pas le cas ici. En fait, la preuve de ce théorème s'adpate facilement au cas où U est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^k$, permettant ainsi de démontrer le résultat suivant : si* $\mathrm{rang}(C) = 3$, *alors*

$$\forall Y \in \mathbb{R}^3, \quad \exists T > 0, \quad \exists u \in L^1([0,T], U), \quad \textit{tel que} \quad X(T) = Y,$$

où $X = X(t)$ est la solution de $\dot{X} = AX + Bu$, $X(0) = 0$. Il s'agit d'une contrôlabilité en un sens plus faible que celle du théorème 3.3.1.

Le fait que l'ensemble des contrôles autorisés soit borné implique en fait que pour tout $T > 0$, certains états ne sont pas atteignables, car en intégrant l'équation on a facilement que

$$|a(t)| \leq t, \quad |v(t)| \leq \frac{t^2}{2}, \quad |x(t)| \leq \frac{t^3}{6}.$$

Question 2. On suppose que $u(t) = u_0$. On a alors $a(t) = u_0 t$ par intégration. On en déduit $v(t) = \frac{1}{2}u_0 t^2$, et donc $x(t) = \frac{1}{6}u_0 t^3$.

Question 3. La dernière ligne du sytème s'écrit $\dot{a}(t) = u(t)$. En l'intégrant de 0 à T, on obtient

$$\int_0^T u(t)dt = a(T) - a(0) = 0.$$

De même, en intégrant par partie et en utilisant l'équation $\dot{v}(t) = a(t)$, on a :

$$\int_0^T tu(t)dt = [ta(t)]_0^T - \int_0^T a(t)dt = Ta(T) - (v(T) - v(0)) = 0.$$

Enfin, toujours en intégrant par partie,

$$\int_0^T t^2 u(t)dt = \left[t^2 a(t)\right]_0^T - \int_0^T 2ta(t)dt = T^2 a(T) - \left([2tv(t)]_0^T - \int_0^T 2v(t)dt\right) = 2x(T) - 2x(0) = 2L.$$

Question 4. En utilisant les notations de la section 4.4 du polycopié, on a $f(X,t,u) = AX$, $g(X,t,u) = |u|$ et $h = 0$. L'équation adjointe est donc $\dot{p} = -A^t p$, c'est-à-dire $\dot{p}_1 = 0$, $\dot{p}_2 = -p_1$, $\dot{p}_3 = -p_2$.

Question 5.

5.a. Toujours avec les notations de la section 4.4 du polycopié, on a, d'après le théorème 4.3, que pour tout $t \in]0,T[$, $\overline{u}(t)$ minimise

$$\tilde{J}(u,t) = (AX(t) + Bu, p(t)) + |u| = v(t)p_1(t) + a(t)p_2(t) + up_3(t) + |u|.$$

Comme les deux premiers termes ne dépendent pas de u, on obtient donc que

$$\overline{u}(t) \in \operatorname{argmin}\left\{up_3(t) + |u|, u \in [-1,1]\right\}.$$

5.b. Supposons par l'absurde que $p_3(t) = 1$ pour tout $t \in [0,T]$. Alors d'après la question précédente $\overline{u}(t)$ minimise $u + |u|$ dans $[-1,1]$, donc $\overline{u} \leq 0$. Ceci est contradictoire avec la question 3, qui affirme que $\displaystyle\int_0^T t^2\overline{u}(t)dt = 2L > 0$. Supposons maintenant que p_3 est constante égale à -1. Alors le même raisonnement implique que $\overline{u} \geq 0$. Comme, toujours d'après la question 3, $\displaystyle\int_0^T u(t)dt = 0$, on obtient $\overline{u} = 0$, ce qui est encore en contradiction avec l'égalité $\displaystyle\int_0^T t^2\overline{u}(t)dt = 2L > 0$.

5.c. La fonction $p_3(t)$ est un polynôme de degré 2 en t car $\dddot{p}_3 = -\ddot{p}_2 = \dot{p}_1 = 0$. Considérons maintenant l'ensemble des points t tels que $p_3(t) = \pm 1$. D'après la question précédente, cet ensemble n'est pas $[0,T]$, donc il contient au plus 4 points. En particulier, il est de mesure nulle. Donc presque partout, on a $p_3(t) \notin \{-1,1\}$. Trois cas sont alors possibles :

1. Si $p_3(t) < -1$, alors l'application $u \mapsto |u| + p_3(t)u$ est strictement décroissante, donc $\overline{u}(t) = 1$.
2. Si $p_3(t) > 1$, alors l'application $u \mapsto |u| + p_3(t)u$ est strictement croissante, donc $\overline{u}(t) = -1$.
3. Si $-1 < p_3(t) < 1$, alors l'application $u \mapsto |u| + p_3(t)u$ est strictement décroissante sur $[-1,0]$ et strictement croissante sur $[0,1]$, donc $\overline{u}(t) = 0$.

Question 6. On a vu à la question précédente que p_3 ne peut passer par les valeurs ± 1 que 4 fois au plus. Donc $\overline{u}(t)$ a au plus 4 sauts.

Question 7.
7.a. Le contrôle $\overline{u}$ admet donc $0, 1, 2, 3$ ou 4 points de discontinuité. Remarquons tout d'abord que $\overline{u}$ ne peut pas être de signe fixe. En effet, si tel est le cas, alors a est monotone. Ce qui n'autorise $a(T) = 0$ que si $\overline{u} = 0$. Mais dans ce cas $x(T)$ ne peut être égal à $L > 0$.

Par ailleurs, comme p_3 est continue, $\overline{u}$ ne peut admettre que les sauts suivants : de 1 à 0, de 0 à 1, de 0 à -1 et de -1 à 0. Donc si elle a au plus un saut, elle est de signe fixe, ce qui est impossible d'après ce qu'on vient de voir. Elle a donc au moins 2 sauts.

Si elle a exactement 2 sauts, comme elle doit changer de signe, on est forcément dans la configuration où elle prend successivement les valeurs $(1, 0, -1)$ ou $(-1, 0, 1)$. Plaçons-nous dans le premier cas, et notons $\tau_1 T$ et $\tau_2 T$ les temps de saut, avec $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$. Alors la question 3 implique que $\tau_1 = 1 - \tau_2$ et que $\frac{1}{2}\tau_1^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \tau_2^2\right)$, d'où $\tau_1^2 = \tau_1$, ce qui est impossible. Le cas symétrique se traite de façon similaire.

Si maintenant $\overline{u}$ a exactement 3 sauts, comme p_3 est un polynôme de degré 2, il passe au plus 2 fois dans l'intervalle $[-1, 1]$, donc $\overline{u}$ ne peut pas prendre plus de deux fois la valeur 0. On est donc dans un des cas suivants, toujours en prenant en compte qu'elle doit changer de signe : $(0, 1, 0, -1)$ ou bien $(0, -1, 0, 1)$ ou bien $(1, 0, -1, 0)$ ou bien $(-1, 0, 1, 0)$. Les deux premiers cas se ramènent au cas à deux sauts, quitte à décaler le temps initial, car tant que $u = 0$ on a $x = v = a = 0$. Dans les deux derniers cas, on a, sur le dernier intervalle, une accélération constante, donc nulle puisque $a(T) = 0$. Donc la vitesse est constante également, donc nulle. Donc la position est constante sur ce dernier intervalle. Il s'agit donc d'un contrôle optimal sur l'intervalle $[0, T']$ où $T' < T$. Or on vient de voir qu'un contrôle optimal a au moins 3 sauts, et on aboutit à une contradiction.

On obtient donc exactement 4 sauts pour $\overline{u}$.

7.b. Comme on vient de le voir, les premières et dernières valeurs ne peuvent pas être 0, donc les valeurs successivement prises par le contrôle peuvent être $(1, 0, -1, 0, 1)$ ou bien $(-1, 0, 1, 0, -1)$, ou encore $(1, 0, 1, 0, -1)$ ou $(-1, 0, -1, 0, 1)$. Les deux derniers sont en fait exclus car ils impliquent que la courbe de p_3, qui est une parabole, passe d'abord deux fois en-dessous de -1 puis repasse au-dessus de 1 (ou le contraire pour le dernier cas). Ceci est impossible. Il reste donc à exclure le cas $(-1, 0, 1, 0, -1)$. Pour cela, raisonnons par l'absurde : la première valeur de u est -1. Alors a est décroissante sur les deux premiers intervalles, donc négative, donc v est négative elle aussi. Par ailleurs, sur les deux derniers intervalles, a est également décroissante, donc positive car nulle en T, donc v est croissante, donc négative. En particulier, au bord de l'intervalle où $u = 1$, on a $v \leq 0$. Comme de plus sur cet intervalle $\ddot{v} = u = 1 \geq 0$, v est convexe et elle y est donc négative. Donc $v \leq 0$ sur $[0, T]$, ce qui est contradictoire avec $x(T) = L$.

Question 8.
8.a. Soit (x, v, a) la solution associée au contrôle optimal $\overline{u}$. On pose

$$y(t) = L - x(T - t), \quad w(t) = v(T - t), \quad b(t) = -a(T - t).$$

On a alors

$$\dot{y} = w, \quad \dot{w} = b, \quad \dot{b} = \overline{u}(T - t).$$

On a également

$$y(0) = w(0) = b(0) = 0, \quad y(T) = L, \quad w(T) = b(T) = 0.$$

On a ainsi construit une nouvelle solution du problème. Par unicité du contrôle optimal, on a donc $\overline{u}(t) = \overline{u}(T - t)$. Ce qui implique que les temps de sauts sont symétriques par rapport à $T/2$. En particulier, $\tau_4 = T - \tau_1$ et $\tau_3 = T - \tau_2$.

8.b. En utilisant la question 3, on a $\int_0^T \overline{u}(t)dt = 0$, donc $\tau_1 + T - \tau_4 = \tau_3 - \tau_2$, d'où, d'après la question précédente, $2\tau_1 = T - 2\tau_2$, ce qui donne le résultat.
8.c. Les temps de saut successifs de $\overline{u}$ sont donc $\tau = \tau_1 < \frac{T}{2} - \tau < \frac{T}{2} + \tau < T - \tau$. On calcule donc :

$$
\begin{aligned}
2L = \int_0^T t^2 \overline{u}(t)dt = \int_0^\tau t^2 dt - \int_{\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}+\tau} t^2 dt + \int_{T-\tau}^{T} t^2 dt \\
= \frac{\tau^3}{3} - \frac{1}{3}\left(\left(\frac{T}{2}+\tau\right)^3 - \left(\frac{T}{2}-\tau\right)^3\right) + \frac{1}{3}\left(T^3 - (T-\tau)^3\right) \\
= \frac{\tau^3}{3} - \frac{2\tau}{3}\left[\left(\frac{T}{2}+\tau\right)^2 + \left(\frac{T}{2}+\tau\right)\left(\frac{T}{2}-\tau\right) + \left(\frac{T}{2}-\tau\right)^2\right] + \frac{\tau}{3}\left[T^2 + T(T-\tau) + (T-\tau)^2\right] \\
= \frac{\tau^3}{3} - \frac{2\tau}{3}\left[\frac{3T^2}{4} + \tau^2\right] + \frac{\tau}{3}\left[3T^2 - 3\tau T + \tau^2\right].
\end{aligned}
$$

En factorisant $\tau/3$ dans chaque terme, on a donc

$$
2L = \frac{\tau}{3}\left[\tau^2 - 2\left(\frac{3T^2}{4} + \tau^2\right) + 3T^2 - 3\tau T + \tau^2\right] = \frac{\tau}{3}\left[-\frac{3}{2}T^2 + 3T^2 - 3\tau T\right] = \tau T\left[\frac{T}{2} - \tau\right],
$$

ce qui donne le résultat.

Exercice II. La Brachistochrone

Question 1. La tangente à la courbe en $(x, f(x))$ a pour vecteur directeur $\vec{T} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix}$. Donc

$$
\cos(u(t)) = \frac{1}{\|\vec{T}\|}\vec{T} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x(t))^2}}, \quad \sin(u(t)) = \frac{1}{\|\vec{T}\|}\vec{T} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{f'(x(t))}{\sqrt{1 + f'(x(t))^2}},
$$

En supposant qu'on se ramène à $u(t) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a donc

$$
u(t) = \arctan(f'(x(t))).
$$

Comme f est de classe C^1 et qu'on a supposé x également C^1, on en déduit que u est continue.

Question 2.
2.a. On a $2g\dot{y} + 2w\dot{w} = -2gw\sin(u) + 2wg\sin(u) = 0$. Donc $2gy(t) + w^2(t)$ est constant. Comme $y(0) = w(0) = 0$, on a donc $2gy(t) + w(t)^2 = 0$, pour tout $t \geq 0$.
2.b. L'égalité précédente implique que $2gy(t) = -w(t)^2 \leq 0$ pour tout $t \geq 0$. Autrement dit, la bille, soumise uniquement à la pesanteur et à la réaction de la glissière, ne pourra jamais accéder à une altitude positive. Donc $y_1 > 0$ n'est pas atteignable.
2.c. D'après ce qui précède, $y(t) = -w(t)^2/2g$, et l'équation différentielle sur y est donc inutile. La condition finale implique que $w_1^2 = -2gy_1$, soit $w_1 = \pm\sqrt{-2gy_1}$.

Question 3.
3.a. Les équations vérifiées par $\tilde{x} = x + \delta\xi$ et $\tilde{w} = w + \delta\eta$ sont, à l'ordre 1 en δ,

$$
\dot{x} + \delta\dot{\xi} = (w + \delta\eta)\cos(u + \delta v) = w\cos(u) - \delta v w \sin(u) + \delta\eta\cos(u) + o(\delta),
$$

$$
\dot{w} + \delta\dot{\eta} = g\sin(u + \delta v) = g\sin(u) + g\delta\cos(u)v + o(\delta).
$$

Donc, en utilisant les équations vérifiées par x et w, et en développant en puissance de δ, on obtient

$$\dot{\xi} = \eta \cos(u) - vw \sin(u), \quad \dot{\eta} = gv \cos(u).$$

3.b. On a $\tilde{x}(T + \delta\tau) = \tilde{x}(\tilde{T}) = x_1$, et $\tilde{w}(T + \delta\tau) = \tilde{w}(\tilde{T}) = w_1$, c'est-à-dire

$$x(T + \delta\tau) + \delta\xi(T + \delta\tau) = x_1, \quad w(T + \delta\tau) + \delta\eta(T + \delta\tau) = w_1.$$

Donc, en supposant que toutes les fonctions en jeu sont de classe C^1, et en développant à l'ordre 1 en δ, on obtient

$$x(T) + \delta\tau\dot{x}(T) + \delta\xi(T) + o(\delta) = x_1, \quad w(T) + \delta\tau\dot{w}(T) + \delta\eta(T) + o(\delta) = w_1,$$

ce qui implique

$$\xi(T) = -\tau\dot{x}(T) = -\tau w_1 \cos(u(T)), \quad \eta(T) = -\tau\dot{w}(T) = -\tau g \sin(u(T)).$$

Question 4. On applique le théorème 4.3 du polycopié : l'état adjoint est solution de (4.4.6). Dans le cas présent, on a $f[(x, w), u] = \begin{pmatrix} w \cos u \\ g \sin u \end{pmatrix}$, et $g = 1$. Donc, en notant $X = \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}$,

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \begin{pmatrix} 0 & \cos u \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc l'équation adjointe s'écrit $\dot{p} = -\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^T p$, c'est-à-dire $\dot{p}_x = 0$ et $\dot{p}_w = -p_x \cos u$.

Question 5. Comme p est solution du problème adjoint, on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\xi(t)p_x(t) + \eta(t)p_w(t)\right) &= \dot{\xi}(t)p_x(t) + \dot{\eta}(t)p_w(t) + \xi(t)\dot{p}_x(t) + \eta(t)\dot{p}_w(t) \\ &= \left[\eta(t)\cos(u(t)) - v(t)w(t)\sin(u(t))\right] p_x(t) + gv(t)\cos(u(t))p_w(t) - \eta(t)\cos(u(t))p_x(t) \\ &= v(t)\left[gp_w(t)\cos(u(t)) - w(t)p_x(t)\sin(u(t))\right].\end{aligned}$$

On intègre ensuite cette égalité de 0 à T, et on a donc

$$\xi(T)p_x(T) + \eta(T)p_w(T) = \int_0^T v(t)\left[gp_w(t)\cos(u(t)) - w(t)p_x(t)\sin(u(t))\right] dt.$$

On remplace ensuite $\xi(T) = -\tau w_1 \cos(u(T))$ et $\eta(T) = -\tau g \sin(u(T))$ dans cette expression, ce qui donne

$$-\tau\left(w_1 \cos(u(T))p_x(T) + g\sin(u(T))p_w(T)\right) = \int_0^T v(t)\left[gp_w(t)\cos(u(t)) - w(t)p_x(t)\sin(u(t))\right] dt.$$

Le membre de gauche s'écrit aussi $-\tau\left(H(x(T), w(T), p_x(T), p_w(T), u(t)) - 1\right) = \tau$, ce qui donne le résultat.

Question 6. Si le contrôle est optimal, on a donc $\tau \geq 0$, pour tout v tel que $u + \delta v$ est admissible. Ce qui correspond à la caractérisation variationnelle du fait que u est un point de critique du Hamiltonien.

Question 7. D'après la question précédente, on a que le vecteur $(\cos(u(t)), \sin(u(t)))$ est solution de

$$\inf\left\{X \cdot \begin{pmatrix} p_x w \\ gp_w \end{pmatrix}, \quad X \in \mathbb{R}^2, \quad \|X\| = 1\right\}.$$

Or la solution de ce problème est le vecteur X du cercle unité qui est un multiple négatif de $\begin{pmatrix} p_x w \\ g p_w \end{pmatrix}$.
Ainsi,

$$\cos(u(t)) = \frac{-p_x(t)w(t)}{\sqrt{p_x(t)^2 w(t)^2 + g^2 p_w(t)^2}}, \quad \sin(u(t)) = \frac{-g p_w(t)}{\sqrt{p_x(t)^2 w(t)^2 + g^2 p_w(t)^2}}.$$

Notons que l'hypothèse de la question implique que le dénominateur n'est pas nul.

Question 8.

8.a. On calcule $\frac{d}{dt}(p_x w) = \dot{p}_x w + p_x \dot{w} = p_x g \sin(u)$. D'autre part, $\frac{d}{dt}(g p_w) = g \dot{p}_w = -g p_x \cos(u)$.

8.b. Si $\gamma = 0$ sur un intervalle $[\tau, \tau']$, alors $p_x w = 0$ et $p_w = 0$. En particulier, $\dot{p}_w = 0$, donc en utilisant l'équation adjointe, $p_x \cos(u) = 0$. D'après la question précédente, $p_x \sin(u) = 0$. Donc en mettant au carré et en sommant ces deux équations, on obtient $p_x = 0$ sur $[\tau, \tau']$. Comme de plus le système adjoint implique que p_x est une constante, on a donc $p_x(t) = 0$ pour tout t. Donc $\dot{p}_w = 0$. Et d'après ce qui précède, on a donc $p_w = 0$. Or ceci est contradictoire avec le fait que $H(x(T), w(T), p_x(T), p_w(T), u(T)) = 0$.

8.c. La fonction valeur s'écrit donc, comme on l'a vu précédemment,

$$V(t) = \inf\left\{p_x w \cos(u) + g p_w \sin(u) + 1, \quad u \in \mathbb{R}\right\} = \inf\left\{X \cdot \begin{pmatrix} p_x w \\ g p_w \end{pmatrix}, \quad X \in \mathbb{R}^2, \quad \|X\| = 1\right\} + 1$$

Si $\begin{pmatrix} p_x w \\ g p_w \end{pmatrix}$ n'est pas le vecteur nul, on a calculé le minimiseur à la question 7. Si ce vecteur est nul, on obtient que $V(t) = 1$. Ainsi, dans tous les cas, on a

$$V(t) = -\sqrt{p_x(t)^2 w(t)^2 + g^2 p_w(t)^2} + 1 = 1 - \sqrt{\gamma(t)}.$$

8.d. Par ailleurs, d'après la question 8.a,

$$\dot{\gamma}(t) = 2p_x(t)^2 w(t) g \sin(u(t)) - 2g^2 p_w(t) p_x(t) \cos(u(t)).$$

En remplaçant $\cos u$ et $\sin u$ par leur valeur, on a donc

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{2p_x(t)g}{\sqrt{\gamma(t)}}\left(-p_x(t)w(t)g p_w(t) + g p_w(t) p_x(t) w(t)\right) = 0.$$

La fonction γ est donc constante. Comme $\gamma(T) = 1$, on a donc $\gamma(t) = 1$ pour tout $t \in [0, T]$. En introduisant cette valeur dans les expressions de $\cos u$ et $\sin u$, on obtient donc

$$\cos(u(t)) = -p_x w(t), \quad \sin(u(t)) = -g p_w(t).$$

Question 9.

9.a. On sait que p_x est constant. Donc si $p_x = 0$, on a, puisque $\gamma = 1$, $g|p_w| = 1$. Donc en particulier $\dot{p}_w = 0$. Ceci implique $\cos(u(t)) = 0$, donc $\dot{x} = 0$. Donc $x(t) = x(0) = 0$, et on n'atteint jamais la cible $x_1 > 0$.

9.b. On a $\dot{w} = g \sin u = -g^2 p_w$. Donc $\ddot{w} = -g^2 \dot{p}_w = g^2 p_x \cos(u)$. Ainsi,

$$\ddot{w} + g^2 p_x^2 w = 0.$$

Comme de plus $w(0) = 0$, on a donc $w(t) = A \sin(g p_x t)$, pour un certain $A \in \mathbb{R}$. Comme $\gamma(0) = 1$, $g^2 p_w(0)^2 = 1$. Donc $p_w(0) = \pm\frac{1}{g}$. Or $\dot{w}(0) = g \sin(u(0)) = -g^2 p_w(0) = \pm g$. Ceci nous permet de calculer A : $g p_w A = \pm g$. On obtient donc

$$w(t) = \pm\frac{1}{p_x} \sin(g p_x t).$$

9.c. x vérifie

$$\dot{x} = w\cos(u) = -p_x w^2 = -\frac{1}{p_x}\sin^2(gp_x t) = -\frac{1}{2p_x}\left(1-\cos(2gp_x t)\right).$$

En intégrant, on a donc

$$x(t) = -\frac{t}{2p_x} + \frac{1}{4gp_x^2}\sin(2gp_x t).$$

De plus, $y = -\frac{1}{2g}w^2$, donc

$$y(t) = -\frac{1}{2gp_x^2}\sin^2(gp_x t) = -\frac{1}{4gp_x^2} + \frac{1}{4gp_x^2}\cos(2gp_x t).$$

9.d. On a $\dot{x} = w\cos(u) = -p_x w^2$. Donc $p_x < 0$, sinon on ne peut pas atteindre la cible $x_1 > 0$.

Question 10.
10.a. Si $y_1 = 0$, on a $y(T) = 0$, donc $\sin(gp_x T) = 0$. Ceci implique que $gp_x T = k\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$. Mais pour que T soit minimal, on doit avoir $|k| = 1$, donc $p_x = -\frac{\pi}{gT}$, puisque $p_x < 0$. En reportant cette valeur, on a donc

$$x(t) = \frac{gT}{2\pi}t - \frac{gT^2}{4\pi^2}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \quad y(t) = -\frac{gT^2}{2\pi^2}\sin^2\left(\frac{\pi t}{T}\right).$$

En imposant $x(T) = x_1$, on a donc $gT^2 = 2\pi x_1$, soit $T = \sqrt{\frac{2\pi x_1}{g}}$.
10.b. Si une trajectoire est optimale sur $[0,T]$, elle l'est également sur $[0,t_1]$ pour tout $t_1 \in]0,T[$, avec comme cible $x(t_1), y(t_1)$ (c'est le principe de programmation dynamique). Donc d'après la question précédente, toute courbe optimale est en fait un arc de cycloïde qui vérifie $y(t) < 0$ pour tout $t \in]0,T[$. Donc $\dot{y}$ ne pas s'annule qu'une fois au plus.
10.c. Supposons que la courbe admet un point de minimum. Soit t_0 le temps correspondant : on a $\dot{y}(t_0) = 0$, donc $2gp_x t_0 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. D'après la question précédente, on a nécessairement $k = -1$. Ainsi,

$$x(t_0) = \frac{t_0}{2p_x} = \frac{\pi}{4gp_x^2}, \quad y(t_0) = -\frac{1}{2gp_x^2}.$$

Ces équations correspondent à un paramétrage de la courbe $y = -2\frac{x}{\pi}$. Si la cible est au-dessus de cette droite, elle passe par un minimum unique. Si elle est en-dessous, $\dot{y}$ ne change pas de signe, et la courbe est monotone.