Méthodes de décomposition et coordination pour l'optimisation avec mesure de risque

Henri Gérard - Michel De Lara - Jean-Christophe Pesquet

École des Ponts ParisTech – Labex Bézout

Exemple de problème d'optimisation stochastique

On écrit le problème avec deux agents

$$\min_{\boldsymbol{U}_a \in \mathbb{U}_a^\Omega, \boldsymbol{U}_b \in \mathbb{U}_b^\Omega} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[j(\underbrace{\boldsymbol{U}_a, \boldsymbol{U}_b}_{\text{contrôles}}, \underbrace{\boldsymbol{W}}_{\text{aléa}})\big] \tag{1a}$$

avec les contraintes suivantes

$$\text{s.c.} \begin{cases} \boldsymbol{U}_a \preceq \mathcal{G}_a \,, & \boldsymbol{U}_a \text{ mesurable par rapport à la tribu } \mathcal{G}_a \\ \boldsymbol{U}_b \preceq \mathcal{G}_b \,, & \boldsymbol{U}_b \text{ mesurable par rapport à la tribu } \mathcal{G}_b \end{cases} \tag{1b}$$

Le cas particulier d'une filtration où $\mathcal{G}_a \subset \mathcal{G}_b$ peut s'interpréter comme une révélation d'information au cours du temps

Malédiction de la dimension

Les solutions d'un problème d'optimisation stochastique multi-agents et/ou multi-étapes tel que (1) sont naturellement indicées par

- le temps discret : $t \in \{0, ..., T\}$
- les scénarios discrets : $\omega \in \Omega$ fini
- les agents discrets : $a \in \mathcal{A}$

Dès que le nombre de pas de temps, de scénarios et/ou d'agents est élevé, le problème devient presque impossible

Exemple 1. En prenant 10 pas de temps, 3 aléas possibles à chaque pas de temps et 5 agents, on obtient $\approx$ 300 000 variables

Nous présentons deux méthodes de décomposition lorsque la mesure de risque n'est plus additive

Objectifs d'une méthode de décomposition :

- Découper le problème initial en sous-problèmes d'optimisation abordables numériquement
  - Dans le cas multi-agents, on parle de décentralisation
  - Dans le cas multi-étapes, on parle de décomposition temporelle
- Permettre la résolution en parallèle de ces sous problèmes

Dans le cadre risque neutre, on utilise l'espérance qui est un opérateur linéaire se prêtant bien à la décomposition additive [1].
Nous développons deux méthodes de résolution lorsque l'espérance est remplacée par une mesure de risque $\mathbb{F}$ [3] comme suit :

$$\min_{\underbrace{\boldsymbol{U}_a \preceq \mathcal{G}_a, \boldsymbol{U}_b \preceq \mathcal{G}_b}_{\text{contraintes de mesurabilité}}} \overbrace{\mathbb{F}}^{\text{mesure de risque}} \big[\underbrace{j}_{\text{critère}}(\overbrace{\boldsymbol{U}_a, \boldsymbol{U}_b}^{\text{contrôles}}, \overbrace{\boldsymbol{W}}^{\text{aléa}})\big] \tag{2}$$

Décomposition temporelle et formulation imbriquée [2]

On se place dans le cadre particulier où $\mathcal{G}_a \subset \mathcal{G}_b$.
Une mesure de risque dynamique $(\mathbb{F}, \mathbb{F}_a, \mathbb{F}_b)$ a la propriété de cohérence temporelle si

$$\mathbb{F}[\boldsymbol{U}] = \mathbb{F}\Big[\underbrace{\mathbb{F}_a[\boldsymbol{U}]}_{\mathcal{G}_a-\text{mesurable}}\Big] = \mathbb{F}\Big[\mathbb{F}_a\Big[\underbrace{\mathbb{F}_b[\boldsymbol{U}]}_{\mathcal{G}_b-\text{mesurable}}\Big]\Big] \,, \quad \forall \boldsymbol{U} \in \mathbb{U}^\Omega$$

Théorème 1. *S'il existe une mesure de risque dynamique $(\mathbb{F}, \mathbb{F}_a, \mathbb{F}_b)$ et sous des hypothèses techniques, le problème (2) est équivalent à*

$$\mathbb{F}\Big[\min_{u_a \in \mathbb{U}_a} \mathbb{F}_a\Big[\min_{u_b \in \mathbb{U}_b} \mathbb{F}_b\big[j(u_a, u_b, \boldsymbol{W})\big]\Big]\Big]$$

Schéma de l'algorithme

- À u_a fixé, on résout le problème de minimisation en u_b
- On résout les différents problèmes en u_a en parallèle

Décomposition par dualisation des contraintes de mesurabilité

On étudie le problème (2) en écrivant d'une façon particulière les contraintes de mesurabilités :

$$\min_{\boldsymbol{U}_a \in \mathbb{U}_a^\Omega, \boldsymbol{U}_b \in \mathbb{U}_b^\Omega} \mathbb{F}\big[j(\boldsymbol{U}_a, \boldsymbol{U}_b, \boldsymbol{W})\big] \tag{3a}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\boldsymbol{U}_a \mid \mathcal{G}_a] = \boldsymbol{U}_a \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\boldsymbol{U}_b \mid \mathcal{G}_b] = \boldsymbol{U}_b \end{cases} \tag{3b}$$

Théorème 2. *Si la mesure de risque s'écrit sous la forme*

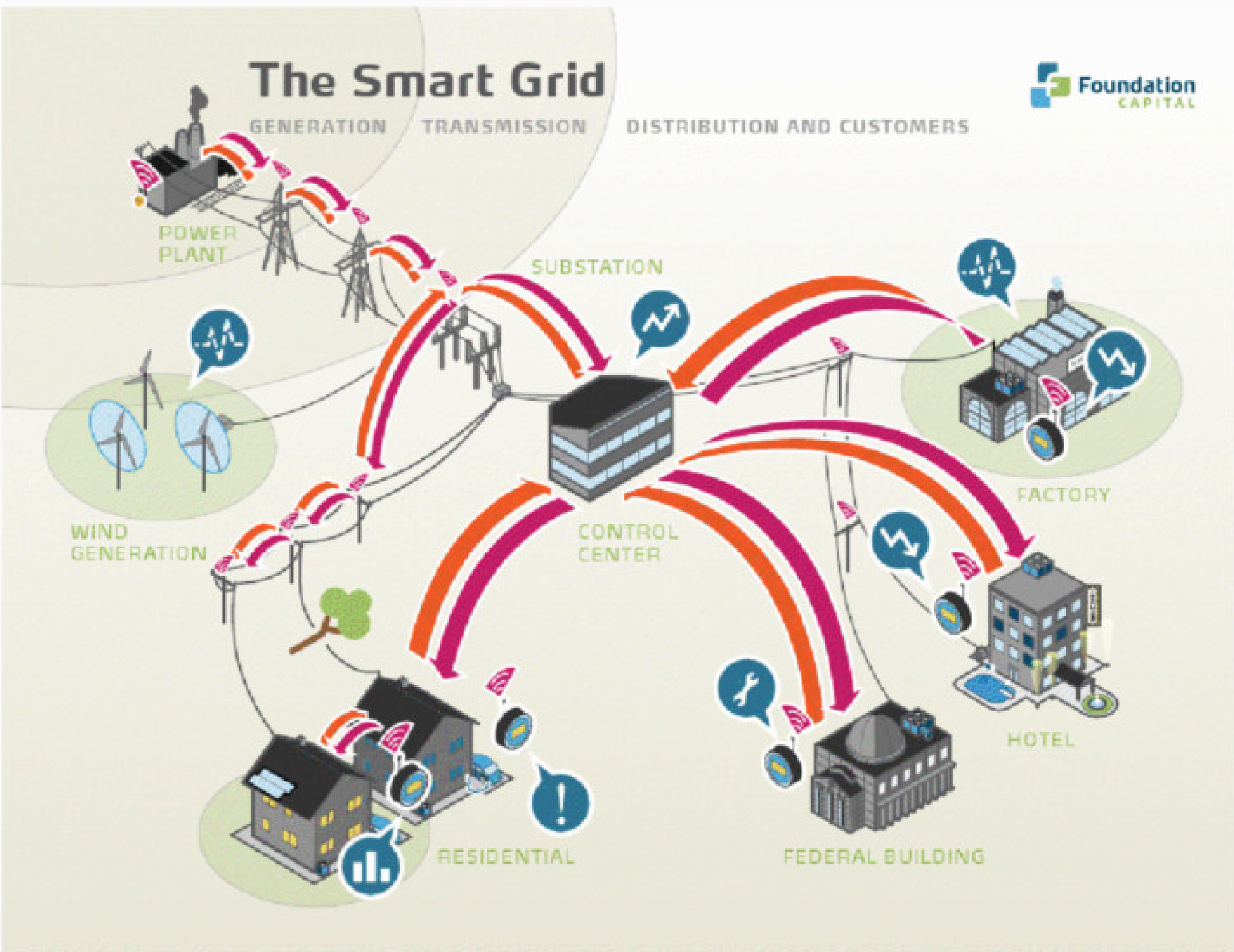
$$\mathbb{F}[\boldsymbol{U}] = \max_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathbb{F}}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{U}]$$

et sous des hypothèses techniques, on peut décomposer le problème (3) scénario par scénario

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\pi}_a \in (\mathbb{R}^{n_a})^\Omega, \boldsymbol{\pi}_b \in (\mathbb{R}^{n_b})^\Omega} \max_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathbb{F}}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[& \min_{u_a \in \mathbb{U}_a, u_b \in \mathbb{U}_b} j(u_a, u_b, \boldsymbol{W}) \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \\ & + \big(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\boldsymbol{\pi}_a \mid \mathcal{G}_a] - \boldsymbol{\pi}_a\big) u_a \\ & + \big(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\boldsymbol{\pi}_b \mid \mathcal{G}_b] - \boldsymbol{\pi}_b\big) u_b \Big] \end{aligned}$$

Schéma de l'algorithme

- À $(\boldsymbol{\pi}_a, \boldsymbol{\pi}_a)$ fixé, on résout le problème de minimisation en (u_a, u_b)
- On résout les différents problèmes ω par ω en parallèle et on met à jour les multiplicateurs $(\boldsymbol{\pi}_a, \boldsymbol{\pi}_a)$



Application au pilotage de systèmes énergétiques décentralisés

- Les nouveaux systèmes énergétiques utilisent de plus en plus d'énergies renouvelables intermittentes (vent, soleil)
- Cette stochasticité augmente le risque de déséquilibre entre offre et demande
- L'explosion du nombre de petits producteurs rend le réseau plus difficile à gérer de manière centralisée

References

[1] Kengy Barty, Pierre Carpentier, and Pierre Girardeau. Decomposition of large-scale stochastic optimal control problems. *RAIRO-Operations Research*, 44(03):167–183, 2010.

[2] Michel De Lara and Vincent Leclère. Building up time-consistency for risk measures and dynamic optimization. *European Journal of Operational Research*, 249(1):177–187, 2016.

[3] Hans Föllmer and Alexander Schied. *Stochastic finance: an introduction in discrete time.* Walter de Gruyter, 2011.