UPMC–M2R Parcours ANEDP
Méthodes de Galerkin Discontinues et Applications
Examen – 29 mars 2016

L'examen dure trois heures. Le seul document autorisé est, comme annoncé en cours, une feuille aide-mémoire manuscrite recto-verso format A4.

Analyse d'erreur (3 pts)

a) On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in V \text{ tel que} \\ a(u,w) = \ell(w), \quad \forall w \in W, \end{cases}$$

où V et W sont des espaces de Hilbert de normes $\|\cdot\|_V$ et $\|\cdot\|_W$, a une forme bilinéaire continue sur $V \times W$ et ℓ une forme linéaire continue sur W. Enoncer les conditions nécessaires et suffisantes pour que ce problème soit bien posé.

b) On considère un espace V_h de dimension finie et le problème discret

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a_h(u_h,w_h) = \ell(w_h), \quad \forall w_h \in V_h. \end{cases}$$

Que signifie que cette approximation est consistante ?

c) On suppose qu'il existe $C_{\text{sta}} > 0$ telle que

$$\forall v_h \in V_h, \qquad C_{\text{sta}} |||v_h||| \le \sup_{w_h \in V_h \setminus \{0\}} \frac{a_h(v_h,w_h)}{|||w_h|||},$$

où $|||\cdot|||$ est une norme définie sur $V_{(h)} := V + V_h$, et qu'il existe C_{bnd} telle que

$$\forall (v,w_h) \in V_{(h)} \times V_h, \qquad |a_h(v,w_h)| \le C_{\text{bnd}} |||v||| \, |||w_h|||.$$

Sous hypothèse de consistance, énoncer et démontrer une estimation d'erreur.

Advection-réaction (4 pts)

On considère l'équation d'advection-réaction stationnaire

$$\begin{aligned} \mu u + \beta \cdot \nabla u &= f \qquad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega^-, \end{aligned}$$

où $\mu \in L^\infty(\Omega)$, $\beta \in W^{1,\infty}(\Omega)^d$ avec $\mu - \frac{1}{2}\nabla\cdot\beta \ge \mu_0 > 0$ et $\partial\Omega^- = \{x \in \partial\Omega;\ \beta\cdot n(x) < 0\}$.

a) On considère l'approximation par Galerkin discontinu de ce problème en utilisant des flux upwind et l'espace polynomial brisé $\mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h)$, $k \geq 0$. Ecrire la forme bilinéaire discrète a_h (on précisera les notations employées).

b) Montrer que le problème discret se formule localement à l'aide de flux numériques que l'on précisera.

c) On suppose que la solution exacte est dans $H^1(\Omega)$. Montrer la consistance du problème discret.

d) Indiquer une norme pour laquelle la forme bilinéaire a_h est coercive. Indiquer une norme plus forte pour laquelle la forme bilinéaire a_h est inf-sup stable. On ne demande pas de preuves pour cette question.

Laplacien : SIPG (5 pts)

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w = \int_\Omega f w, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

a) Ecrire la forme bilinéaire Symmetric Interior Penalty pour approcher ce problème dans l'espace polynomial brisé $\mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h)$, $k \geq 1$.

b) Préciser la forme du paramètre de stabilisation et rappeler (sans preuve) quelles conditions il doit satisfaire pour assurer la coercivité de la forme bilinéaire.

c) Rappeler la définition du gradient discret $G_h^k(u_h)$.

d) Démontrer que le problème discret s'écrit sous forme locale avec le gradient discret et des flux numériques que l'on précisera.

e) Récrire le probème discret sous forme mixte en précisant les flux numériques pour l'inconnue discrète u_h et la variable duale σ_h (on rappelle que la variable duale exacte (le flux diffusif) est $\sigma = -\nabla u$).

Estimation d'erreur a posteriori (3 pts)

On considère à nouveau le problème de la question précédente et son approximation par la méthode Symmetric Interior Penalty.

a) Rappeler la définition de l'espace de Raviart–Thomas d'ordre $k \geq 0$ sur un maillage composé de simplexes.

b) Rappeler la construction d'un flux (diffusif) équilibré à partir de la solution discrète u_h. Montrer que la divergence de ce flux est la projection orthogonale du terme source f sur un espace à préciser.

c) Montrer une estimation a posteriori pour l'erreur $u - u_h$ mesurée dans la norme de stabilité pour la méthode Symmetric Interior Penalty (on utilisera le flux équilibré ci-dessus et une fonction arbitraire $s_h \in H_0^1(\Omega)$, dont on pourra indiquer un choix raisonnable).

Systèmes de Friedrichs (3 pts)

a) On considère $(d+1)$ champs $\{\mathcal{A}_i\}_{0\le i\le d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{m\times m}$, $m \ge 1$, et l'opérateur différentiel du premier ordre $Au = \mathcal{A}_0 u + \sum_{i=1}^{d} \mathcal{A}_i \partial_i u$ pour une fonction u à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Rappeler les hypothèses sur les champs $\mathcal{A}_i$ pour obtenir un système de Friedrichs.

b) Expliciter les champs $\mathcal{A}_i$ et vérifier les hypothèses ci-dessus pour le système grad-div où $u = (\sigma, p)$, σ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et p à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $A(\sigma, p) = (\sigma + \nabla u, u + \nabla\cdot\sigma)$.

c) Toujours pour le système grad-div, quels sauts pénalise-t-on dans une approximation par DG ?

Problèmes instationnaires (3 pts)

a) Donner la définition d'un flux numérique monotone et d'un E-flux. Montrer qu'un flux consistant monotone est un E-flux.

b) Dans le cas de l'équation de transport linéaire

$$\partial_t u + \nabla\cdot(\beta u) = 0,$$

préciser le flux numérique upwind et montrer qu'il est monotone.

c) Dans le cas non-linéaire $\partial_t u + \nabla\cdot f(u) = 0$, préciser le flux de Lax–Friedirchs.