Contrôle de modèles dynamiques (MAP434)
École Polytechnique – Contrôle classant
8 juin 2018 – durée 3 heures

sujet proposé par Xavier Blanc et Antonin Chambolle

Le sujet se compose de deux exercices indépendants. Le premier doit être rédigé sur les copies blanches, le deuxième sur les copies jaunes. Une attention particulière sera apportée à la précision des réponses ; il est recommandé de répondre avec soin plutôt que de s'éparpiller.

Exercice 1 : un voyage en fusée

On considère un véhicule spatial qui doit aller d'un point P_1 à un point P_2. On suppose qu'il suit une trajectoire rectiligne, et on note $x(t)$ l'abscisse le long de cette trajectoire, où t est le temps. On note $v(t)$ sa vitesse, et m sa masse qu'on suppose constante (dans un premier temps). La trajectoire est contrôlée par une poussée notée $u(t)$, qui sera le contrôle. Le système différentiel s'écrit donc

$$\begin{cases} \dot{x} = v, \\ m\dot{v} = u, \\ x(0) = v(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

On souhaite arriver au point P_2 au temps T, avec vitesse nulle : $x(T) = L$, $v(T) = 0$, où $L > 0$ est la distance P_1P_2.

1. Déterminer les valeurs de $\displaystyle\int_0^T u(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^T tu(t)dt$.

Coût quadratique. On suppose que la fonctionnelle de coût est donnée par $J(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T u(t)^2 dt$.

2. Reformuler le problème sous forme d'un problème d'optimisation sous les contraintes obtenues à la question **1.** Démontrer qu'il existe un unique contrôle optimal.

3. Ecrire l'équation adjointe et la résoudre. En déduire la valeur du contrôle optimal et celle du coût correspondant. Dans toute cette question, on précisera quel(s) résultat(s) du cours est(sont) appliqué(s).

Coût homogène. On suppose que la fonctionnelle de coût est donnée par $J(u) = \displaystyle\int_0^T |u(t)|dt$, et que la poussée ne peut pas être plus grande qu'une valeur maximale $u_{\max} > 0$ fixée : pour tout $t \in [0, T]$, $u(t) \in U := [-u_{\max}, u_{\max}]$. On supposera dans cette partie que $T > 2\sqrt{\frac{mL}{u_{\max}}}$.

4. En appliquant le principe du minimum de Pontryaguine, démontrer que le contrôle optimal u ne peut prendre que trois valeurs (que l'on déterminera).

5. Déterminer le nombre de temps de commutation du contrôle optimal.

6. Calculer le contrôle optimal.

7. Que se passe-t-il si $T < 2\sqrt{\frac{mL}{u_{\max}}}$?

Prise en compte de la perte de masse. On suppose toujours que le fonctionnelle de coût est donnée par $J(u) = \int_0^T |u(t)|dt$ et que le contrôle vérifie $u(t) \in [-u_{\max}, u_{\max}]$. On souhaite prendre en compte le fait que l'utilisation du carburant fait varier la masse de la fusée. Cette masse devient donc une inconnue du système, qui s'écrit maintenant

$$\begin{cases} \dot{x} = v, \\ m\dot{v} = u, \\ \dot{m} = -k|u|, \\ x(0) = v(0) = 0, \ m(0) = M > 0. \end{cases} \tag{2}$$

La constante $k > 0$ est fixée, et on suppose que $2\sqrt{\frac{ML}{u_{\max}}} < T < \frac{M}{ku_{\max}}$.

8. Démontrer que $m(t) > 0$ pour tout $t \in [0, T]$.

9. Ecrire le hamiltonien du système et le système adjoint. On notera $p = (p_x, p_v, p_m)^\dagger$ l'état adjoint.

10. Démontrer que, pour tout $t \in [0, T]$, $p_x(t) \neq 0$.

11. Démontrer que l'application $t \mapsto \frac{p_v(t)}{m(t)} + 1 - kp_m(t)$ est strictement monotone sur tout intervalle où $u(t) \geq 0$. Même question pour $t \mapsto \frac{p_v(t)}{m(t)} - 1 + kp_m(t)$ sur un intervalle où $u(t) \leq 0$.

12. Appliquer le principe du minimum de Pontryaguine (on vérifiera toutes les hypothèses nécessaires à son application) et en déduire que seules 3 valeurs (que l'on déterminera) sont possibles pour le contrôle optimal $u(t)$.

13. Démontrer que le contrôle optimal change de signe au plus une fois.

14. Déduire des questions précédentes qu'on peut toujours se ramener à un contrôle optimal qui a au plus deux temps de commutation.

15. Déterminer la forme du contrôle optimal (on ne demande pas de calculer les temps de commutation).

Exercice 2 : croissance d'une entreprise

Première étude. On considère une entreprise qui sur une période de N années réalise un profit annuel de x_k, $k = 0, \dots, N-1$. La direction choisit, chaque année, de distribuer $u_k \in [0, x_k]$ aux actionnaires et de réinvestir $x_k - u_k$ dans l'entreprise. L'investissement fait croitre la rentabilité de sorte que

$$x_{k+1} = x_k + \theta(x_k - u_k)$$

où $\theta > 0$ est fixé. Étant donné $x \geq 0$, on cherche à calculer la fonction valeur, sous l'hypothèse que le profit à l'année $k = 0$ est $x_0 = x$:

$$V(x) := \max \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} u_k : x_0 = x, x_{k+1} = x_k + \theta(x_k - u_k), 0 \leq u_k \leq x_k, k = 0, \dots, N-1 \right\}. \quad (3)$$

On introduit $V(x; k)$ la fonction valeur à l'année k, $0 \leq k \leq N$ qui exprime le gain des actionnaires entre les années k et $N-1$ si $x_k = x$:

$$V(x; k) = \max \left\{ \sum_{l=k}^{N-1} u_l : x_k = x, x_{l+1} = x_l + \theta(x_l - u_l), 0 \leq u_l \leq x_l, l = k, \dots, N-1 \right\} \quad (4)$$

On a donc $V(x; 0) = V(x)$, et on convient que $V(x; N) = 0$.

1. Montrer que les problèmes (3) et (4) admettent un maximiseur.

2. Montrer que V satisfait un principe de programmation dynamique, permettant d'exprimer $V(\cdot, k)$ en fonction de $V(\cdot, k+1)$.

3. Montrer que $V(x, k) = \alpha_k x$, pour un coefficient $\alpha_k \geq 0$ strictement décroissant. On donnera une relation de récurrence rétrograde pour calculer α_k, qu'on exprimera pour tout $k = 0, \dots, N-1$.

4. Détailler la stratégie optimale $(u_k)_{k=0}^{N-1}$.

Cas d'une utilité concave générale. On considère maintenant une fonction continue, concave, strictement croissante $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et on définit l'utilité totale par $\sum_{k=0}^{N-1} f(u_k)$. La fonction valeur est maintenant obtenue comme solution du problème :

$$V(x) := \max \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} f(u_k) : x_0 = x, x_{k+1} = x_k + \theta(x_k - u_k), 0 \leq u_k \leq x_k, k = 0, \dots, N-1 \right\}. \quad (5)$$

On définit comme précédemment $V(x; k)$ (en remplaçant u_l par $f(u_l)$ dans la somme dans l'expression (4)). On cherche à montrer que si l'on pose $\bar{k} := N - 1 - \lfloor 1/\theta \rfloor$ (où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x, soit le plus grand entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq x$), alors pour $k \geq \bar{k}$, le contrôle est donné par $u_k = x_k$, tandis que $u_k < x_k$ pour $k < \bar{k}$.

5. Ecrire le principe de programmation dynamique vérifié par V.

6. Montrer de deux façons différentes que $x \mapsto V(x; k)$ est strictement croissante pour tout $k = 1, \dots, N-1$: une fois à partir de (5), l'autre en utilisant le principe de programmation dynamique.

7. Vérifier que $V(x, N-1) = f(x)$. En écrivant $x \in [u, x + \theta(x-u)]$ comme une combinaison linéaire de u et $x + \theta(x-u)$ et en utilisant la concavité de f montrer par récurrence que tant que $k \geq \bar{k}$,

$$V(x;k) = (N-k)f(x)$$

et que le contrôle correspondant est donné par $u_l = x_l$, $l = k, \ldots, N-1$ (où $x_k = x$ et $x_{l+1} = x_l + \theta(x_l - u_l)$ est la suite qui réalise $V(x;k)$).

8. En supposant f dérivable, montrer que pour $k = \bar{k} - 1$, on doit avoir $u_k < x_k$.
(*Indication :* On rappelle qu'au point t de maximum sur un intervalle $[a, b]$ d'une fonction ϕ dérivable, on doit avoir $\phi'(t) = 0$ si $t \in]a, b[$, $\phi'(t) \geq 0$ si $t = b$, $\phi'(t) \leq 0$ si $t = a$.)

9. Pour conclure, on veut montrer que pour tout $k = 0, \ldots, \bar{k} - 1$, $u_k < x_k$. Si ce n'est pas vrai, alors il existe $k \leq \bar{k} - 2$ tel que que $u_k = x_k$ et $u_{k+1} < x_{k+1}$. Observons que dans ce cas $x_{k+1} = x_k + \theta(x_k - u_k) = x_k$. Déduire de la question **5.** un principe de programmation dynamique exprimant $V(x;k)$ en fonction de la fonction valeur à l'année $k+2$, $V(\,\cdot\,; k+2)$, et de deux contrôles u et v (l'un pour passer de k à $k+1$ et l'autre de $k+1$ à $k+2$). En déduire une contradiction et conclure.

10. On suppose que f est strictement concave. Montrer que le contrôle optimal est unique.

Corrigé

Exercice 1 : un voyage en fusée

1. On intègre l'équation $\dot{v} = u$ de 0 à T, et on a, puisque $v(0) = v(T) = 0$,

$$0 = mv(T) - mv(0) = \int_0^T u(t)dt.$$

De même, en utilisant les conditions initiale et finale pour x, on a

$$L = x(T) - x(0) = \int_0^T v(t)dt = \int_0^T \int_0^t \frac{u(s)}{m} dsdt.$$

En intégrant par parties, on a

$$\int_0^T \int_0^t u(s)dsdt = \int_0^T u(s)ds - \int_0^T tu(t)dt = -\int_0^T tu(t)dt.$$

Ainsi,

$$\int_0^T tu(t)dt = -mL.$$

2. On constate que l'existence de (x, v) solution du système avec les conditions initiale et finale voulues équivaut au fait que u vérifie les conditions obtenues à la question **1.** Donc le contrôle est optimal si et seulement s'il est solution de

$$\inf \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T u(t)^2 dt, \quad \int_0^T u(t)dt = 0, \quad \int_0^T tu(t)dt = -mL \right\}$$

Il s'agit là de minimiser une fonctionnelle fortement convexe (il s'agit du carré de la norme L^2) sur un sous-ensemble convexe fermé de $L^2([0, T])$. En effet, en notant ϕ l'application de $L^2([0, T])$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi(u) = \left(\int_0^T u(t)dt \,, \int_0^T tu(t)dt \right)^\dagger,$$

on prouve facilement que cette application linéaire surjective. De plus, elle est continue par application l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et donc l'ensemble sur lequel on minimise est convexe fermé non vide car image réciproque d'un singleton par ϕ. Donc d'après le théorème 3.8 du polycopié, il existe une unique solution à ce problème de minimisation. On a donc prouvé l'existence et l'unicité d'un contrôle optimal.

3. On applique le théorème 6.3 (PMP avec cible) avec $d = 2$, $k = 1$, $f\left(t, \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, u\right) = A \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + Bu$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix}$, $g\left(t, \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, u\right) = \frac{1}{2}u^2$, et $h = 0$. L'équation adjointe s'écrit $\dot{p} = -A^\dagger p$, où $p = \begin{pmatrix} p_x \\ p_v \end{pmatrix}$ est l'état adjoint. La condition finale est vide car ici l'espace tangent à l'ensemble d'arrivée est réduit à $\{0\}$ (voir condition (6.14)). On déduit de l'équation adjointe que $p_x(t) = \alpha$ et $p_v(t) = (T - t)\alpha + \beta$, où α et β sont des constantes. Enfin, le hamiltonien s'écrit

$$H(x, v, p_x, p_v, u, \lambda) = p^\dagger A \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + p^\dagger Bu + \frac{\lambda}{2}u^2 = p_x v + \frac{p_v}{m}u + \frac{\lambda}{2}u^2.$$

On remarque immédiatement que si $\lambda = 0$ (extrémale anormale), alors le PMP implique $u(t) = \pm\infty$, ce qui est exclu car on sait qu'il existe un contrôle optimal qui est dans $L^2([0,T])$. Donc on est dans le cas d'une extrémale normale, i.e $\lambda \neq 0$, auquel cas, d'après la remarque 6.4, on peut se ramener au cas $\lambda = 1$. Ainsi, $u(t) = -\frac{p_v}{m}$, on a donc que le contrôle optimal est donné par

$$u(t) = -\frac{1}{m}\left((T-t)\alpha + \beta\right).$$

En particulier, il s'agit d'une fonction affine, qui doit vérifier les conditions obtenues à la question 1. En les appliquant, on obtient que

$$u(t) = \frac{12mL}{T^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T}\right)$$

On en déduit donc le coût optimal correspondant :

$$J(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{12mL}{T^2}\right)^2 \int_0^T \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T}\right)^2 dt = \frac{72m^2L^2}{T^3}\int_0^1 \left(\frac{1}{2} - s\right)^2 ds = \frac{6m^2L^2}{T^3}.$$

4. L'équation adjointe est la même qu'à la question précédente. Donc ici aussi, l'état adjoint vérifie $p_x(t) = \alpha$ constante, et $p_v(t) = \beta - \alpha t$. Le hamiltonien du système s'écrit maintenant

$$H(x, v, p_x, p_v, u, \lambda) = p^\dagger A \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + p^\dagger B u + \lambda|u| = p_x v + \frac{p_v}{m}u + \lambda|u|.$$

Et le principe du minimum de Pontryaguine s'écrit donc

$$u(t) \in \operatorname{arginf}\left\{\frac{1}{m}p_v(t)u + \lambda|u|, \quad u \in [-u_{\max}, u_{\max}]\right\}.$$

où il est entendu que $x(t)$ et $v(t)$ sont les trajectoires optimales. On considère tout d'abord le cas d'une extrémale anormale ($\lambda = 0$). Alors p ne peut pas être nulle, donc p_v est une fonction affine non triviale. Donc $u(t) = \pm u_{\max}$ pour tout presque tout t. Si maintenant on a une extrémale normale, alors on se ramène au cas $\lambda = 1$ (remarque 6.4 du polycopié), et on obtient que le contrôle ne peut prendre que 3 valeurs :

$$\overline{u}(t) = \begin{cases} -u_{\max} & \text{si } p_v(t) > m \\ 0 & \text{si } p_v(t) \in]-m, m[\\ u_{\max} & \text{si } p_v(t) < -m \end{cases}$$

Dans les cas limites, on obtient seulement que $\overline{u}(t) \in [-u_{\max}, 0]$ si $p_v(t) = m$, et $\overline{u}(t) \in [0, u_{\max}]$ si $p_v(t) = -m$. Par ailleurs, p_v est une fonction affine, donc monotone. Si elle est constante, alors u est de signe fixe d'après ce qui précède, et ne peut pas satisfaire les conditions de la question **1.** Donc p_v est strictement monotone et $p_v(t) = \pm m$ ne peut arriver que deux fois. Ainsi, dans tous les cas, presque partout en t, $u(t)$ ne peut prendre que les trois valeurs $-u_{\max}, 0, u_{\max}$.

Remarque. *En fait, on peut démontrer que le cas $\lambda = 0$ étudié ci-dessus ne se produit pas. En effet, il implique que u ne s'annule jamais. Donc, puisque p_v est monotone, elle vaut $u_{\max}$ sur un intervalle $]0, t_0[$ puis $-u_{\max}$ sur l'intervalle $]t_0, T[$, ou le contraire. Examinons d'abord ce premier cas ($u = u_{\max}$ sur $]0, t_0[$). Les conditions de la question* **1.** *imposent alors $t_0 = T/2$, et $u_{\max}T^2 = 4mL$, ce qui est exclu par hypothèse. Dans le deuxième cas, où on commence par $u = -u_{\max}$, on obtient là aussi $t_0 = T/2$, et $u_{\max}T^2 = -4mL$, ce qui est également exclu.*

5. On vient de voir que la fonction $p_v(t)$ est affine non constante en t, donc strictement monotone. Le contrôle optimal a donc au plus deux points de commutation. S'il n'en a qu'un, alors il est de signe fixe, et on a à nouveau une contradiction avec la question **1.** Donc il y a exactement deux points de commutation.

6. On appelle t_1 et t_2 les deux points de commutation, avec $0 < t_1 < t_2 < T$. Si p_v est strictement décroissante, alors

$$\overline{u}(t) = \begin{cases} -u_{\max} & \text{si } t \in [0, t_1[, \\ 0 & \text{si } t \in]t_1, t_2[, \\ u_{\max} & \text{si } t \in]t_2, T[. \end{cases}$$

En résolvant le système, on en déduit que $v(t)$ est négative sur l'intervalle $[0, t_2]$. Ensuite, l'accélération est constante égale à $u_{\max} > 0$, donc v est strictement croissante. Comme $v(T) = 0$, elle doit donc rester négative sur $[t_2, T]$. Au bout du compte, $v(t) < 0$ pour tout $t \in]0, T[$. Ceci est contradictoire avec $x(T) = L > 0$. On a donc que p_v est strictement croissante, et donc

$$\overline{u}(t) = \begin{cases} u_{\max} & \text{si } t \in [0, t_1[, \\ 0 & \text{si } t \in]t_1, t_2[, \\ -u_{\max} & \text{si } t \in]t_2, T[. \end{cases}$$

En appliquant les contraintes de la question **1.**, on a

$$0 = \int_0^T \overline{u}(t)dt = u_{\max}t_1 - u_{\max}(T - t_2), \quad \text{donc} \quad t_1 + t_2 = T,$$

et

$$-mL = \int_0^T t\overline{u}(t)dt = u_{\max}\frac{t_1^2}{2} - u_{\max}\frac{T^2 - t_2^2}{2}, \quad \text{donc} \quad t_1^2 + t_2^2 = T^2 - \frac{2mL}{u_{\max}}.$$

On reporte la valeur $t_2 = T - t_1$ dans l'équation ci-dessus, et on a

$$t_1^2 + T^2 - 2t_1T + t_1^2 = T^2 - \frac{2mL}{u_{\max}},$$

c'est-à-dire

$$t_1^2 - t_1T + \frac{mL}{u_{\max}} = 0.$$

Le discriminant vaut $T^2 - 4\frac{mL}{u_{\max}}$, qui est positif d'après l'hypothèse $T > 2\sqrt{\frac{mL}{u_{\max}}}$. Les racines de ce polynôme en t_1 sont donc réelles et valent $\frac{1}{2}\left(T \pm \sqrt{T^2 - \frac{4mL}{u_{\max}}}\right)$. L'une est plus grande que $T/2$, l'autre plus petite. Comme on sait que $0 < t_1 < t_2 < T$ et que $t_1 + t_2 = T$, on a nécessairement $t_1 \leq T/2$. Donc

$$t_1 = \frac{1}{2}\left(T - \sqrt{T^2 - \frac{4mL}{u_{\max}}}\right), \quad t_2 = \frac{1}{2}\left(T + \sqrt{T^2 - \frac{4mL}{u_{\max}}}\right)$$

7. Si $T < 2\sqrt{\frac{mL}{u_{\max}}}$, alors l'équation de la question précédente n'a pas de solution. Il n'y a donc pas de contrôle optimal dans ce cas, car la poussée maximale n'est pas suffisante pour atteindre la cible dans le temps imparti.

8. Comme $u(t) \in [-u_{\max}, u_{\max}]$, on a $-k|u(t)| \geq -ku_{\max}$. Donc

$$m(t) = M - \int_0^t k|u(s)|ds \geq M - ku_{\max}s \geq M - ku_{\max}T > 0,$$

par hypothèse.

9. On écrit le système en utilisant l'inconnue $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \\ m(t) \end{pmatrix}$: $\dot{X} = f(t, X, u)$, où

$$f\left(t, \begin{pmatrix} x \\ v \\ m \end{pmatrix}, u\right) = \begin{pmatrix} v \\ \frac{u}{m} \\ -k|u| \end{pmatrix}.$$

Comme on a vérifié à la question précédente que $m(t)$ ne s'annulait pas sur $[0, T]$, la fonction f est de classe C^1 en (x, v, m), et continue par rapport à u. De plus, sa dérivée s'écrit

$$\nabla_X f(t, X, u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{u}{m^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, la fonctionnelle de coût ne dépend pas de (x, v, m), donc l'équation adjointe s'écrit $\dot{p} = -\nabla_X f^\dagger p$, c'est-à-dire, en posant $p = (p_x, p_v, p_m)^\dagger$,

$$\begin{cases} \dot{p}_x = 0, \\ \dot{p}_v = -p_x, \\ \dot{p}_m = \dfrac{u}{m^2} p_v. \end{cases}$$

Le hamiltonien du système s'écrit

$$H(X, p, u, \lambda) = p_x v + p_v \frac{u}{m} - k p_m |u| + \lambda |u|.$$

10. Supposons que p_x s'annule. Comme $\dot{p}_x = 0$, ceci implique que $p_x(t) = 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Donc p_v est constante. Si $p_v = 0$, on obtient que p_m est constante, donc, puisque la condition finale est $p_m(T) = 0$, c'est que $p_m = 0$. Donc le hamiltonien du système se réduit à $H = \lambda|u|$, et le principe du minimum implique que $u = 0$, ce qui est contradictoire avec $x(T) = L$. Supposons maintenant que $p_v > 0$. Le hamiltonien s'écrit

$$H(X, p, u, \lambda) = p_v \frac{u}{m} - k p_m |u| + \lambda |u|.$$

En particulier, si $u > 0$, on a $H(X, p, u, \lambda) > H(X, p, -u, \lambda)$. D'où, d'après le principe du minimum, $u \leq 0$. Comme $0 = v(T) - v(0) = \int_0^T \frac{u}{m}$, ceci implique $u = 0$, et on a à nouveau une contradiction. Enfin, si $p_v < 0$, on démontre de même que $u \geq 0$, donc que $u = 0$, et on a une contradiction.

11. Soit un intervalle sur lequel $u \geq 0$. Alors on a, en utilisant le système adjoint et le système direct (2),

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p_v}{m} + 1 - k p_m\right) = \frac{\dot{p}_v}{m} - \frac{\dot{m} p_v}{m^2} - k \dot{p}_m = -\frac{p_x}{m} + \frac{k u p_v}{m^2} - \frac{k u p_v}{m^2} = -\frac{p_x}{m}.$$

D'après la question précédente, p_x est constante non nulle, et on a vu à la question **8.** que la fonction m est strictement positive. Donc l'application $t \mapsto \frac{p_v(t)}{m(t)} + 1 - k p_m(t)$ est strictement monotone.

Soit maintenant un intervalle sur lequel $u \leq 0$. Alors on a, en utilisant le système adjoint et le système direct (2),

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p_v}{m} - 1 + k p_m\right) = \frac{\dot{p}_v}{m} - \frac{\dot{m} p_v}{m^2} + k \dot{p}_m = -\frac{p_x}{m} - \frac{k u p_v}{m^2} + \frac{k u p_v}{m^2} = -\frac{p_x}{m}.$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, l'application $t \mapsto \frac{p_v(t)}{m(t)} - 1 + k p_m(t)$ est strictement monotone.

12. Le principe du minimum de Pontryaguine s'applique ici car f et g sont bien de classe C^1 par rapport à X (cf question **9.**) et continues. De plus l'hypothèse de croissance $|\nabla_X f(t,X,u)| \leq C(1+|u|)$ est bien vérifiée. Ceci prouve que les hypothèses (a)-(b)-(c) page 56 sont satisfaites. De même, on vérifie facilement les hypothèses (d)-(e)-(f)-(g) de la page 57. Ainsi, le contrôle optimal $\overline{u}(t)$ vérifie

$$\overline{u}(t) \in \operatorname{arginf}\left\{p_x(t)v(t) + \frac{p_v(t)}{m(t)}u + (1-kp_m(t))|u|, \quad u \in [-u_{\max}, u_{\max}]\right\}.$$

La fonction de u que l'on minimise est donc continue et affine par morceau, avec comme seul point de singularité possible 0. De plus, comme l'application $t \mapsto \frac{p_v(t)}{m(t)} + 1 - kp_m(t)$ est strictement monotone sur tout intervalle où $u \geq 0$, et que l'application $t \mapsto \frac{p_v(t)}{m(t)} - 1 + kp_m(t)$ est strictement monotone sur tout intervalle où $u \leq 0$, la fonction de u à minimiser ne peut être constante que pour des temps qui sont des points isolés. Donc, presque partout, le minimum est atteint soit en $-u_{\max}$, soit en 0, soit en $u_{\max}$. Ce sont les trois valeurs possibles pour le contrôle optimal.

13. On note $\phi_t(u) = \frac{p_v(t)}{m(t)}u + (1-kp_m(t))|u|$ la fonction que l'on souhaite minimiser. Les points de minima possibles donnent les valeurs :

$$\phi_t(-u_{\max}) = \left(-\frac{p_v(t)}{m(t)} + 1 - kp_m(t)\right)u_{\max}, \quad \phi_t(0) = 0, \quad \phi_t(u_{\max}) = \left(\frac{p_v(t)}{m(t)} + 1 - kp_m(t)\right)u_{\max}.$$

Ainsi, trois cas sont possibles :

- Si $|p_v(t)| < m(t)(1-kp_m(t))$, alors $\overline{u}(t) = 0$.
- Si $|p_v(t)| > m(t)(1-kp_m(t))$ et $p_v(t) > 0$, alors $\overline{u}(t) = -u_{\max}$.
- Si $|p_v(t)| > m(t)(1-kp_m(t))$ et $p_v(t) < 0$, alors $\overline{u}(t) = u_{\max}$.

La fonction $t \mapsto p_v(t)$ est affine, donc elle est monotone. Donc elle change de signe au plus une fois. Comme, pour passer de $-u_{\max}$ à $u_{\max}$ ou le contraire, p_v doit changer de signe, on en déduit que le contrôle optimal change de signe au plus une fois.

14. Considérons un intervalle maximal où $u \geq 0$. On a alors, sur cet intervalle,

$$\overline{u}(t) \in \operatorname{arginf}\left\{p_x(t)v(t) + \frac{p_v(t)}{m(t)}u + (1-kp_m(t))u, \quad u \in [0, u_{\max}]\right\}.$$

L'application $\frac{p_v}{m} + 1 - kp_m$, qui est strictement monotone, détermine alors la valeur de $u(t)$. Il y a donc au plus une commutation de 0 à $u_{\max}$ ou de $u_{\max}$ à 0 dans cet intervalle.

De même, sur un intervalle maximal où $u \leq 0$, il y a au plus une commutation.

Supposons maintenant qu'il existe un temps $t_0 \in]0,T[$ de commutation de la valeur $u_{\max}$ à la valeur $-u_{\max}$. Cela signifie qu'en ce point, $p_v = 0 = 1 - kp_m$. Comme p_v est affine, elle est donc de signe fixe à gauche et à droite de t_0. Donc $[0,t_0]$ et $[t_0,T]$ sont des intervalles maximaux où p_v, donc u, est de signe fixe. Il y a au plus une commutation sur chacun, donc au total au plus 3 commutations. S'il y en a exactement 3, alors le contrôle est nul à la fois sur un voisinage de 0 et sur un voisinage de T. Autrement dit, $u = 0$ sur $[0,t_1[$, $u = u_{\max}$ sur $]t_1,t_0[$, $u = -u_{\max}$ sur $]t_0,t_2[$ et $u = 0$ sur $]t_2,T]$. On construit alors un nouveau contrôle qui vaut $u_{\max}$ sur $[0,t_0-t_1[$, $-u_{\max}$ sur $]t_0-t_1,t_2-t_1[$ et 0 sur $]t_2-t_1,T[$. Ce contrôle est lui aussi optimal, et n'a que deux temps de commutation.

De même, dans le cas d'une commutation de $-u_{\max}$ à $u_{\max}$, on obtient au plus 2 commutations.

Il reste à considérer le cas où on n'a aucune commutation de $u_{\max}$ à $-u_{\max}$ ni de $-u_{\max}$ à $u_{\max}$. Dans ce cas, seules les commutations de 0 à $\pm u_{\max}$, de $\pm u_{\max}$ à 0 sont autorisées. On sait que sur un intervalle maximal où $u \geq 0$, on a au plus une commutation. Si un tel intervalle maximal ne touche pas le bord de $[0,T]$, alors u doit être nulle aux deux bouts. Et comme il ne présente pas plus d'une commutation d'après ce qui précède, c'est en fait un intervalle où $u = 0$. Mais sa maximalité implique qu'à gauche et à droite, u saute à $-u_{\max}$. Or c'est impossible car on aurait

alors un intervalle où $u \leq 0$ avec deux commutations. Donc aucun intervalle maximal où $u \geq 0$ n'est intérieur. De même, aucun intervalle maximal où $u \leq 0$ n'est intérieur. Autrement dit, on a un intervalle contenant 0 où $u \geq 0$, puis un autre contenant T où $u \leq 0$, ou le contraire (ils se recouvrent sur une zone où $u = 0$, ce qui n'a pas d'importance). Comme sur chacun de ces intervalles, u a au plus une commutation, on a bout du compte au plus deux commutations.

15. D'après ce qui précède, on a au plus 2 commutations. S'il n'y en a aucune, alors le contrôle est de signe fixe, ce qui implique, vu que $0 = v(T) - v(0) = \int_0^T \frac{u(t)}{m(t)} dt$, que u est constant égal à 0. Ce qui rend $x(T) = L > 0$ impossible. Donc il y a 1 ou 2 points de commutation.

S'il y a 1 point de commutation, alors le contrôle ne prend que deux valeurs. Si l'une d'elle est nulle, alors u est de signe fixe, et avec le même argument que précédemment, on aboutit à une contradiction. Donc les valeurs prises par u sont $u_{\max}$ et $-u_{\max}$. Si on commence par $-u_{\max}$, alors v est décroissante puis croissante. Comme elle $v(0) = v(T) = 0$, elle reste négative. Ce qui exclut $x(T) = L$. Donc dans ce cas le contrôle vaut $u_{\max}$ de $t = 0$ à $t = t_1$ temps de commutation, puis il vaut $-u_{\max}$ sur de t_1 à T.

On considère enfin le cas où il y a deux commutations. On note $0 < t_1 < t_2 < T$ les temps de commutation, et on considère les valeurs possibles de u sur $]0, t_1[$:

— Si $u = 0$ sur $]0, t_1[$, alors on applique le raisonnement de la question **14.** et on se ramène à un cas où $u \neq 0$ sur $]0, t_1[$.

— Si $u = -u_{\max}$ sur $]0, t_1[$, alors sur l'intervalle $]t_1, t_2[$, u vaut soit 0 soit $u_{\max}$. Si $u = 0$, alors on a forcément $u = u_{\max}$ sur $]t_2, T[$, car sinon u serait de signe fixe, et on a vu plus haut que c'était impossible. Ceci implique que v est décroissante puis croissante, donc négative, ce qui, comme on l'a déjà vu, est impossible. Donc $u = u_{\max}$ sur $]t_1, t_2[$. On en déduit d'une part que $p_v > 0$ sur $]0, t_1[$ et $p_v < 0$ et sur $]t_1, t_2[$. Comme p_v est strictement monotone, on a donc $p_v < 0$ sur $]t_2, T[$ également. Comme il y a commutation en t_2, on a donc nécessairement $-p_v > m(1 - kp_m)$ sur $]t_1, t_2[$ et $-p_v < m(1 - kp_m)$ sur $]t_1, t_2[$. Donc $p_v(t_2) + m(t_2)(1 - kp_m(t_2)) = 0$, et $p_v(t) + m(t)(1 - kp_m(t)) > 0$ pour $t \in]t_2, T[$. Or on sait que p_v est strictement décroissante, et que m et p_m sont constantes sur $]t_2, T[$ puisque u y est nul. On a donc une à nouveau une contradiction.

— On aboutit donc à la conclusion que $u = u_{\max}$ sur $]0, t_1[$. La valeur sur $]t_1, t_2[$ doit donc être soit 0 soit $-u_{\max}$. Mais si c'est $-u_{\max}$, alors $p_v < 0$ sur $]0, t_1[$ et $p_v > 0$ sur $]t_1, t_2[$. Donc, puisque p_v est monotone, $p_v > 0$ sur $]t_2, T[$ également. On en déduit que $u = 0$ sur cet intervalle. Ceci implique que $p_v(t) > m(t)(1 - kp_m(t))$ sur $]t_1, t_2[$, et que $p_v(t) < m(t)(1 - kp_m(t))$ sur $]t_2, T[$. Or, comme $u = 0$ sur ce dernier intervalle, m et p_m y sont constants. Sachant que p_v est strictement croissante, on aboutit à une contradiction. Donc $u = 0$ sur $]t_1, t_2[$. Ici encore, si u commute vers $u_{\max}$ en t_2, u est de signe fixe, ce qui est impossible. Donc $u = -u_{\max}$ sur $]t_2, T[$.

Au bout du compte, on a donc deux temps de commutation $t_1 \leq t_2$, tels que

$$u(t) = \begin{cases} +u_{\max} & \text{si } t \in [0, t_1[, \\ 0 & \text{si } t \in]t_1, t_2[, \\ -u_{\max} & \text{si } t \in]t_2, T], \end{cases}$$

Le cas $t_1 = t_2$ correspondant au cas où il n'y a qu'une seule commutation.

Exercice 2 : croissance d'une entreprise

Première étude :

1. Existence : remarquons que $0 \leq u_0 \leq x_0$, puis $0 \leq u_1 \leq x_1 \leq x_0(1 + \theta)$, et par récurrence $u_k \leq x_0(1 + \theta)^k$ pour tout $k = 0, \ldots, N - 1$. Il s'agit donc de la maximisation d'une fonction continue sur un domaine compact (fermé et borné) de $\mathbb{R}^N$: on en déduit que (3) a une solution. De même pour (4).

2. Montrer que V satisfait un "principe de programmation dynamique" : on écrit

$$V(x;k) = \max_{0\le u\le x} (u + V(x+\theta(x-u);k+1))$$

pour tout $k \le N-1$, $x \ge 0$.

3. On a $V(x;N) = 0$, $V(x;N-1) = x$. Si $V(x;k+1) = \alpha_{k+1}x$, alors

$$V(x;k) = \max_{0\le u\le x} (u + \alpha_{k+1}(x+\theta(x-u))) = \max_{0\le u\le x} (\alpha_{k+1}(1+\theta)x + (1-\alpha_{k+1}\theta)u).$$

La fonction étant affine le max est atteint en 0 ou x donc :

$$V(x;k) = \max\{\alpha_{k+1}(1+\theta)x, (\alpha_{k+1}+1)x\}$$

ou encore

$$\alpha_k = \max\{\alpha_{k+1}(1+\theta), \alpha_{k+1}+1\}$$

et l'hypothèse de récurrence est bien démontrée.

D'autre part, on voit que $\alpha_N = 0$, $\alpha_k = \alpha_{k+1} + \max\{\theta\alpha_{k+1}, 1\} > \alpha_{k+1}$. Donc la suite $(\alpha_k)_{0\le k\le N}$ est décroissante.

Explicitons les coefficients : on a $\alpha_k = \alpha_{k+1}+1$, tant que $\alpha_{k+1} \le 1/\theta$, et par conséquent $\alpha_k = N-k$ tant que $N-k+1 \le 1/\theta$, soit $k \ge N-1-1/\theta$.

Si par contre $k < (N-1-1/\theta)$, $\alpha_k = (1+\theta)\alpha_{k+1}$.

En posant $\bar{k} := N-1-\lfloor 1/\theta \rfloor$ on a donc $\alpha_k = N-k$ si $k \ge \bar{k}$, $\alpha_k = (1+\theta)^{\bar{k}-k}(N-\bar{k})$ if $k < \bar{k}$.

4. Détailler la stratégie optimale $(u_k)_{k=0}^{N-1}$: d'après la question précédente, tant que $k \ge N-1-1/\theta$ $(k \ge \bar{k})$, $u_k = x_k$, et on a $u_k = 0$ si $k < \bar{k}$.

Le meilleur contrôle consiste à ne rien distribuer pendant un certain nombre de cycles pour tout distribuer les dernières années et ne plus rien investir. Pour $k = 0$ on trouve $V(x) = (1+\theta)^{\bar{k}}(N-\bar{k})x_0 = (1+\theta)^{\bar{k}}\lceil 1/\theta \rceil x_0$.

Cas d'une utilité concave générale.

5. Comme précédemment, pour $k \le N-1$,

$$V(x;k) = \max_{0\le u\le x} \{f(u) + V(x+\theta(x-u);k+1)\}.$$

6. On peut soit partir de la définition : soit $x, y \ge 0$ avec $x < y$. On considère $u = (u_k, \dots, u_{N-1})$ un maximiseur pour $V(x;k)$. On vérifie facilement que $(u_l)_{l\ge k}$ est admissible pour y, d'où $V(y;k) \ge \sum_{l=k}^{N-1} u_l = V(x;k)$. En effet, notons $(y'_l)_{l\ge k}$ la suite définie par $y'_k = y$, $y'_{l+1} = y'_l + \theta(y'_l - u_l)$. Si $y'_l > x_l$ (ce qui est vrai pour $l = k$), on a $u_l \in [0, x_l] \subset [0, y'_l]$, et $y'_{l+1} = y'_l + \theta(y'_l - u_l) = (1+\theta)y'_l - \theta u_l > (1+\theta)x_l - \theta u_l = x_{l+1}$. Donc par récurrence, $y'_l > x_l$ pour tout $l = 1, \dots, N$ et donc $u_l < y'_l$.

Enfin, comme $y_{N-1} > u_{N-1}$ on peut augmenter strictement le gain en remplaçant u_{N-1} par y_{N-1} dans le contrôle, on trouve alors $V(y;k) \ge \sum_{l=k}^{N-2} u_l + y_{N-1} > V(x;k)$. $V(\cdot;k)$ est bien strictement croissante.

Ou bien utiliser le PPD (Question précédente) en procédant par récurrence rétrograde. D'abord, $V(x, N-1) = f(x)$ est bien strictement croissante par hypothèse. Ensuite, en supposant que $x \mapsto V(x;k+1)$ est strictement croissante, on déduit que, si $x < y$, alors, pour tout $u \ge 0$,

$$f(u) + V(x+\theta(x-u);k+1) < f(u) + V(y+\theta(y-u);k+1).$$

En choisissant $u = u_x$ contrôle optimal pour x (et donc admissible pour y puisque $u_x \le x < y$), on a donc

$$V(x,k) = f(u_x) + V(x+\theta(x-u_x);k+1) < f(u_x) + V(y+\theta(y-u_x);k+1) \le V(y;k).$$

Donc $V(\cdot,k)$ est strictement croissante. Par récurrence on en déduit que c'est vrai pour $k = 0, \dots, N-1$.

7. $V(x, N-1) = f(x)$ est évidente. On a $x = (x + \theta(x-u))/(1+\theta) + u\theta/(1+\theta)$ donc $f(x) \geq f(x+\theta(x-u))/(1+\theta) + f(u)\theta/(1+\theta)$, d'où

$$f(x+\theta(x-u)) \leq (1+\theta)f(x) - \theta f(u).$$

Par récurrence, si $V(x; k+1) = (N-k-1)f(x)$ (vrai pour $k = N-2$), on a

$$V(x;k) = \max_{0\leq u\leq x} f(u)+(N-k-1)f(x+\theta(x-u)) \leq \max_{0\leq u\leq x}(1-\theta(N-k-1))f(u)+(N-k-1)(1+\theta)f(x).$$

Si $(N-k-1)\theta \leq 1$ le maximum du membre de droite est atteint en $u = x$ (f est croissante) et vaut $(N-k)f(x)$: on en déduit que

$$V(x;k) = \max_{0\leq u\leq x} f(u) + (N-k-1)f(x+\theta(x-u)) \leq (N-k)f(x).$$

Comme pour $u = x$ l'expression sous le max vaut $(N-k)f(x)$, on en déduit que $V(x;k) = (N-k)f(x)$. Ceci est donc vrai tant que $(N-k-1)\theta \leq 1$ soit $k \geq N-1-1/\theta$, ou de manière équivalente $k \geq \bar{k}$.

Une autre preuve consiste à remarquer, par récurrence, que si $V(x; k+1) = (N-k-1)f(x)$, alors

$$\begin{aligned}
&f(u) + (N-k-1)V(x+\theta(x-u); k+1) \\
&= f(u) + (N-k-1)f(x+\theta(x-u)) = (N-k)\left(\frac{1}{N-k}f(u) + \frac{N-k-1}{N-k}f(x+\theta(x-u))\right) \\
&\qquad\qquad \leq (N-k)f\left(\frac{u}{N-k} + \theta\frac{N-k-1}{N-k}(x-u)\right) \qquad (6)
\end{aligned}$$

par concavité de f. On a

$$\frac{u}{N-k} + \theta\frac{N-k-1}{N-k}(x-u) = \frac{u}{N-k}(1-\theta(N-k-1)) + \theta\frac{N-k-1}{N-k}x,$$

et si $(N-k-1)\theta \leq 1$ (soit à nouveau $k \geq \bar{k}$), le max de cette expression est pour $u = x$. La fonction f étant croissante, on en déduit que le max dans (6) est atteint en $u = x$ et vaut donc $(N-k)f(x) = V(x;k)$.

8. On a $V(x_k;k) = \max_{0\leq u\leq x_k} f(u) + V(x_k+\theta(x_k-u);\bar{k}) = \max_{0\leq u\leq x_k} f(u) + (N-\bar{k})f(x_k + \theta(x_k-u))$. Si le maximum était atteint en $u_k = x_k$ on devrait avoir $f'(x_k) - \theta(N-\bar{k})f'(x_k) \geq 0$. Comme f est strictement croissante on a $f'(x_k) > 0$ et donc $1-\theta(N-\bar{k}) \geq 0$ soit $\bar{k} \geq N - 1/\theta$ ou encore $\bar{k} \geq N - \lfloor 1/\theta \rfloor = \bar{k}+1$, une contradiction. On a donc $u_k < x_k$.

9. D'après la question **5.**,

$$\begin{aligned}
V(x;k) &= \max_{0\leq u\leq x}(f(u) + V(x+\theta(x-u); k+1)) \\
&= \max_{0\leq u\leq x}\left[f(u) + \max_{0\leq v\leq x+\theta(x-u)}(f(v) + V(x+\theta(x-u)+\theta(x+\theta(x-u)-v); k+2))\right] \\
&\qquad = \max_{\substack{0\leq u\leq x \\ 0\leq v+\theta u\leq(1+\theta)x}} \left(f(u) + f(v) + V((1+\theta)^2x - \theta((1+\theta)u+v); k+2)\right).
\end{aligned}$$

Si à l'optimum on a $u_k = x_k = x_{k+1} > u_{k+1}$ alors on remarque que la paire $(u,v) = (u_{k+1}, u_k)$ satisfait $0 \leq u < x_k$, et $0 \leq u_k < x_k + \theta(x_k - u_{k+1})$ puisque $\theta(x_k - u_{k+1}) > 0$, donc $0 \leq v + \theta u < (1+\theta)x_k$. Donc (u,v) est admissible dans le problème de programmation dynamique et

$$\begin{aligned}
V(x_k,k) &\geq f(u) + f(v) + V((1+\theta)^2x_k - \theta((1+\theta)u+v); k+2) \\
&= f(u_{k+1}) + f(u_k) + V((1+\theta)^2x_k - \theta((1+\theta)u_{k+1}+u_k); k+2) \\
&= f(u_{k+1}) + f(u_k) + V((1+\theta)^2x_k - \theta((1+\theta)u_k + u_{k+1} + \theta(u_{k+1}-u_k)); k+2) \\
&= V(x_k,k) + V(x_{k+2} + \theta^2(u_k - u_{k+1}); k+2) - V(x_{k+2}; k+2).
\end{aligned}$$

Comme $V(\cdot; k+2)$ est strictement croissante (remarquons que $k \leq \bar{k}-2$ donc $k+2 \leq \bar{k} \leq N-1$) et $u_k > u_{k+1}$, on en déduit $V(x_k, k) > V(x_k, k)$, qui est contradictoire. On en déduit qu'on ne peut avoir $u_k = x_k = x_{k+1} > u_{k+1}$.

Pour conclure, on en déduit que puisque $u_{\bar{k}-1} > x_{\bar{k}-1}$, $u_l > x_l$ pour tout $l < \bar{k}$. On a donc bien, comme dans l'exemple $f(u) = u$ des premières questions, que $u_k < x_k$ pour $k < \bar{k}$ et $u_k = x_k$ pour $k \geq \bar{k}$.

10. Le contrôle optimal est solution du problème de maximisation qui définit la fonction valeur, à savoir

$$V(x) := \max \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} f(u_k) : x_0 = x, x_{k+1} = x_k + \theta(x_k - u_k), 0 \leq u_k \leq x_k, k = 0, \ldots, N-1 \right\}.$$

Comme f est strictement concave, l'application suivante l'est également :

$$\begin{array}{rccc} F : & \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u_k)_{0 \leq k \leq N-1} & \longmapsto & \sum_{k=0}^{N-1} f(u_k) \end{array}$$

Par ailleurs, l'ensemble sur lequel le problème de maximisation est posé est convexe. On en déduit donc l'unicité du contrôle optimal.