Examen (3h, documents autorisés)

Exercice 1 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert polygonal borné et $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème

$$-\triangle u = f \text{ dans } \Omega, \qquad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

La formulation faible consiste à

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u,v) = \int_\Omega fv \text{ pour tout } v \in V, \tag{1}$$

avec $V \stackrel{\text{def}}{=} [H_0^1(\Omega)]^d$ et $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$. Soit $(\mathcal{T}_h)_{h\in\mathcal{H}}$ une suite de maillages simpliciaux conformes paramétrée par le pas de maillage h, et posons $V_h \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h)$, $k \geq 1$. On définit sur $V_h \times V_h$ la forme bilinéaire suivante :

$$a_h(u_h, v_h) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega \nabla_h u_h \cdot \nabla_h v_h - \sum_{F\in\mathcal{F}_h} \int_F \{\nabla_h u_h\}\cdot \mathrm{n}_F [\![v_h]\!] + \sum_{F\in\mathcal{F}_h} \int_F \frac{\eta}{h_F} [\![u_h]\!][\![v_h]\!], \tag{2}$$

où $\eta > 0$ et, pour toute $F \in \mathcal{F}_h^b$, $[\![\varphi]\!] = \{\varphi\} = \varphi$. On étudie la discrétisation suivante de (1) :

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a_h(u_h, v_h) = \int_\Omega f v_h \text{ pour tout } v_h \in V_h. \tag{3}$$

Q1) En supposant que $u \in V_\dagger \stackrel{\text{def}}{=} [H_0^1(\Omega)]^d \cap H^2(\mathcal{T}_h)$, prouver que a_h est consistante, c'est-à-dire, $a_h(u, v_h) = -\int_\Omega \triangle u v_h$ pour tout $v_h \in V_h$.
Bonus[1]**.** Expliquer où intervient l'hypothèse $u \in H^2(\mathcal{T}_h)$.

Q2) En utilisant le fait qu'il existe C_{tr} indépendant du pas de maillage tel que

$$\forall v_h \in V_h, \qquad \left| \sum_{F\in\mathcal{F}_h} \int_F \{\nabla_h v_h\}\cdot \mathrm{n}_F [\![v_h]\!] \right| \leq C_{\text{tr}} \sqrt{d+1} \|\nabla_h v_h\|_{[L^2(\Omega)]^d} |v_h|_{\text{J}},$$

prouver qu'il existe $\underline{\eta}$ et C_{sta} indépendants du pas de maillage et tels que, pour tout $\eta > \underline{\eta}$,

$$\forall v_h \in V_h, \qquad a_h(v_h, v_h) \geq C_{\text{sta}} \|v_h\|_{\text{dG}}^2,$$

où $\|v_h\|_{\text{dG}}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \|\nabla_h v_h\|_{[L^2(\Omega)]^d}^2 + |v_h|_{\text{J}}^2$ et $|v_h|_{\text{J}}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{F\in\mathcal{F}_h} h_F^{-1} \|v_h\|_{L^2(F)}^2$. Préciser la valeur de $\underline{\eta}$.

Q3) Soit $V_{\dagger h} \stackrel{\text{def}}{=} V_h + V_\dagger$. On définit, pour tout $v \in V_{\dagger h}$,

$$\|v\|_{\text{dG},*}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \|v\|_{\text{dG}}^2 + \sum_{F\in\mathcal{F}_h} h_F \|\{\nabla v\}\cdot \mathrm{n}_F\|_{L^2(F)}^2.$$

Prouver qu'il existe C_{bnd} indépendant du pas de maillage tel que

$$\forall (w, v_h) \in V_{\dagger h} \times V_h, \qquad a_h(w, v_h) \leq C_{\text{bnd}} \|w\|_{\text{dG},*} \|v_h\|_{\text{dG}}.$$

Q4) Déduire une estimation d'erreur du type

$$\|u - u_h\|_{\text{dG}} \leq \left(1 + C_{\text{bnd}} C_{\text{sta}}^{-1}\right) \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_{\text{dG},*}.$$

Bonus. Préciser les hypothèses de régularité sur la solution exacte pour que la méthode converge à l'ordre k en norme $\|\cdot\|_{\text{dG}}$.

Q5) **Bonus.** Expliquer pourquoi on ne peut pas utiliser la méthode d'Aubin–Nitsche pour obtenir une estimation d'erreur en norme L^2 (suggestion : peut-on utiliser la méthode du gradient conjugué pour résoudre le système linéaire issu de (3) ?).

[1] Le maximum peut être atteint même sans répondre aux questions bonus.

Exercice 2 Pour $f \in L^2(\Omega)$ et $u_0 \in V_{\dagger h}$, on considère l'équation de la chaleur

$$\partial_t u - \triangle u = f \text{ dans } \Omega \times (0, t_F)\ , \qquad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, t_F), \qquad u(x, t = 0) = u_0 \text{ dans } \Omega.$$

En supposant $u \in C^0([0, t_F]; V_\dagger) \cap C^2([0, t_F]; L^2(\Omega))$, on considère la formulation faible suivante :

$$(\partial_t u, v)_{L^2(\Omega)} + a(u, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall v \in V.$$

A l'aide de l'opérateur $A_h : V_{\dagger h} \to V_h$ t.q., pour tout $(w, v_h) \in V_{\dagger h} \times V_h$, $(A_h w, v_h)_{L^2(\Omega)} = a_h(w, v_h)$ (avec a_h défini par (2)), on peut formuler le problème sémi-discret[2]

$$d_t u_h(t) + A_h u_h(t) = f_h(t) \qquad \forall t \in [0, t_F], \tag{4}$$

où on a posé $f_h(t) = \pi_h f(t)$, π_h étant l'opérateur de projection L^2 sur V_h. On fixe un pas de temps $\delta t = t_F/N$, et on discrétise le problème (4) par la méthode d'Euler implicite : Pour $n \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$u_h^{n+1} = u_h^n - \delta t A_h u_h^{n+1} + \delta t f_h^{n+1},$$

avec $u_h^0 = \pi_h u_0$, et on décompose l'erreur au temps discret $t^n = n\delta t$ comme suit

$$u^n - u_h^n = \xi_\pi^n - \xi_h^n, \qquad \xi_\pi^n \stackrel{\text{def}}{=} u^n - \pi_h u^n, \qquad \xi_h^n \stackrel{\text{def}}{=} u_h^n - \pi_h u^n.$$

Q1) Prouver que

$$\pi_h d_t u(t) = f_h(t) - A_h u(t).$$

(Suggestion : utiliser le fait que, pour tout $t \in [0, t_F]$, $d_t u(t) - \triangle u(t) - f_h(t) = 0$ p.p.dans Ω et la consistance de a_h prouvée au premier point de l'Exercice 1).

Q2) En utilisant le fait que $u^{n+1} = u^n + \delta t d_t u^{n+1} + \delta t \theta^{n+1}$ (où $\theta^{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \delta t^{-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^n - \tau) d_t^2 u(\tau)\, \mathrm{d}\tau$), prouver l'équation d'erreur suivante :

$$\xi_h^{n+1} = \xi_h^n - \delta t A_h \xi_h^{n+1} + \delta t \left(A_h \xi_\pi^{n+1} - \pi_h \theta^{n+1} \right). \tag{5}$$

Q3) A partir de (5), on peut prouver l'estimation suivante, qu'on assumera par la suite[3] :

$$\|\xi_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\xi_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta t C_{\text{sta}} \|\xi_h^{n+1}\|_{\text{dG}}^2 \lesssim \delta t (\|\xi_\pi^{n+1}\|_{\text{dG},*}^2 + C_u^2 \delta t^2). \tag{6}$$

avec $C_u \stackrel{\text{def}}{=} \|d_t^2 u\|_{C^0(L^2(\Omega))}$. En sommant (6) pour $n \in \{0, \dots, N-1\}$ et en observant que $\xi_h^0 = 0$, prouver que

$$\|\xi_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta t C_{\text{sta}} \sum_{n=1}^N \|\xi_h^n\|_{\text{dG}}^2 \lesssim \left(t_F C_u^2 \delta t^2 + \delta t \sum_{n=1}^N \|\xi_\pi^n\|_{\text{dG},*}^2 \right).$$

Q4) On assume dorénavant que $u \in C^0([0, t_F]; H^{k+1}(\mathcal{T}_h))$, de manière à avoir, pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, $\|\xi_\pi^n\|_{\text{dG},*} \lesssim h^k \|u^n\|_{H^{k+1}(\mathcal{T}_h)}$. Prouver, à partir du résultat au point précèdent, que

$$\left(\|\xi_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta t C_{\text{sta}} \sum_{n=1}^N \|\xi_h^n\|_{\text{dG}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \chi_1 \delta t + \chi_2 h^k,$$

avec $\chi_1 = \sqrt{t_F} \|d_t^2 u\|_{C^0([0,t_F];L^2(\Omega))}$ et $\chi_2 = \sqrt{t_F} \|u\|_{C^0([0,t_F];H^{k+1}(\mathcal{T}_h))}$.

Q5) Conclure que $\|u^N - u_h^N\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \chi_1 \delta t + \chi_2 h^k$.

Q6) **Bonus.** Prouver l'inégalité (6) (Suggestion : multiplier (5) par ξ_h^{n+1}, intégrer sur Ω, utiliser l'inégalité $2ab = a^2 + b^2 - (a-b)^2$ pour le terme $(\pi_h \theta^{n+1}, \xi_h^{n+1})_{L^2(\Omega)} = (\theta^{n+1}, \xi_h^{n+1})_{L^2(\Omega)}$, puis les inégalités de Cauchy–Schwarz, de Poincaré discret et de Young pour conclûre).

[2] A partir de ce point, on voit u comme une fonction du temps à valeurs dans V (d'où la notation $d_t u(t)$).

[3] Le symbole $\lesssim$ dénote ici une inégalité au moins d'une constante multiplicative indépendant à la fois du pas de maillage h et du pas de temps δt.