UPMC–M2R Parcours ANEDP
Méthodes de Galerkine Discontinues et Applications
Corrigé de l'examen du 12 mai 2009

Exercice 1 (10 points)

1. Il vient pour tout $(b, e) \in H \times H$,
$$a((b,e),(b,e)) = \int_\Omega \mu|b|^2 + \epsilon|e|^2,$$
grâce à la formule d'intégration par parties donnée dans l'énoncé (appliquée sur Ω), d'où la L^2-dissipativité car μ et ϵ sont deux réels strictement positifs. Par ailleurs, la propriété de la solution exacte est évidente.
2. Pour montrer la L^2-dissipativité, on procède comme ci-dessus en intégrant par parties sur chaque maille et en réarrangeant comme en cours les termes de saut et de moyenne.
La L^2-dissipativité implique l'unicité de la solution discrète. Comme le problème discret est équivalent à un système linéaire carré, le caractère bien posé en résulte.
Pour la solution exacte, $[\![E^*]\!] = [\![B^*]\!] = 0$, $\nabla_h \times E^* = \nabla \times E^*$ et $\nabla_h \times B^* = \nabla \times B^*$ car $(B^*, E^*) \in H$. Par suite,
$$a_h((B^*,E^*),(b_h,e_h)) = \int_\Omega \Big(f\cdot b_h + g\cdot e_h\Big), \qquad \forall (b_h,e_h) \in W_h.$$
Cette propriété porte le nom de consistance (forte).
3. Les intégrales sur Ω se majorent par inégalité de Cauchy–Schwarz. Passons au terme de bord. Soit $F \in \mathcal{F}_h^b$. Il vient par inégalité de trace,
$$\begin{aligned}\int_F (n_F \times E)\cdot b_h &\le \|n_F \times E\|_{L^2(F)^3}\|b_h\|_{L^2(F)^3}\\ &\lesssim h_F^{-1/2}\|n_F \times E\|_{L^2(F)^3}\|b_h\|_{L^2(T(F))^3},\end{aligned}$$
où $T(F)$ est la maille dont F est une face. En sommant sur $F \in \mathcal{F}_h^b$ et en utilisant l'in'égalité de Cauchy–Schwarz, il vient
$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} (n_F \times E)\cdot b_h &\lesssim \left(\sum_{F\in\mathcal{F}_h^b} h_F^{-1}\int_F |n_F \times E|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{F\in\mathcal{F}_h^b}\int_{T(F)} |b_h|^2\right)^{1/2}\\ &\le \left(\sum_{F\in\mathcal{F}_h^b} h_F^{-1}\int_F |n_F \times E|^2\right)^{1/2}\|b_h\|_L.\end{aligned}$$
On procède de manière analogue pour majorer les termes sur les faces intérieures en utilisant le fait que pour $t_h = b_h$ ou $t_h = e_h$, sur $F \in \mathcal{F}_h^i$ avec $F = \partial T^- \cap \partial T^+$, on a
$$h_F^{1/2}\|\{t_h\}\|_{L^2(F)^3} \lesssim \|t_h\|_{L^2(T^-)^3} + \|t_h\|_{L^2(T^+)^3}.$$

4. L'analyse d'erreur vue en cours conduit à l'estimation

$$\|(B^* - B_h, E^* - E_h)\| \lesssim \inf_{(\xi_h,\zeta_h)\in W_h} \|(B^* - \xi_h, E^* - \zeta_h)\|_*.$$

En examinant l'expression de la norme $\|\cdot\|_*$ et en utilisant les propriétés d'approximation usuelles des espaces d'éléments finis, on déduit que si $(B^*, E^*) \in H^{p+1}(\Omega)^3 \times H^{p+1}(\Omega)^3$, on a

$$\|(B^* - B_h, E^* - E_h)\| \lesssim h^p.$$

Cette estimation est sous-optimale pour la norme L, donc pour la norme $\|\cdot\|$.

5. Il vient

$$\begin{aligned} a_h((B_h, E_h), (b_h, e_h)) := &\int_\Omega \Big(\mu B_h{\cdot}b_h + \epsilon E_h{\cdot}e_h + E_h{\cdot}(\nabla_h{\times}b_h) - B_h{\cdot}(\nabla_h{\times}e_h)\Big) \\ &- \int_{\partial\Omega} (n \times B_h){\cdot}e_h \\ &+ \sum_{F\in\mathcal{F}_h^i} \int_F \Big([\![b_h]\!]{\cdot}(n_F \times \{E_h\}) - [\![e_h]\!]{\cdot}(n_F \times \{B_h\})\Big), \end{aligned}$$

6. On obtient

$$\Phi_{T,F} = \begin{cases} n_T \times \{E_h\} & F \in \mathcal{F}_h^i, \\ 0 & F \in \mathcal{F}_h^b, \end{cases} \qquad \Psi_{T,F} = \begin{cases} n_T \times \{B_h\} & F \in \mathcal{F}_h^i, \\ n \times B_h & F \in \mathcal{F}_h^b, \end{cases}$$

où n_T est la normale extérieure à la maille T. Il s'agit des flux *centrés*. Ces flux sont conservatifs (et consistants).

7. On rajoute à la forme bilinéaire a_h un terme de pénalisation des sauts des composantes tangentielles de B et E de la forme

$$\sum_{F\in\mathcal{F}_h^i} \int_F (\alpha(n_F \times [\![E_h]\!]) \cdot (n_F \times [\![e_h]\!]) + \beta(n_F \times [\![B_h]\!]) \cdot (n_F \times [\![b_h]\!])),$$

où α et β sont des paramètres strictement positifs.

Exercice 2 (10 points)

1. Il vient

$$\begin{aligned} a_h(u_h, v_h) = \int_\Omega \nabla_h u_h \cdot \nabla_h v_h - \sum_{F\in\mathcal{F}_h} \int_F (n_F{\cdot}\{\nabla_h u_h\}[\![v_h]\!] - n_F{\cdot}\{\nabla_h v_h\}[\![u_h]\!]) \\ + \sum_{F\in\mathcal{F}_h} \frac{1}{h_F} \int_F [\![u_h]\!][\![v_h]\!]. \end{aligned}$$

Le stencil de la méthode comprend un élément et ses voisins (partageant au moins une face).

2. Vérification immédiate : $\forall v_h \in V_h$,

$$a_h(v_h, v_h) = \|v_h\|_{\mathrm{dG}}^2.$$

3. Vérification immédiate :

$$\|u_h\|_{\mathrm{dG}}^2 = a_h(u_h, u_h) = \int_\Omega f u_h \le \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_h\|_{L^2(\Omega)} \le C_1 \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_h\|_{\mathrm{dG}}.$$

   Un résultat du cours fournit alors $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$ t.q. (à une sous-suite extraite près) $u_h \to \overline{u}$ dans $L^2(\Omega)$ et $G(u_h) \rightharpoonup \nabla \overline{u}$ faiblement dans $L^2(\Omega)^d$.

4. On utilise l'hypothèse (i), la coercivité, et l'expression du problème discret

$$\begin{aligned}
\|\widehat{G}(u_h - \pi_h\varphi)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 &\le C_2^2 \|u_h - \pi_h\varphi\|_{\mathrm{dG}}^2 \\
&\le C_2^2 a_h(u_h - \pi_h\varphi, u_h - \pi_h\varphi) \\
&= C_2^2 \left(a_h(u_h, u_h - \pi_h\varphi) - a_h(\pi_h\varphi, u_h - \pi_h\varphi)\right) \\
&= C_2^2 \left(\int_\Omega f(u_h - \pi_h\varphi) - a_h(\pi_h\varphi, u_h - \pi_h\varphi) \right).
\end{aligned}$$

5. Il est clair que

$$\int_\Omega f(u_h - \pi_h\varphi) \to \int_\Omega f(\overline{u} - \varphi) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(\overline{u} - \varphi).$$

   De plus,

$$a_h(\pi_h\varphi, u_h - \pi_h\varphi) = \int_\Omega \widehat{G}(\pi_h\varphi) \cdot G(u_h - \pi_h\varphi) + j_h(\pi_h\varphi, u_h - \pi_h\varphi) := T_1 + T_2.$$

   De par l'hypothèse (ii), $\widehat{G}(\pi_h\varphi)$ converge vers $\nabla\varphi$ dans $L^2(\Omega)^d$ fort. Par ailleurs, $G(u_h - \pi_h\varphi)$ converge vers $\nabla(\overline{u} - \varphi)$ dans $L^2(\Omega)^d$ faible. Par suite,

$$T_1 \to \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla(\overline{u} - \varphi).$$

   Par ailleurs,

$$|T_2| \le j_h(\pi_h\varphi, \pi_h\varphi)^{1/2} j_h(u_h - \pi_h\varphi, u_h - \pi_h\varphi)^{1/2},$$

   et on constate que le premier facteur tend vers zéro et que le deuxième est borné. D'où $T_2 \to 0$. D'où

$$\limsup_{h\to 0} \|\widehat{G}(u_h - \pi_h\varphi)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \le C_2^2 \left(\int_\Omega \nabla(u - \varphi) \cdot \nabla(\overline{u} - \varphi) \right).$$

   Par ailleurs,

$$\limsup_{h\to 0} \|\widehat{G}(\pi_h\varphi) - \nabla\overline{u}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \le \int_\Omega |\nabla(\overline{u} - \varphi)|^2.$$

   En utilisant une inégalité triangulaire et la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, il vient

$$\limsup_{h\to 0} \|\widehat{G}(u_h) - \nabla\overline{u}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 = 0,$$

   d'où la convergence forte de $\widehat{G}_h(u_h)$ vers $\nabla\overline{u}$ dans $L^2(\Omega)^d$.

6. On constate que

$$\int_\Omega f\varphi \leftarrow \int_\Omega f\pi_h\varphi = a_h(u_h, \pi_h\varphi) = \int_\Omega \widehat{G}(u_h)\cdot G(\pi_h\varphi) + j_h(u_h, \pi_h\varphi)$$
$$\to \int_\Omega \nabla\overline{u}\cdot\nabla\varphi + 0 = \int_\Omega \nabla\overline{u}\cdot\nabla\varphi,$$

ce qui montre que $\overline{u}$ est solution du problème continu et donc est égale à la solution exacte u qui est unique. Toujours par unicité, *toute* la suite $\{u_h\}_{h\in\mathcal{H}}$ tend vers u.