UPMC–M2R Parcours ANEDP

Méthodes de Galerkin Discontinues et Applications

Examen – 12 mai 2014

L'examen dure trois heures. Le seul document autorisé est, comme annoncé en cours, une feuille aide-mémoire manuscrite recto-verso format A4.

Important. Rédiger sur des **copies séparées** les réponses à la partie A et à la partie B.

1 Partie A

1.1 Espaces de Sobolev brisés (2 pts)

Soit $\mathcal{T}_h$ un maillage d'un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. On désigne par $\mathcal{F}_h^i$ l'ensemble des interfaces du maillage, pour $F \in \mathcal{F}_h^i$, par $[\![v]\!]_F$ le saut à travers F d'une fonction v régulière par morceaux. On rappelle que

$$
\begin{aligned}
H^1(\Omega) &= \{v \in L^2(\Omega);\ \nabla v \in L^2(\Omega)^d\},\\
H^1(\mathcal{T}_h) &= \{v \in L^2(\Omega);\ \nabla_h v \in L^2(\Omega)^d\},
\end{aligned}
$$

où ∇ désigne le gradient (au sens des distributions) et ∇_h le gradient brisé tel que $(\nabla_h v)|_T = \nabla(v|_T)$, $\forall T \in \mathcal{T}_h$.

a) Montrer que si $v \in H^1(\Omega)$, $\nabla_h v = \nabla v$.

b) Montrer que $v \in H^1(\mathcal{T}_h)$ vérifie $[\![v]\!]_F = 0$, $\forall F \in \mathcal{F}_h^i$, si et seulement si $v \in H^1(\Omega)$.

1.2 Analyse d'erreur (2 pts)

Préciser les hypothèses et démontrer le résultat suivant :

$$
|||u - u_h||| \leq \left(1 + \frac{\omega}{\alpha}\right) \inf_{y_h \in V_h} |||u - y_h|||_*.
$$

1.3 Advection-réaction (4 pts)

On considère l'équation d'advection-réaction stationnaire

$$
\begin{aligned}
\mu u + \beta{\cdot}\nabla u &= f \qquad \text{dans } \Omega,\\
u &= 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega^-,
\end{aligned}
$$

où $\mu \in L^\infty(\Omega)$, $\beta \in W^{1,\infty}(\Omega)^d$ avec $\mu - \frac{1}{2}\nabla{\cdot}\beta \geq \mu_0 > 0$ et $\partial\Omega^- = \{x \in \partial\Omega;\ \beta{\cdot}n(x) < 0\}$.

a) On considère l'approximation par Galerkin discontinu de ce problème en utilisant des flux centrés et l'espace polynomial brisé $\mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h)$. Préciser la forme bilinéaire discrète a_h et le membre de droite du problème discret.

b) Montrer que la forme bilinéaire a_h est consistante et coercive pour une norme que l'on précisera.

c) Donner (sans démonstration) une estimation d'erreur en précisant l'ordre de convergence en k et la régularité requise pour la solution exacte u.

d) Formuler le problème discret sous forme locale en précisant les flux.

e) Préciser comment sont modifiés la forme bilinéaire a_h, les flux et l'estimation d'erreur (ordre de convergence et norme) si on utilise des flux upwind.

1.4 Gradient discret (2 pts)

a) Rappeler la définition du gradient discret $G_h^k : H^1(\mathcal{T}_h) \to L^2(\Omega)^d$ où $k \geq 0$ est un degré polynomial fixé.

b) Reformuler la forme bilinéaire discrète a_h obtenue pour l'approximation par flux centrés du problème d'avection-réaction stationnaire en utilisant le gradient discret G_h^k.

1.5 Écoulements incompressibles (2 pts)

Une approximation par la méthode de Galerkin discontinu des équations de Stokes consiste à utiliser l'espace polynomial brisé $U_h := \mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h)^d$ pour la vitesse discrète u_h et l'espace $P_h := \mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h)$ pour la pression discrète p_h. L'équation de conservation de la masse discrète (ou contrainte d'incompressibilité sur la vitesse discrète) prend la forme suivante :

$$\sum_{i=1}^{d} \int_\Omega G_h^k(u_{h,i})q_h + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} h_F \int_F [\![p_h]\!]_F [\![q_h]\!]_F = 0, \qquad \forall q_h \in P_h,$$

où $(u_{h,1} \dots u_{h,d})$ sont les composantes Cartésiennes de la vitesse discrète et G_h^k est le gradient discret. Formuler l'équation ci-dessus sous forme locale en identifiant les flux.

2 Partie B

2.1 Transport linéaire (2 pts)

On considère l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_t u_h(t) + A_h^{\mathrm{up}} u_h(t) &= 0, \\ u_h(0) &= u_{0,h}, \end{aligned}$$

où A_h^{up} dénote l'opérateur associé à la forme bilinéaire DG upwind et $u_{0,h}$ est une fonction donnée. Trouver un ensemble de coefficients

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix}$$

tels que la méthode de Runge–Kutta

$$u_h^{n,0} = u_h^n, \qquad u_h^{n,i} = \sum_{j=1}^{i} (\alpha_{ij} u_h^{n,j-1} - \delta t \beta_{ij} A_h^{\mathrm{up}} u_h^{n,j-1}),\ i = 1,2,3, \qquad u_h^{n+1} = u_h^{n,3}$$

est d'ordre 3. Justifier le choix.

2.2 Lois de conservation non linéaires (2 pts)

a) Montrer qu'un flux numérique monotone est un E-flux, en précisant bien ces deux notions.

b) Dans le cas de l'équation de transport linéaire

$$\partial_t u + \nabla \cdot (\beta u) = 0,$$

préciser le flux numérique upwind $\Phi^{\mathrm{up}}(n_F, u^-, u^+)$ et montrer qu'il est monotone.

c) Toujours dans le cadre linéaire, préciser le flux numérique centré $\Phi^{\mathrm{c}}(n_F, u^-, u^+)$ et montrer qu'il ne peut pas être un E-flux.

2.3 Laplacien (4 pts)

a) Montrer que

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T \nabla v \cdot \nabla w + \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T \Delta v w = \sum_{F\in\mathcal{F}_h} \int_F \{\nabla_h v\} \cdot n_F [\![w]\!] + \sum_{F\in\mathcal{F}_h^i} [\![\nabla_h v]\!] \cdot n_F \{w\}$$

pour tout $v, w \in H^2(\Omega) + V_h$ où V_h est un espace polynomial brisé.

b) On admet le résultat suivant :

$$\forall v_h, w_h \in V_h, \qquad \left| \sum_{F\in\mathcal{F}_h} \int_F \{\nabla_h v_h\} \cdot n_F [\![w_h]\!] \right| \leq C_{\mathrm{tr}} N_\partial^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h v_h\|_{L^2(\Omega)} |w_h|_J.$$

Pour le schéma SIPG, donner la condition sur le paramètre de stabilité η et montrer la coercivité de la forme bilinéaire sous cette condition.

c) Soit $\ell \geq 0$ et soit l'opérateur de relèvement local $r_F^\ell : L^2(F) \to [\mathbb{P}_d^\ell(\mathcal{T}_h)]^d$ défini pour toute fonction $\varphi \in L^2(F)$ par

$$\int_\Omega r_F^\ell(\varphi) \cdot v_h = \int_F \varphi \{v_h\} \cdot n_F, \qquad \forall v_h \in [\mathbb{P}_d^\ell(\mathcal{T}_h)]^d.$$

Préciser le support de $r_F^\ell(\varphi)$ (avec preuve).

d) Montrer le résultat de stabilité

$$\forall \varphi \in L^2(F) : \qquad \|r_F^\ell(\varphi)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\mathrm{tr}} h_F^{-\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^2(F)},$$

en ayant droit de faire référence à l'inégalité de trace : $h_T^{\frac{1}{2}} \|v_h\|_{L^2(F)} \leq C_{\mathrm{tr}} \|v_h\|_{L^2(T)}$.

2.4 Implémentation (2 pts)

a) Mentionner toutes les sources d'erreurs possibles dans une implémentation de la méthode de Galerkin discontinue.

b) Quel est l'avantage de prendre des polynômes de Legendre comme fonctions de base locale pour $\mathbb{P}_1^k([-1,1])$ (donc dans le cas unidimensionel) pour des schémas instationnaires ? Pourquoi ne choisit-on pas la base $1, x, x^2, \ldots, x^k$?

c) Expliquer les avantages et les désavantages d'une méthode explicite pour la discrétisation en temps d'un problème instationnaire.

2.5 Advection-diffusion (2 pts)

Considérons l'équation de diffusion-advection-réaction : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q.

$$\nabla \cdot (-\kappa \nabla u + \beta u) + \tilde{\mu} u = f, \qquad \text{dans } \Omega,$$

où κ est un réel > 0, β un champ d'advection dans $W^{1,\infty}(\Omega)^d$ et $\tilde{\mu} \in L^\infty(\Omega)$ tel que $\tilde{\mu} + \frac{1}{2}\nabla \cdot \beta \geq 0$ dans Ω.

a) Soit la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ donnée par

$$a(v, w) = \int_\Omega \kappa \nabla v \cdot \nabla w - \int_\Omega v\beta \cdot \nabla w + \int_\Omega \tilde{\mu} v w, \qquad \forall v, w \in H_0^1(\Omega).$$

Montrer que

$$a(v, v) = \|\kappa^{\frac{1}{2}} \nabla v\|^2_{[L^2(\Omega)]^d} + \|(\tilde{\mu} + \tfrac{1}{2}\nabla \cdot \beta) v\|^2_{L^2(\Omega)}$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.

b) Interpréter la constante

$$\left(\|\kappa\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\Omega)} + \|\beta\|^{\frac{1}{2}}_{[L^\infty(\Omega)]^2} h^{\frac{1}{2}} \right)$$

et lui attribuer un ordre de convergence en h dans les deux cas de i) diffusion dominante et ii) advection dominante.