Contrôle de modèles dynamiques (MAP434)

X2015 – Contrôle classant – 08 juin 2017 – durée 3 heures

sujet proposé par Alexandre Ern

Le sujet se compose de deux exercices indépendants. Une attention particulière sera apportée à la précision des réponses ; il est recommandé de répondre avec soin plutôt que de s'éparpiller.

Exercice 1 : contrôle d'un réacteur chimique

On considère un réacteur chimique avec deux espèces dont les concentrations sont notées (x_1, x_2). On peut piloter le fonctionnement du réacteur par un contrôle u à valeurs dans $U = [0, 1]$ (on pourra penser à une température normalisée). Lorsque $u = 0$, l'espèce 1 est produite à taux α et rien ne se passe pour l'espèce 2 (sa concentration reste constante). Lorsque $u = 1$, l'espèce 1 est consommée à taux β et l'espèce 2 est produite à taux γ à partir de l'espèce 1. Les paramètres α, β, γ sont des réels strictement positifs. Lorsque le contrôle u prend des valeurs entre 0 et 1, le comportement du réacteur est décrit par interpolation linéaire entre les deux situations décrites ci-dessus. En résumé, le fonctionnement du réacteur est régi par les équations

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \big(\alpha(1-u(t)) - \beta u(t)\big)x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \gamma u(t) x_1(t), \end{aligned} \tag{1}$$

pour tout $t \in [0,T]$ où $T > 0$ fixé est la durée de fonctionnement, et on se donne une condition initiale (x_1^0, x_2^0) avec $x_1^0 > 0$ et $x_2^0 \geq 0$. On considère des contrôles dans $\mathcal{U} = L^\infty([0,T]; U)$.

1. Trajectoires. Contrôlabilité.
   a) Écrire (1) sous la forme $\dot{x}(t) = A(u(t))x(t)$ avec $A : U \to \mathbb{R}^{2\times 2}$. En déduire l'existence et l'unicité de la trajectoire pour tout $u \in \mathcal{U}$. Montrer enfin que $x_1(t) > 0$ pour tout $t \in [0,T]$.
   b) Écrire le système de contrôle linéarisé autour de la trajectoire associée au contrôle constant $u(t) \equiv \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, $\forall t \in [0,T]$ (on notera δu la perturbation du contrôle et δx la trajectoire perturbée). Est-ce que le réacteur est localement contrôlable autour de cette trajectoire ?

2. Contrôle optimal (PMP). Dans toute la suite de l'exercice, l'objectif est de trouver un contrôle optimal $\overline{u}$ de façon à *maximiser* $x_2(T)$.
   a) Écrire les équations sur l'état adjoint ; on le notera $\overline{p} = (\overline{p}_1, \overline{p}_2)$. Montrer que $\overline{p}_2$ est constant en temps et simplifier l'équation de $\overline{p}_1$.
   b) Écrire le Hamiltonien, identifier la fonction de commutation et montrer qu'il existe $t_* \in [0, T[$ tel que $\overline{u}(t) \equiv 1$, $\forall t \in]t_*, T]$.
   c) Durée de fonctionnement courte : montrer que le contrôle optimal est constant si $T \leq T_*$ où T_* est une durée de fonctionnement que l'on déterminera en fonction de α, β. Commenter en une phrase le mode de fonctionnement optimal du réacteur.
   d) Durée de fonctionnement longue. On suppose maintenant que $T > T_*$. Montrer que le contrôle optimal a exactement une commutation. Commenter en une phrase le mode de fonctionnement optimal du réacteur.

3. Contrôle optimal (HJB). On considère la fonction valeur $V(t, x_1, x_2)$ pour tous $t \in [0,T]$, $x_1 > 0$, $x_2 \geq 0$.
   a) Pour tout réel z, on note z_+ sa partie positive ($z_+ = z$ si $z \geq 0$ et $z_+ = 0$ sinon). Montrer que le Hamiltonien minimisé $\mathcal{H} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vaut

   $$\mathcal{H}(x, p) = \alpha x_1 p_1 - ((\alpha + \beta)p_1 - \gamma p_2)_+ x_1.$$

   Écrire l'équation HJB et la condition limite en T.

b) Écrire l'équation HJB et la condition en T pour la fonction $\hat{V}(t, x_1) = V(t, x_1, 0)$.

c) On suppose que au voisinage de T, on a $\frac{\partial \hat{V}}{\partial x_1} \geq -\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$. Déterminer localement la fonction $\hat{V}$. (Indication : on pourra chercher la fonction $\tilde{V}(t, x_1) = \hat{V}(t, x_1) + \frac{\gamma x_1}{\beta}$ sous forme séparée, produit d'une fonction de t par une fonction de x_1.)

d) On suppose que la durée de fonctionnement du réacteur satisfait $T > T_*$ (cf. question 2d). Résoudre globalement l'équation HJB et retrouver le contrôle optimal obtenu avec le PMP. On prendra soin de vérifier que la fonction $\hat{V}$ reste continûment différentiable en temps.

e) Programmation dynamique. Soit un entier $N \geq 1$, on pose $\Delta t = \frac{T}{N}$ et on considère les instants discrets $t_n = n\Delta t$ avec $0 \leq n \leq N$. On discrétise la dynamique du réacteur en considérant la suite d'états $x_n = (x_{1,n}, x_{2,n})$ telles que

$$x_{1,n+1} = F_1(x_{1,n}, u_n), \qquad F_1(x_1, u) = x_1 + \Delta t(\alpha(1-u) - \beta u)x_1,$$
$$x_{2,n+1} = F_2(x_n, u_n), \qquad F_2(x_1, x_2, u) = x_2 + \Delta t \gamma u x_1.$$

L'objectif est à nouveau de maximiser $x_{2,N}$ par le biais de contrôles optimaux $(\overline{u}_n)_{0 \leq n \leq N-1}$ à valeurs dans $[0, 1]$. Déterminer la fonction valeur $V_N(x_1, x_2)$ pour tout $x_1 > 0$ et $x_2 \geq 0$. Écrire l'équation de programmation dynamique permettant de déterminer V_n à partir de V_{n+1}. Déterminer V_{N-1} et le contrôle optimal $\tilde{u}_{N-1}$, puis V_{N-2} et $\tilde{u}_{N-2}$ sous l'hypothèse $1 > \Delta t(\alpha + \beta)$.

Exercice 2 : oscillateur harmonique

On considère le système de contrôle linéaire

$$\ddot{x}(t) + x(t) = u(t), \tag{2}$$

pour tout $t \in [0,T]$, $T > 0$, avec la condition initiale $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$. Ce système décrit le mouvement rectiligne d'un point matériel dont l'accélération résulte de la somme d'une force de rappel $(-x(t))$ et d'une force extérieure déterminée par le contrôle $(u(t))$.

1. Écrire (2) comme un système différentiel d'ordre un à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ (on notera $X(t) = (x(t), v(t))$ le vecteur d'état). Ce système est-il contrôlable ?
2. Vérifier que si le contrôle u est constant, les trajectoires sont des cercles dans le plan (x, v) de centre $(u, 0)$. Par la suite, il sera parfois commode de travailler en variables complexes en posant $z(t) = x(t) + iv(t)$ (i.e., on identifie le plan (x, v) à $\mathbb{C}$). Vérifier que
$$z(t) = e^{-it} z_0 + \int_0^t i e^{i(s-t)} u(s) \, \mathrm{d}s.$$
3. Ensemble atteignable. On considère des contrôles bornés à valeurs dans $U = [-1, 1]$, i.e., $u \in \mathcal{U} = L^\infty([0,T]; U)$. De plus, on fixe $T = \pi/2$ et la condition initiale est $X_0 = (0, 0)$.

a) Tracer dans le plan (x, v) les trajectoires associées au contrôle $u_1 \equiv 1$ sur $[0,T]$, puis au contrôle $u_2 \equiv -1$ sur $[0,T]$. Quels sont les points que l'on peut atteindre à partir de X_0 au temps T par un contrôle constant ?

b) Pourquoi l'ensemble atteignable $\mathcal{A}(T, X_0)$ est-il symétrique par rapport à l'origine ? Montrer que tout point de la frontière $\partial\mathcal{A}(T, X_0)$ est atteint par un contrôle bang-bang en au plus une commutation. (Indication : utiliser que $\mathcal{A}(T, X_0)$ est compact, convexe et introduire le vecteur adjoint $p = (p_x, p_v)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ tel que $\dot{p}(t) = Ap(t)$, $p(T) = p_T$ où $p_T \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur à préciser.)

c) Soit $\alpha \in [0, \pi]$. Trouver (en utilisant le PMP) le contrôle optimal minimisant le critère $J(u) = \cos(\alpha)x(T) + \sin(\alpha)v(T)$. Calculer le point d'arrivée de la trajectoire associée (utiliser la représentation complexe). En déduire l'ensemble $\mathcal{A}(T, X_0)$.

4. Cible en temps optimal. On suppose toujours que $\mathcal{U} = L^\infty([0,T];U)$ avec $U = [-1,1]$ et que la condition initiale est $X_0 = (0,0)$. On cherche maintenant à atteindre l'orbite circulaire cible $x(T)^2 + v(T)^2 = 4$ en un temps minimum que l'on notera T_*.
   a) Montrer que $T_* \leq \pi$.
   b) En appliquant le PMP, montrer que ceci est réalisé avec un contrôle bang-bang, soit avec une commutation (et l'extrêmale associée est normale) soit sans commutation (et l'extrêmale associée est anormale).
5. Système LQ. Dans cette question, les contrôles sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, on fixe $T = \pi$ et la condition initiale est un point quelconque $X_0 \in \mathbb{R}^2$ (i.e., un point $z_0 \in \mathbb{C}$). On souhaite minimiser dans $\mathcal{U} = L^2([0,T];\mathbb{R})$ le critère

$$J(u) = \int_0^T u(t)^2 \,\mathrm{d}t + x(T)^2 + v(T)^2.$$

   a) Exhiber les matrices R, Q et D permettant de formuler ce problème sous forme de système LQ. A-t-on existence et unicité du contrôle optimal $u_* \in \mathcal{U}$?
   b) On note $p = (p_x, p_v)$ l'état adjoint et on pose $q(t) = p_x(t) + ip_v(t)$, $\forall t \in [0,T]$. Exprimer $u_*(t)$ en fonction de $q(t)$ et de $\overline{q}(t)$ (la barre désigne le complexe conjugué).
   c) Exprimer $q(t)$ en fonction de t et de $z(T)$ où $z(t) = x(t) + iv(t)$ est la trajectoire associée au contrôle optimal u_*. Exprimer $z(t)$ en fonction de t, z_0, $z(T)$ et $\overline{z}(T)$, puis en déduire $z(T)$ en fonction de z_0. Écrire l'équation de la trajectoire optimale issue du point $z_0 = 1$ et la tracer dans le plan (x, v).
   d) Montrer que $q(t) = a(t)z(t) + (c(t) + id(t))\overline{z}(t)$ où a, c, d sont trois fonctions de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$ à exprimer en fonction de $\alpha(t) = 1 + \frac{1}{2}(\pi - t)$, $\beta(t) = \frac{1}{2}\sin(t)$ et $\cos(t)$. En déduire l'expression de la matrice $P(t) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ telle que $p(t) = P(t)X(t)$ et écrire le contrôle optimal en boucle fermée. Écrire l'équation de Riccati satisfaite par P et en déduire les équations différentielles satisfaites par les fonctions a, c et d.
   e) Écrire le Hamiltonien minimisé $\mathcal{H} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et en déduire l'équation HJB satisfaite par la fonction valeur $V(t, X)$ pour tout $t \in [0,T]$ et $X = (x, v) \in \mathbb{R}^2$. Quelle est l'unique solution régulière de l'équation HJB ? (l'exprimer à l'aide des fonctions a, c, d, x et v).

Corrigé

Exercice 1 : contrôle d'un réacteur chimique

1. Trajectoires. Contrôlabilité.

   a) On obtient
   $$A(u) = \begin{pmatrix} \alpha(1-u) - \beta u & 0 \\ \gamma u & 0 \end{pmatrix}$$
   Comme u prend ses valeurs dans le compact $[0,1]$, $A(u)$ est uniformément bornée en u. En écrivant le système de contrôle (1) sous la forme $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ avec $f(t,x,u) = A(u)x$, on en déduit que f est globalement Lipschitzienne par rapport à x. De plus, $f(t, 0, u(t)) = 0$ est intégrable en temps. On conclut grâce au théorème de Cauchy–Lipschitz (cas globalement Lipschitz, mesurable en temps). Enfin, si $x_1(t) = 0$ pour un certain $t \in [0,T]$, en invoquant l'unicité des trajectoires, on déduit que la trajectoire est $x_1(t) \equiv 0$ et $x_2(t) \equiv cste$. Ceci contredit l'hypothèse $x_1^0 > 0$.

   b) La trajectoire associée au contrôle $u(t) \equiv \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, $\forall t \in [0,T]$, est telle que x_1 est constant. Le système de contrôle linéarisé autour de cette trajectoire s'écrit
   $$\dot{\delta x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\gamma\alpha}{\alpha+\beta} & 0 \end{pmatrix} \delta x(t) + x_1^0 \begin{pmatrix} -\alpha-\beta \\ \gamma \end{pmatrix} \delta u(t).$$
   Il s'agit d'un système linéaire autonome dont la matrice de Kalman associée
   $$C = x_1^0 \begin{pmatrix} -\alpha-\beta & 0 \\ \gamma & -\gamma\alpha \end{pmatrix}$$
   est de rang deux. D'après le cours, on en déduit que (1) est localement contrôlable autour de la trajectoire associée au contrôle constant considéré.

2. Contrôle optimal (PMP).

   a) Le critère à minimiser est $J(u) = -x_2(T)$. En reprenant les notations du cours pour le critère, on obtient $g = 0$ et $h(x) = -x_2$. La condition finale sur l'état adjoint est donc
   $$\overline{p}(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
   En outre, l'évolution de l'état adjoint est régie par le système différentiel $\frac{d}{dt}\overline{p}(t) = -A(\overline{u}(t))^*\overline{p}(t)$, si bien que
   $$\frac{d}{dt}\overline{p}_1(t) = (\beta\overline{u}(t) - \alpha(1-\overline{u}(t)))\overline{p}_1(t) - \gamma\overline{u}(t)\overline{p}_2(t), \qquad \frac{d}{dt}\overline{p}_2(t) = 0.$$
   On en déduit que $\overline{p}_2(t) \equiv -1$, $\forall t \in [0,T]$, et en reportant dans l'équation pour $\overline{p}_1$, on obtient
   $$\frac{d}{dt}\overline{p}_1(t) = (\beta\overline{u}(t) - \alpha(1-\overline{u}(t)))\overline{p}_1(t) + \gamma\overline{u}(t).$$

   b) Le Hamiltonien $H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times U \to \mathbb{R}$ est
   $$H(x,p,u) = p_1(\alpha(1-u) - \beta u)x_1 + p_2\gamma u x_1 = \alpha p_1 x_1 - ((\alpha+\beta)p_1 - \gamma p_2)u x_1.$$
   D'après le PMP, on a
   $$\overline{u}(t) \in \arg\min_{v\in[0,1]} H(\overline{x}(t), \overline{p}(t), v)$$

Comme $\overline{p}_2 \equiv -1$ et $\overline{x}_1(t) > 0$ d'après la question 1a, il vient

$$\overline{u}(t) \in \arg\min_{v\in[0,1]}(-(\alpha+\beta)\overline{p}_1(t) - \gamma)v.$$

La fonction de commutation est

$$\psi(t) = -(\alpha+\beta)\overline{p}_1(t) - \gamma.$$

On a $\overline{u}(t) = 0$ si $\psi(t) > 0$ et $\overline{u}(t) = 1$ si $\psi(t) < 0$. Comme $\psi(T) = -\gamma < 0$ et que $\psi \in AC([0,T];\mathbb{R})$ (car $\overline{p}_1$ a au moins la même régularité), on en déduit l'existence de $t_* \in [0,T[$ tel que $\overline{u}(t) \equiv 1$, $\forall t \in]t_*,T]$.

c) Durée de fonctionnement courte. Sur l'intervalle $[t_*,T]$, on a

$$\frac{d}{dt}\overline{p}_1(t) = \beta\overline{p}_1(t) + \gamma \implies \overline{p}_1(t) = -\frac{\gamma}{\beta}\left(1 - e^{\beta(t-T)}\right).$$

La valeur critique provoquant un changement de signe dans la fonction de commutation est $\overline{p}_1(t_*) = -\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$; il vient

$$t_* = T - T_* \quad \text{avec} \quad T_* = \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right).$$

Si $T \leq T_*$, il n'y a pas de commutation et le contrôle optimal est constant égal à 1. Le réacteur fonctionne de façon à maximiser la production de l'espèce 2 en tout temps.

d) Durée de fonctionnement longue. Si $T > T_*$, alors $t_* > 0$ et on a $\psi(t_*) = 0$. Observons tout d'abord que la fonction de commutation ne peut s'annuler sur un intervalle de mesure strictement positive inclus dans $[0,t_*]$; en effet, on aurait sur cet intervalle $\overline{p}_1 = -\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$ et $0 = \frac{d}{dt}\overline{p}_1 = \gamma\overline{u} - \alpha\overline{p}_1 + (\alpha+\beta)\overline{u}\overline{p}_1 = \frac{\gamma\alpha}{\alpha+\beta}$, ce qui est une contradiction. De même, on ne peut pas avoir $\overline{p}_1 > -\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$ sur un intervalle de mesure strictement positive, car sinon on obtiendrait la solution trouvée à la question précédente qui est croissante et ne pourrait valoir $-\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$ en t_*. Comme $\overline{p}_1$ est continue, on a $\overline{p}_1(t) < -\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$ pour tout $t \in [0,t_*[$. D'où $\overline{u}(t) = 0$, si bien que $\frac{d}{dt}\overline{p}_1(t) = -\alpha\overline{p}_1(t) > 0$, ce qui montre que $\overline{p}_1$ sera inférieur à $-\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$ pour tous les instants antérieurs. Par suite, $\overline{p}_1(t) = -\frac{\gamma}{\alpha+\beta}e^{\alpha(t_*-t)}$ sur $[0,t_*]$. Le contrôle optimal est $\overline{u}(t) = 0$ pour $t \in [0,t_*[$, puis $\overline{u}(t) = 1$ pour $t \in [t_*,T]$: le fonctionnement du réacteur a deux phases, dans la première on maximise la production de l'espèce 1, puis à partir de l'instant de commutation t_*, on maximise la production de l'espèce 2 (deuxième phase).

3. Contrôle optimal (HJB).

a) Le calcul du Hamiltonien minimisé résulte de la question 2b. L'équation HJB s'écrit

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \alpha x_1\frac{\partial V}{\partial x_1} - x_1\left((\alpha+\beta)\frac{\partial V}{\partial x_1} - \gamma\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)_+ = 0,$$

et la condition finale est $V(T,x_1,x_2) = -x_2$.

b) On a $V(t,x_1,x_2) = -x_2 + V(t,x_1,0)$ car la condition initiale pour l'espèce 2 n'a pas d'influence sur la trajectoire de l'espèce 1 et cette condition initiale intervient simplement de manière additive dans la valeur en T de la concentration de l'espèce 2. Par suite, en posant $\hat{V}(t,x_1) = V(t,x_1,0)$, on obtient

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial t} + \alpha x_1\frac{\partial \hat{V}}{\partial x_1} - x_1\left((\alpha+\beta)\frac{\partial \hat{V}}{\partial x_1} + \gamma\right)_+ = 0,$$

et la condition finale $\hat{V}(T,x_1) = 0$.

c) En supposant que au voisinage de T, on a $\frac{\partial \hat{V}}{\partial x_1} \geq -\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$, l'équation HJB devient

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial t} - \beta x_1 \frac{\partial \hat{V}}{\partial x_1} - \gamma x_1 = 0.$$

Compte tenu de la condition en T, la solution est

$$\hat{V}(t, x_1) = -\frac{\gamma x_1}{\beta}\Big(1 - e^{\beta(t-T)}\Big).$$

d) On constate que

$$(\alpha+\beta)\frac{\partial \hat{V}}{\partial x_1} + \gamma = -\frac{\gamma(\alpha+\beta)}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} - e^{\beta(t-T)}\right)$$

ce qui montre que la solution $\hat{V}$ trouvée à la question précédente est valable sur $[t_*, T]$ où t_* est le temps de commutation trouvé à la question 2c qui est tel que $e^{\beta(t_*-T)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$. Lorsque $T > T_*$, on a vu que $t_* > 0$ et il nous reste à trouver la fonction $\hat{V}$ sur $[0, t_*]$. Cherchons-la sous l'hypothèse que $(\alpha+\beta)\frac{\partial \hat{V}}{\partial x_1} < -\gamma$. Dans ce cas, l'équation HJB devient

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial t} + \alpha x_1 \frac{\partial \hat{V}}{\partial x_1} = 0,$$

et comme la fonction valeur est continue, on a $\hat{V}(t_*, x_1) = -\frac{\gamma x_1}{\alpha+\beta}$. D'où

$$\hat{V}(t, x_1) = -\frac{\gamma x_1}{\alpha+\beta} e^{-\alpha(t-t_*)}.$$

On notera que la fonction $\hat{V}$ est continûment différentiable en temps en $t = t_*$ puisque

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial t}(t_*^+, x_1) = \frac{\gamma \alpha x_1}{\alpha+\beta} = \frac{\partial \hat{V}}{\partial t}(t_*^-, x_1).$$

On a donc obtenu l'unique solution régulière de l'équation HJB.

e) On a $V_N(x_1, x_2) = -x_2$. L'équation de programmation dynamique s'écrit

$$V_n(x_1, x_2) = \min_{v \in [0,1]} V_{n+1}(F_1(x_1, v), F_2(x_1, x_2, v)).$$

Pour $n = N-1$, il vient

$$\begin{aligned} V_{N-1}(x_1, x_2) &= \min_{v \in [0,1]} -F_2(x_1, x_2, v) \\ &= -x_2 + \gamma \Delta t \min_{v \in [0,1]} -v x_1 = -x_2 - \gamma \Delta t x_1, \end{aligned}$$

car $x_1 > 0$. Le contrôle optimal est donc $\tilde{u}_{N-1} = 1$, $\forall x_1 > 0$. Passons maintenant au calcul de V_{N-2} ; il vient

$$\begin{aligned} V_{N-2}(x_1, x_2) &= \min_{v \in [0,1]} -F_2(x_1, x_2, v) - \gamma \Delta t F_1(x_1, v) \\ &= -x_2 - \gamma \Delta t x_1 + \gamma \Delta t \min_{v \in [0,1]} -v x_1 - \Delta t(\alpha(1-v) - \beta v) x_1 \\ &= -x_2 - \gamma \Delta t(1 + \alpha \Delta t) x_1 + \gamma \Delta t \min_{v \in [0,1]} -v x_1 + \Delta t(\alpha+\beta) v x_1 \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse $1 > \Delta t(\alpha+\beta)$, il vient $\tilde{u}_{N-2} = 1$, $\forall x_1 > 0$, et

$$V_{N-2}(x_1, x_2) = -x_2 - (2\gamma \Delta t - \gamma \beta \Delta t^2) x_1.$$

Exercice 2 : oscillateur harmonique

1. On obtient $\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour la contrôlabilité, on utilise le critère de Kalman. La matrice

$$C = (B\ AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 2, ce qui montre que le système est contrôlable.

2. On constate que, comme u est supposé constant,

$$\frac{d}{dt}\Big((x(t)-u)^2 + v(t)^2\Big) = 2v(t)(x(t)-u) + 2v(t)(u-x(t)) = 0.$$

L'expression intégrale de z résulte de la formule de Duhamel. On a

$$X(t) = e^{tA}X_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)\,\mathrm{d}s.$$

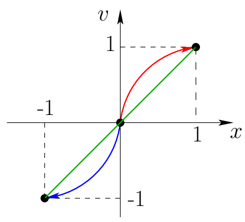
Or, $e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ et $e^{(t-s)A}B = \begin{pmatrix} \sin(t-s) \\ \cos(t-s) \end{pmatrix}$, si bien que

$$x(t) = \cos(t)x_0 + \sin(t)v_0 + \int_0^t \sin(t-s)u(s)\,\mathrm{d}s,$$
$$v(t) = -\sin(t)x_0 + \cos(t)v_0 + \int_0^t \cos(t-s)u(s)\,\mathrm{d}s.$$

En passant en variables complexes, on constate qu'on a bien $x(t) = \Re(z(t))$ et $v(t) = \Im(z(t))$.

3. Ensemble atteignable. On suppose que u est à valeurs dans $U = [-1,1]$, que $T = \pi/2$ et que $z_0 = 0$.

a) On obtient les trajectoires représentées ci-dessous.



L'ensemble des points atteignables en temps $T = \pi/2$ par un contrôle constant est, par linéarité, le segment reliant les points de coordonnées $(-1,-1)$ à $(1,1)$ dans le plan (x,v).

b) En changeant u en $-u$, on voit que l'ensemble atteignable $\mathcal{A}(T,X_0)$ est symétrique par rapport à l'origine. Soit maintenant $X(T) \in \partial\mathcal{A}(T,X_0)$; comme $\mathcal{A}(T,X_0)$ est fermé, $X(T)$ est bien atteint par une trajectoire associée à un contrôle $u \in \mathcal{U} = L^\infty([0,T];U)$. L'ensemble $\mathcal{A}(T,X_0)$ étant convexe d'après le cours, on en déduit qu'il existe un vecteur p_T non nul tel que

$$p_T^*(X(T) - Y(T)) \leq 0$$

où Y est la trajectoire associée à un contrôle quelconque $v \in \mathcal{U}$. On obtient donc

$$\int_0^T p_T^* e^{(T-s)A}Bv(s)\,\mathrm{d}s \geq \int_0^T p_T^* e^{(T-s)A}Bu(s)\,\mathrm{d}s.$$

On introduit le vecteur adjoint $p = (p_x, p_v)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ tel que $\dot{p}(t) = Ap(t)$, $p(T) = p_T$. Noter que le vecteur adjoint est de norme constante et qu'il tourne autour de l'origine dans le sens horaire à vitesse angulaire unité. La relation ci-dessus se récrit

$$\int_0^T p_v(s)v(s)\,\mathrm{d}s \geq \int_0^T p_v(s)u(s)\,\mathrm{d}s.$$

Cette relation montre que le contrôle u est bang-bang, avec $u(s) = -1$ si $p_v(s) > 0$ et $u(s) = 1$ si $p_v(s) < 0$, i.e.,

$$p_v(s)u(s) = \arg\min_{v \in U} p_v(s)v.$$

Le sous-ensemble $I_0 = \{s \in [0,T] \mid p_v(s) = 0\}$ est de mesure nulle car p tourne à vitesse angulaire unité, donc $u = \pm 1$ p.p. Comme $T = \pi/2$, le vecteur adjoint effectue un quart de tour pendant l'intervalle de temps $[0,T]$, si bien que le sous-ensemble I_0 est soit vide soit est réduit à un singleton. Ceci montre que le contrôle u a au plus une commutation.

c) Soit $\alpha \in [0, \pi]$. En utilisant le PMP, on considère une extrêmale. L'état adjoint $p = (p_x, p_v)$ satisfait

$$\dot{p}(t) = Ap(t), \qquad p(T) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix},$$

si bien que p est un vecteur unitaire tournant autour de l'origine dans le sens horaire à vitesse angulaire unité. Le Hamiltonien $H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times U \to \mathbb{R}$ vaut

$$H(X, p, u) = p^*(AX + Bu)$$

si bien que le principe du maximum conduit au contrôle optimal

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } p_v > 0 \\ 1 & \text{si } p_v < 0 \end{cases}$$

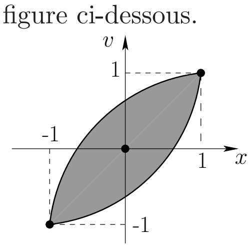
et le sous-ensemble $I_0 = \{s \in [0,T] \mid p_v(s) = 0\}$ est de mesure nulle car p tourne autour de l'origine à vitesse angulaire constante. Si $\alpha \in [0, \pi/2]$, p_v reste positif sur l'intervalle $[0,T]$, si bien que le contrôle optimal est constant égal à -1. La trajectoire optimale amène au point de coordonnées $(-1, -1)$. En revanche, si $\alpha \in [\pi/2, \pi]$, p_v change de signe à l'instant $t_\alpha = \frac{\pi}{2} - (\pi - \alpha) = \alpha - \frac{\pi}{2}$ et le contrôle optimal vaut 1 sur $[0, t_\alpha]$ puis -1 sur $[t_\alpha, T]$. Le point d'arrivée de la trajectoire associée se trouve facilement en utilisant l'expression intégrale de z obtenue à la question 2. Il vient

$$\begin{aligned} z(T) &= \int_0^{t_\alpha} ie^{i(s-T)}\,\mathrm{d}s - \int_{t_\alpha}^T ie^{i(s-T)}\,\mathrm{d}s \\ &= 2e^{i(t_\alpha - T)} - e^{-iT} - 1 = i - 1 - 2e^{i\alpha}, \end{aligned}$$

car $T = \pi/2$ et $t_\alpha - T = \alpha - \pi$. Lorsque α décrit l'intervalle $[\pi/2, \pi]$, le point $z(T)$ décrit dans le plan (x, v) un arc de cercle de centre $(-1, 1)$ et de rayon 2, reliant les points de coordonnées $(-1, -1)$ à $(1, 1)$. Or, pour chaque α, le point correspondant est situé sur l'intersection de $\mathcal{A}(T, X_0)$ avec la demi-droite de direction $-\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$. En conclusion, l'arc de cercle ci-dessus constitue la moitié de la frontière de $\mathcal{A}(T, X_0)$, l'autre moitié étant constituée de l'arc de cercle symétrique par rapport à l'origine. On a donc

$$\mathcal{A}(T, X_0) = \{(x, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + (v-1)^2 \leq 4,\ (x-1)^2 + (v+1)^2 \leq 4\}.$$

Cette ensemble est illustré sur la figure ci-dessous.



4. Cible en temps optimal.
   a) Il suffit de considérer le contrôle constant $u = 1$ ou $u = -1$; tous deux amènent à l'orbite circulaire cible en temps $T = \pi$. Donc $T_* \leq \pi$.
   b) On applique le PMP avec $g = 1$ et $h = 0$. La condition de transversalité sur l'état adjoint $p = (p_x, p_v)$ stipule que les vecteurs $(p_x(T), p_v(T))$ et $(x(T), v(T))$ sont colinéaires. Le Hamiltonien vaut
   $$H(X, p, \lambda, u) = p_x v - p_v x + p_v u + \lambda.$$
   Le vecteur adjoint tourne dans le sens horaire à vitesse angulaire unité et le PMP stipule que le contrôle optimal est $u_*(t) = -1$ si $p_v(t) > 0$ et $u_*(t) = 1$ si $p_v(t) < 0$; on a donc pour tout temps, $p_v(t)u_*(t) = -|p_v(t)|$. La condition de transversalité sur le Hamiltonien en temps final implique que
   $$-|p_v(T_*)| + \lambda = 0.$$
   Cas 1 : $\lambda \neq 0$ (extrêmale normale). On a donc $p_v(T_*) \neq 0$. Comme $T_* \leq \pi$, il y a au plus une commutation. Notons $t_c \geq 0$ l'instant de commutation (avec la convention que $t_c = 0$ s'il n'y a pas de commutation). En utilisant le résultat de la question 2, on obtient, avec $u_0 = \pm 1$ (la valeur précise n'a pas d'importance)
   $$z(T_*) = e^{-iT_*} u_0 \left(\int_0^{t_c} ie^{is}\,\mathrm{d}s - \int_{t_c}^{T_*} ie^{is}\,\mathrm{d}s \right) = e^{-iT_*} u_0 \left(2e^{it_c} - 1 - e^{iT_*} \right).$$
   Or, on constate que, comme $T_* \leq \pi$, $\cos(T_*/2) \geq 0$ et donc
   $$\begin{aligned} \left|2e^{it_c} - 1 - e^{iT_*}\right|^2 &= 6 - 4\cos(t_c) + 2\cos(T_*) - 4\cos(t_c - T_*) \\ &= 6 + 2\cos(T_*) - 8\cos(T_*/2)\cos(t_c - T_*/2) \\ &\leq 6 + 2\cos(T_*) - 8\cos(T_*/2) = 4(1 - \cos(T_*/2))^2, \end{aligned}$$
   ce qui montre que pour atteindre la cible ($|z(T_*)| = 2$), on doit avoir $T_* = \pi$. Dans ce cas, on a $|z(T_*)| = 2$ pour tout $t_c \in [0, \pi]$, et on doit avoir $t_c \in]0, \pi[$ afin que $p_v(T_*) \neq 0$.
   Cas 2 : $\lambda = 0$ (extrêmale anormale). On a donc $p_v(T_*) = 0$ et comme $T_* \leq \pi$, il n'y a pas de commutation. Les deux contrôles optimaux sont un contrôle constant égal à 1 ou à -1.
5. Système LQ.
   a) On obtient $R = 1$, $Q = 0$ (dans $\mathbb{R}^{2\times 2}$) et $D = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Comme $R > 0$, les résultats du cours nous permettent d'affirmer l'existence et l'unicité du contrôle optimal.
   b) Pour le système LQ, le contrôle optimal est donné par $u_*(t) = -R^{-1}B^*p(t) = -p_v(t)$. D'où $u_*(t) = -\frac{1}{2i}(q(t) - \overline{q}(t))$.
   c) D'après le cours, l'état adjoint $p(t)$ est tel que $\dot{p}(t) = -A^*p(t) = Ap(t)$ sur $[0,T]$ et $p(T) = X(T)$. En utilisant la représentation complexe, on obtient $\dot{q}(t) = -iq(t)$ et $q(T) = z(T)$, d'où
   $$q(t) = e^{-i(t-T)}z(T) = -e^{-it}z(T) \qquad \text{car } T = \pi.$$
   Concernant la trajectoire optimale, on a
   $$\begin{aligned} z(t) &= e^{-it}z_0 + \int_0^t ie^{i(s-t)}u_*(s)\,\mathrm{d}s \\ &= e^{-it}z_0 - \tfrac{1}{2i}\int_0^t ie^{i(s-t)}(q(s) - \overline{q}(s))\,\mathrm{d}s \\ &= e^{-it}z_0 - \tfrac{1}{2i}\int_0^t ie^{i(s-t)}(-e^{-is}z(T) + e^{is}\overline{z}(T))\,\mathrm{d}s \\ &= e^{-it}z_0 + \tfrac{1}{2}e^{-it}tz(T) - \tfrac{1}{2i}e^{-it}\overline{z}(T)\int_0^t ie^{2is}\,\mathrm{d}s \\ &= e^{-it}z_0 + \tfrac{1}{2}e^{-it}tz(T) - \tfrac{1}{2}\sin(t)\overline{z}(T). \end{aligned}$$

En $t = T = \pi$, il vient

$$z(T) = -\frac{1}{1+\frac{\pi}{2}} z_0.$$

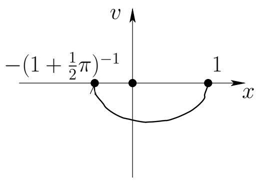
Pour $z_0 = 1$, $z(T)$ est réel et on obtient

$$z(t) = e^{-it}\frac{1+\frac{1}{2}(\pi - t)}{1+\frac{1}{2}\pi} + \frac{\frac{1}{2}\sin(t)}{1+\frac{1}{2}\pi},$$

ce qui donne comme trajectoire optimale

$$x(t) = (1+\tfrac{1}{2}\pi)^{-1}\Big(\cos(t)(1+\tfrac{1}{2}(\pi - t)) + \tfrac{1}{2}\sin(t)\Big),$$
$$v(t) = -(1+\tfrac{1}{2}\pi)^{-1}\sin(t)(1+\tfrac{1}{2}(\pi - t)).$$

La trajectoire optimale est esquissée ci-dessous ; noter que la vitesse v est minimale en $t_1 \in \,]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan(t_1) = 2(1+\frac{1}{2}(\pi - t_1))$ et que x s'annule en $t_2 \in \,]\frac{\pi}{2}, \pi[$ tel que $\tan(t_2) = -2(1+\frac{1}{2}(\pi - t_2))$.



d) On exprime d'abord $z(t)$ en fonction de $z(T)$ et de $\overline{z}(T)$:

$$z(t) = -e^{-it}\alpha(t)z(T) - \beta(t)\overline{z}(T),$$

où on a posé comme suggéré $\alpha(t) = 1 + \frac{1}{2}(\pi - t)$ et $\beta(t) = \frac{1}{2}\sin(t)$. En conjuguant, il vient

$$\overline{z}(t) = -e^{it}\alpha(t)\overline{z}(T) - \beta(t)z(T).$$

On élimine $\overline{z}(T)$ et on obtient (on vérifie que $(\alpha^2 - \beta^2)(t) > 0$, $\forall t \in [0,T]$)

$$z(T) = \frac{1}{(\alpha^2-\beta^2)(t)}\Big(-e^{it}\alpha(t)z(t) + \beta(t)\overline{z}(t)\Big).$$

En reportant dans l'équation de l'état adjoint, on conclut que

$$q(t) = \frac{1}{(\alpha^2-\beta^2)(t)}\Big(\alpha(t)z(t) - \beta(t)e^{-it}\overline{z}(t)\Big),$$

ce qui se récrit $q(t) = a(t)z(t) + (c(t) + id(t))\overline{z}(t)$ avec

$$a(t) = \frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}(t), \quad c(t) = -\cos(t)\frac{\beta}{\alpha^2-\beta^2}(t), \quad d(t) = \frac{2\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}(t).$$

La matrice $P(t) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ est donc telle que

$$P(t) = \begin{pmatrix} a+c & d \\ d & a-c \end{pmatrix}(t).$$

On notera que cette matrice est bien symétrique. Le contrôle optimal en boucle fermée s'écrit

$$u_*(t) = -d(t)x(t) - (a-c)(t)v(t).$$

Finalement, d'après le cours, l'équation de Riccati satisfaite par P est

$$\begin{aligned}\dot{P}(t) &= -A^*P(t) - P(t)A + P(t)BR^{-1}B^*P(t)\\ &= \begin{pmatrix} 2d + d^2 & -2c + d(a-c) \\ -2c + d(a-c) & -2d + (a-c)^2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

ce qui conduit aux équations différentielles

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \tfrac{1}{2}(a-c)^2 + \tfrac{1}{2}d^2,\\ \dot{c} &= 2d + \tfrac{1}{2}d^2 - \tfrac{1}{2}(a-c)^2,\\ \dot{d} &= -2c + d(a-c).\end{aligned}$$

e) Le Hamiltonien est $H(X,p,u) = p^*(AX+Bu)+u^2 = p_x v - p_v x + p_v u + u^2$. Le Hamiltonien minimisé est donc

$$\mathcal{H}(X,p) = H(X,p,-\tfrac{1}{2}p_v) = p_x v - p_v x - \frac{1}{4}p_v^2.$$

L'équation HJB est donc, d'après le cours,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + v\frac{\partial V}{\partial x} - x\frac{\partial V}{\partial v} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2 = 0,$$

et on a la condition finale $V(T,x,v) = x^2 + v^2$. D'après le cours, pour le système LQ, la fonction valeur est $V(t,x,v) = (x,v)P(t)(x,v)^*$ où $P(t)$ est solution de l'équation de Riccati. On a donc

$$V(t,x,v) = (a+c)(t)x^2 + 2d(t)xv + (a-c)(t)v^2.$$