

# EMPILEMENT DE SPHÈRES/BOULES RÉSULTATS DE MARYNA VIAZOVSKA

DAVID GONTIER

RÉSUMÉ. Dans cet exposé, nous faisons le point sur ce qui est connu, conjecturé, et ouvert, pour le problème d'empilement de sphères. Nous montrons que l'arrangement triangulaire est optimale en dimension 2, et présentons la méthode de Cohn-Elkies (résolue par Viazovska) pour le problème en dimension 8.

## 1. INTRODUCTION

En guise d'apéritif, voici un petit problème (solution en Appendix A).

**Problème :** Peut-on ranger 401 biscuits ronds de rayon 1 dans une boîte rectangulaire de taille  $4 \times 400$  ?

Si on les place "naturellement", on peut ranger  $L$  biscuits dans une boîte de taille  $4 \times L$ . On veut donc savoir si on peut trouver une meilleure configuration !

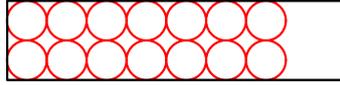


FIGURE 1. La façon naturelle de ranger des biscuits dans une boîte.

Ce type de problème s'appelle un problème de *packing*. Ces problèmes sont difficiles, à cause de la frontière (ici la boîte), et donnent de jolies images<sup>1</sup>.

Dans cet exposé, on s'intéressera au problème de packing dans tout l'espace (pas de frontière). On s'intéresse à l'empilement optimal de sphères dans l'espace  $\mathbb{R}^d$ . Le but est de trouver la disposition optimale pour les sphères (qui sont en fait des boules pleines), afin de perdre le moins de place possible. Dans la suite, on s'intéressera uniquement aux configurations périodiques (on peut montrer que ces configurations sont "denses" pour ce problème). On commence par quelques définitions.

**Définition 1.** Un **réseau** de  $\mathbb{R}^d$  est un ensemble discret  $\mathbb{L}$  de la forme

$$\mathbb{L} = \mathbf{a}_1\mathbb{Z} + \mathbf{a}_2\mathbb{Z} + \cdots + \mathbf{a}_d\mathbb{Z}, \quad \text{avec} \quad \det(A) \neq 0, \quad A := (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_d).$$

La **cellule unité** du réseau est l'ensemble

$$\Lambda := \mathbf{a}_1[0, 1) \times \mathbf{a}_2[0, 1) \times \cdots \times \mathbf{a}_d[0, 1),$$

de **volume**  $\text{Vol}_d(\Lambda) = |\det A|$ .

**Définition 2.** Un ensemble  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$  est une **configuration de points périodique** si il existe un réseau  $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^d$  tel que

$$\forall \mathbf{R} \in \mathbb{L}, \quad \mathcal{C} + \mathbf{R} = \mathcal{C},$$

et si  $\mathcal{C} \cap \Lambda = \{x_i\}_{i=1}^N$  est fini ( $N$  est le nombre de points de  $\mathcal{C}$  par cellule unité). Si  $N = 1$ , on a  $\mathcal{C} = \mathbb{L}$ , et la configuration est un réseau.

**Exemple 3** (Dimension  $d = 1$ ). Tous les réseaux de  $\mathbb{R}$  sont de la forme  $\mathbb{L} = a\mathbb{Z}$  avec  $a > 0$ . On a  $\Lambda = [0, a)$  de volume  $a$ .

**Exemple 4** (Réseau triangulaire en dimension  $d = 2$ ). Le réseau triangulaire est généré par les vecteurs  $\mathbf{a}_1 = a \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{a}_2 = a \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ .

Date : 26 septembre 2024.

1. <http://www.packomania.com/>

**Définition 5.** Le **rayon** d'une configuration de points est la quantité ( $|\cdot|$  est la norme euclidienne usuelle)

$$r(\mathcal{C}) := \frac{1}{2} \inf_{i \neq j} |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|.$$

Cela signifie qu'on peut placer des boules de rayon  $r$  aux centres  $\{\mathbf{x}_i\}$  sans qu'aucune boule n'intersecte une autre. On rappelle que le volume d'une boule de dimension  $d$ , et de rayon  $r$  est

$$\text{Vol}_d(\mathcal{B}_r) := \omega_d r^d, \quad \text{avec} \quad \omega_d := \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}(|\mathbf{x}| < 1) d\mathbf{x} = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}.$$

On définit l'ensemble des boules de centre  $\mathcal{C}$  par

$$\Omega_{\mathcal{C}} := \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{B}(\mathbf{x}_i, r) \subset \mathbb{R}^d, \quad \text{avec} \quad r = r(\mathcal{C}).$$

**Définition 6.** La **densité** d'une configuration de points périodique est la quantité

$$\rho(\mathcal{C}) := \frac{\text{Vol}_d(\Omega_{\mathcal{C}} \cap \Lambda)}{\text{Vol}_d(\Lambda)}.$$

**Remarque 7.**

- On a  $0 \leq \rho(\mathcal{C}) \leq 1$ .
- Pour tout  $\lambda > 0$ , l'ensemble dilaté  $\mathcal{C}_\lambda := \lambda\mathcal{C}$  est une configuration de points, et on a  $r(\mathcal{C}_\lambda) = \lambda r(\mathcal{C})$  et  $\mathcal{B}(0, \lambda R) \cap \mathcal{C}_\lambda = \lambda[\mathcal{B}(0, R) \cap \mathcal{C}]$ . En particulier,  $\rho(\mathcal{C}_\lambda) = \rho(\mathcal{C})$ .

On pourra toujours se ramener à un scaling de notre choix.

**Exemple 8** (Quelques exemple en dimension  $d = 2$ ).

- Réseau carré :  $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$ .
- Réseau triangulaire :  $\frac{\pi}{\sqrt{12}} \approx 0.9069$ .

Le problème d'empilement de sphère optimal peut s'énoncer comme suit.

**Problème d'empilement optimal :** Trouver le maximum (et les configurations maximisantes) de

$$\rho_d := \sup_{\substack{\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d \\ \mathcal{C} \text{ conf. pér.}}} \rho(\mathcal{C}).$$

## 2. LES DIMENSIONS 1, 2 ET 3

2.1. **La dimension  $d = 1$ .** En dimension  $d = 1$ , le résultat est évident.

**Théorème 1 : La dimension  $d = 1$**

On a  $\rho_{d=1} = 1$ , et les configurations minimisantes sont les réseaux périodiques  $a\mathbb{Z}$ ,  $a > 0$ .

2.2. **La dimension  $d = 2$ .** En dimension  $d = 2$ , la disposition optimale est le réseau triangulaire (cd Exemple 4). Ce résultat a été démontré par Lagrange en 1773 (en considérant uniquement des réseaux), puis par Thue en 1910 pour les configurations périodiques (la preuve est incomplète), et par Toth en 1940.

**Théorème 2 : La dimension  $d = 2$**

On a  $\rho_{d=2} = \frac{\pi}{\sqrt{12}} \approx 0.907$ , et le réseau optimal est le réseau triangulaire.

Nous présentons une preuve très rapide (4 pages) de Chang et Wang [CW10].

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{C}$  une configuration de points périodique **saturée** de rayon  $r = r(\mathcal{C})$  (on ne peut pas rajouter de points sans diminuer  $r$ ).

**Etape 1 : Construction d'une triangulation.** On projette les points sur la parabolôide  $3d$  d'équation  $\mathcal{P} : z = x^2 + y^2$ . Pour un point  $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on regarde son image  $p(\mathbf{x}) := (x, y, z = x^2 + y^2)$ . On obtient une famille de points sur  $\mathcal{P}$ .

Soit  $F$  l'enveloppe convexe de ces points de  $\mathcal{P}$ . Cette enveloppe est constituée de faces ayant pour sommets les points  $p(\mathbf{x}_i)$ . Quitte à rajouter des arêtes, on peut supposer que toutes les faces sont des triangles. On reprojette ces triangles sur le plan, et on obtient une triangulation  $\mathcal{T}$  de  $\mathcal{C}$  ( $\mathcal{T}$  est un ensemble de triangles).

**Proposition 3.** *La triangulation obtenue est une **triangulation de Delaunay**<sup>2</sup> : Si  $T \subset \mathcal{T}$ , alors le disque circonscrit à  $T$  contient uniquement les sommets de  $T$  (et aucun autre point de  $\mathcal{C}$ ).*

En effet, soit  $\mathcal{D}$  le tube ayant pour base le cercle circonscrit à un triangle  $T = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \in \mathcal{T}$ . Ce tube a pour équation  $\mathcal{D} : (x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 = r^2$ . L'intersection de  $\mathcal{C}$  et de la paraboloidé  $\mathcal{P}$  est

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ 0 = (x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 - r^2 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = \text{équation linéaire} \end{cases}$$

C'est donc aussi l'intersection entre  $\mathcal{P}$  et un plan. Et comme  $p(\mathbf{x}_1), p(\mathbf{x}_2), p(\mathbf{x}_3)$  appartiennent à cette intersection, c'est le plan qui passe par ces points. En particulier, ce plan fait partie de l'enveloppe convexe, et tous les autres points  $\mathbf{x}_i$  sont au-dessus de ce plan. Cela implique que  $\mathbf{x}_i$  est en dehors du cercle circonscrit.

**Etape 2 :** Si  $T = (ABC)$  est un triangle de Delaunay d'une configuration  $\mathcal{C}$  saturée, alors le plus grand angle  $\theta$  de  $T$  est compris entre

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{2\pi}{3}.$$

La première inégalité vient du fait que la somme des angles vaut  $\pi$ .

Supposons  $\theta \geq \frac{2\pi}{3}$ , et soit  $\alpha$  l'angle le plus petit. Comme la somme des angles vaut  $\pi$ , on doit avoir  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6}$ , donc  $0 \leq \sin \frac{\pi}{6} \leq \frac{1}{2}$ . Si  $R$  est le rayon du cercle circonscrit, on a (utiliser les angles inscrits pour le voir)

$$2R = \frac{BC}{\sin \alpha} \geq \frac{2r}{1/2} \geq 4r.$$

En particulier, le centre est à distance plus grande que  $2r$  de tous les points de  $\mathcal{C}$ , et peut rajouté à  $\mathcal{C}$  sans modifier le rayon. Cela contredit le fait que  $\mathcal{C}$  est saturée.

**Etape 3 :** Pour chaque triangle  $T$  de la triangulation, on a

$$\frac{\text{Vol}(T \cap \Omega_{\mathcal{C}})}{\text{Vol}(T)} \leq \frac{\pi}{\sqrt{12}}.$$

En effet, on a  $\text{Vol}(T \cap \Omega_{\mathcal{C}}) = \frac{1}{2}\pi r^2$ . Pour calculer l'aire de  $T$ , on utilise que le plus grand angle  $\theta$  (en  $B$  par exemple) vérifie  $\frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{2\pi}{3}$ , donc  $\sin(\theta) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ , avec égalité ssi  $\theta = \frac{\pi}{3}$ . On trouve

$$\text{Vol}(T) = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin(\theta) \geq \frac{1}{2}(2r)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}r^2$$

Ainsi

$$\frac{\text{Vol}(T \cap \Omega_{\mathcal{C}})}{\text{Vol}(T)} \leq \frac{1}{2}\pi r^2 \frac{1}{\sqrt{3}r^2} = \frac{\pi}{\sqrt{12}}.$$

**Etape 3 :** Du local au global. On a, pour tout  $R > 0$ ,

$$\text{Vol}_d(\Lambda \cap \Omega_{\mathcal{T}}) = \sum_{T} \text{Vol}(\Lambda \cap \Omega_{\mathcal{C}} \cap T) \leq \sum_{T} \text{Vol}(\Omega_{\mathcal{C}} \cap T) \leq \frac{\pi}{\sqrt{12}} \sum_{T} \text{Vol}(T).$$

et la dernière somme vaut  $\text{Vol}_d(\Lambda)$ .

On a **optimalité « locale »** si  $\theta = \frac{\pi}{3}$  pour tous les triangles, ce qui n'arrive que pour la configuration triangulaire.  $\square$

Par comparaison, voici la preuve que  $\mathcal{C}$  est optimale parmi les réseaux (calcul de Lagrange).

2. la triangulation de Delaunay n'est pas unique : on peut choisir l'origine de la parabole par exemple

*Démonstration.* Si on considère uniquement les réseaux, on se ramène à optimiser les vecteurs  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$  qui génère  $\mathbb{L}$ . Sans perte de généralité, on peut supposer  $\mathbf{a}_1 = a\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ . Si on note  $\mathbf{a}_2 = (b, c)^T$ , et qu'on cherche les configurations dont le rayon est au moins  $r = \frac{1}{2}$ , on obtient le problème de minimisation

$$\min \{|ac|, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}, (mb - na)^2 + (mc)^2 \geq 1\}.$$

En prenant  $m = 0$ , on trouve  $a \geq 1$ , et quitte à changer de base, on peut supposer  $-\frac{1}{2}a \leq b - a \leq \frac{1}{2}a$ . Dans ce cas, on trouve aussi  $(b - a)^2 \leq \frac{1}{4}a^2$ , donc  $c^2 \geq \frac{3}{4}a^2 \geq \frac{3}{4}$ . Ainsi, on a  $ac \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ , et on trouve

$$\rho(\mathbb{L}) = \frac{\pi}{4} \frac{1}{|ac|} \leq \frac{\pi}{4} \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{12}},$$

avec égalité ssi  $a = 1$ ,  $c = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $b = \frac{1}{2} + \mathbb{N}$ . □

**2.3. La dimension  $d = 3$ .** Le cas  $d = 3$  est le plus connu historiquement. Kepler formule en 1611 que la densité optimale en dimension  $d = 3$  est  $\frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 0.7405$ , et que la configuration optimale est le réseau bcc (body centered cubic).

La conjecture est démontré par Gauss en 1831 parmi les réseaux. Hilbert met la question dans son 18ème problème. En 1953, Tóth montre qu'on peut se ramener à vérifier que bcc est optimal parmi un nombre fini (immense) de configurations.

En 1998, Hales propose une démonstration et la soumet au prestigieux journal *Annals of Mathematics*. Une équipe de 12 chercheurs étudient la preuve pendant 4 ans, et disent en 2003 qu'ils sont sûrs à 99% que la preuve est correcte... Hales décide alors de prouver le théorème avec l'ordinateur. Il estime que cela lui prendra environ 20 ans. Il crée le programme **Flyspeck**<sup>3</sup> [Hal06], et en 2014, complète la preuve avec son équipe (22 personnes dont Hales). La preuve est acceptée en 2017. Il s'agit d'une des premières preuves formelles.

#### Théorème 4 : La dimension $d = 3$

La densité optimale est  $\rho_{d=3} = \frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 0.7405$ , et le réseau optimal est le réseau bcc.

**2.4. Et les dimensions supérieures ?** En plus grande dimension, rien n'est connu,... sauf en dimension 8 et 24 (comme nous allons le voir). Pendant plus de 100 ans, la seule borne inférieure connue était la borne de Minkowski (non constructive) sur les réseaux :

$$\max_{\mathcal{C} \text{ réseau}} \rho_d(\mathcal{C}) \geq \frac{\zeta(d)}{2^{d-1}} = O\left(\frac{1}{2^d}\right).$$

Une **conjecture** intéressante de Torquato<sup>4</sup> dit que les configurations optimales sont probablement désordonnées. Il conjecture la borne inférieure

$$\rho_d(\mathcal{C}) \geq O\left(\frac{1}{2^{0.77 \cdot d}}\right).$$

### 3. LA BORNE SUPÉRIEURE DE COHN-ELKIES

Il est relativement facile de construire une borne inférieure pour  $\rho_d$  : il suffit d'exhiber une configuration  $\mathcal{C}$  (par exemple un réseau). Il faut encore trouver des réseaux intéressants !

- Le réseau  $E_8 \subset \mathbb{R}^8$  a été trouvé vers les année 1800 (Grosset l'a étudié en détail en 1800)
- Le réseau Leech  $\Lambda_{24} \subset \mathbb{R}^{24}$  a été trouvé par Leech en 1967 (ou Witt en 1940)

En 2003, Cohn et Elkies publie un article remarquable dans *Annales of Mathematics* [CE03]. Remarquable, car il n'y a (presque) pas de preuves ! C'est uniquement une constatation numérique tellement incroyable,... qu'elle doit être vraie. Afin de présenter leur résultat, nous rappelons quelques points sur la transformée de Fourier.

3. <https://github.com/flyspeck/flyspeck>

4. <https://torquato.princeton.edu/research/ordered-and-disordered-packings/>

**3.1. Transformée de Fourier.** Soit  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ . On note  $\hat{f}$  ou  $\mathcal{F}_d(f)$  (pour insister sur la dimension) la transformée de Fourier de  $f$ .

$$\hat{f}(\mathbf{k}) := \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) e^{-i2\pi\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}.$$

On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des fonctions Schwartz, et  $\mathcal{S}_{\text{rad}}$  l'ensemble des fonctions Schwartz radiales. Par exemple :

$$\mathcal{S} := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

On rappelle les points suivants.

### Théorème 1 : Rappels en Fourier

— (Fourier inverse). Si  $f \in \mathcal{S}$ , alors

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\mathbf{x}) e^{i2\pi\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}. \quad \text{En particulier} \quad \hat{\hat{f}}(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x}).$$

— (Formule sommatoire de Poisson) Si  $f \in \mathcal{S}$ , on a, pour tout réseau  $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^d$ ,

$$\sum_{\mathbf{R} \in \mathbb{L}} f(\mathbf{x} + \mathbf{R}) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\mathbf{K} \in \mathbb{L}^*} \hat{f}(\mathbf{K}) e^{i2\pi\mathbf{x}\cdot\mathbf{K}}.$$

— (Transformée de Fourier de la Gaussienne). Pour  $a \in \mathbb{C}$  avec  $\text{Re}(a) > 0$ , on note  $G_a(x) := e^{-\pi a x^2}$  la Gaussienne de  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ . Alors

$$\mathcal{F}_d[G_a(x)](k) = \frac{1}{\sqrt{a}^d} G_{\frac{1}{a}}(k).$$

En particulier,  $e^{\pi x^2}$  (avec  $a = 1$ ) est invariant par la transformée de Fourier.

Dans la dernière formule,  $\mathbb{L}^*$  est le réseau **dual** de  $\mathbb{L}$  : si

$$\mathbb{L} = \mathbf{a}_1\mathbb{Z} + \mathbf{a}_2\mathbb{Z} + \cdots + \mathbf{a}_d\mathbb{Z}, \quad \text{avec} \quad \det((\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_d)) \neq 0,$$

alors

$$\mathbb{L}^* = \mathbf{a}_1^*\mathbb{Z} + \mathbf{a}_2^*\mathbb{Z} + \cdots + \mathbf{a}_d^*\mathbb{Z}, \quad \text{où les } \mathbf{a}_i^* \text{ vérifient} \quad \mathbf{a}_i^* \cdot \mathbf{a}_j = \delta_{ij}.$$

**Exemple 2.** Prenons  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  défini par  $f(x) = \mathbf{1}(|x| < 1/2)$ . On a, pour  $k \neq 0$ ,

$$\hat{f}(k) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i2\pi kx} dx = \left[ \frac{e^{-i2\pi kx}}{-i2\pi k} \right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{e^{-i\pi k} - e^{i\pi k}}{-2i\pi k} = \frac{\sin(\pi k)}{\pi k}.$$

**Exemple 3.** Prenons  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$g(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Un calcul (exercice, ou alors en remarquant que  $g = f * f$ ) montre que

$$\hat{g}(k) = \frac{\sin^2(\pi k)}{(\pi k)^2}.$$

**Exemple 4.** Soit  $\theta(z)$  la fonction définie par

$$\theta(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi n^2 z}. \quad (\text{Fonction de Jacobi}).$$

La série est convergente dès que  $z \in \mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C}, \text{Im}(z) > 0\}$ . Cette fonction vérifie (trivial)

$$\theta(z+2) = \theta(z).$$

De plus, si on applique la formule de Poisson à  $G_a$  avec  $a = -iz$ , on trouve que, pour tout  $z \in \mathbb{U}$ , on a

$$\theta(z) = \frac{1}{\sqrt{-iz}} \theta\left(-\frac{1}{z}\right).$$

**3.2. La borne supérieure.** Le résultat principal de Cohn-Elkies est le suivant (ici pour des réseaux).

**Théorème 5 : Cohn-Elkies**

Supposons qu'il existe une fonction  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  (par exemple dans  $\mathcal{S}_{\text{rad}}$ ) telle que

- $f(\mathbf{x}) \leq 0$  pour tout  $|\mathbf{x}| \geq 2r_0$ ;
- $\widehat{f}(\mathbf{k}) \geq 0$ ;
- $\widehat{f}(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) = 1$ .

Alors, pour tout réseau  $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^d$  avec  $r(\mathbb{L}) \geq r_0$ , on doit avoir  $|\Lambda| \geq 1$ .

Ce théorème marche aussi pour les configurations périodiques (la preuve fait une ligne de plus). Quitte à rescaler  $\mathbb{L}$ , on peut toujours se ramener au cas où  $r(\mathbb{L}) = r_0$ . Dans ce cas, on obtient

$$\rho_d(\mathbb{L}) = \omega_d \frac{r_0^d}{|\Lambda|} \leq \omega_d \cdot r_0^d.$$

*Démonstration.* On utilise la formule de Poisson. Supposons que  $r(\mathbb{L}) \geq r_0$ . Alors  $f(\mathbf{R}) \leq 0$  pour tout  $\mathbf{R} \in \mathbb{L} \setminus \{\mathbf{0}\}$ . Donc

$$1 = f(\mathbf{0}) \geq \sum_{\mathbf{R} \in \mathbb{L}} f(\mathbf{R}) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\mathbf{K} \in \mathbb{L}^*} \widehat{f}(\mathbf{K}) \geq \frac{1}{|\Lambda|} \widehat{f}(\mathbf{0}) = \frac{1}{|\Lambda|}.$$

Pour les configurations périodiques, le calcul est similaire : on note  $\mathcal{C} \cap \Lambda = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ .

$$\begin{aligned} 1 = f(\mathbf{0}) &\geq \sum_{\mathbf{R} \in \mathbb{L}} \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i, j \leq N} f(\mathbf{R} + \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = \frac{1}{N|\Lambda|} \sum_{\mathbf{K} \in \mathbb{L}^*} \sum_{1 \leq i, j \leq N} \widehat{f}(\mathbf{K}) e^{i2\pi(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \cdot \mathbf{K}} \\ &= \frac{1}{N|\Lambda|} \sum_{\mathbf{K} \in \mathbb{L}^*} \widehat{f}(\mathbf{K}) \left| \sum_{1 \leq i \leq N} e^{i2\pi \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{K}} \right|^2 \geq \frac{1}{|\Lambda|} f(\mathbf{0}) N. \end{aligned}$$

□

**Exemple 6** (Retour sur la dimension 1). *La fonction  $g$  de l'exemple 3 vérifie les conditions du Théorème avec  $r_0 = \frac{1}{2}$ , donc*

$$\rho_{d=1} \leq 2 \frac{1}{2} = 1.$$

*On le savait déjà, mais on remarque qu'il existe une fonction  $g$  de Cohn-Elkies qui permet d'avoir la borne optimale.*

Dans la suite de l'article [CE03], les auteurs optimisent la fonction  $f$ , et cherchent numériquement la meilleure (plus petite) valeur de  $r_0$ . Ils comparent leur résultat avec les densités des réseaux connus, et voici ce qu'ils observent.

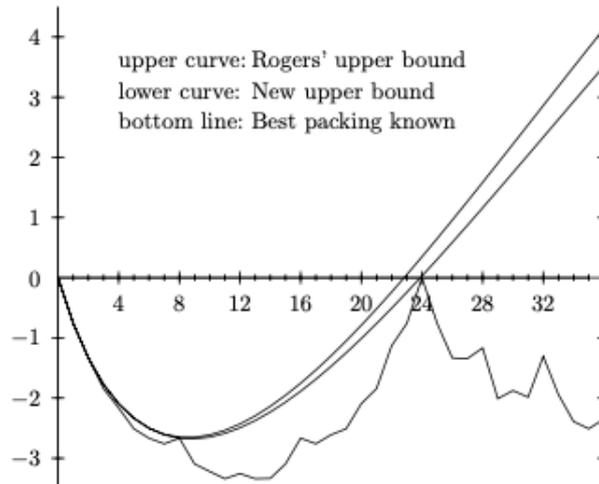


Figure 1. Plot of  $\log_2 \delta + n(24 - n)/96$  vs. dimension  $n$ .

Pour les dimensions 1, 2, 8 et 24, il semble que la borne supérieure est égale à la borne inférieure ! Il y a égalité avec précision  $10^{-100}$  (100 chiffres significatifs).

Pour les autres dimensions, on ne sait rien (sauf en  $d = 3$ ) : on ne sait pas si la borne inférieure du dessin est optimale !

**3.3. Condition pour l'optimalité.** Supposons qu'il existe un réseau  $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^d$  et une fonction  $f$  comme avant telle que

$$r(\mathbb{L}) = r_0, \quad \text{et} \quad |\Lambda| = 1.$$

Dans ce cas là, on en déduit que a/ le réseau  $\mathbb{L}$  est optimal, b/ la fonction  $f$  est optimale, et c/  $r_0$  est optimal.

Ceci ne peut arriver que si on a égalité partout. On doit donc avoir (on rappelle qu'on a supposé  $f$  radiale)

$$f(\mathbf{0}) = \widehat{f}(\mathbf{0}) = 1, \quad \begin{cases} \forall \mathbf{R} \in \mathbb{L} \setminus \{\mathbf{0}\}, & f(|\mathbf{R}|) = 0, \\ \forall \mathbf{K} \in \mathbb{L}^* \setminus \{\mathbf{0}\}, & \widehat{f}(|\mathbf{K}|) = 0. \end{cases}$$

Dans la suite, on note

$$Z_{\mathbb{L}} := \{|\mathbf{R}|, \quad \mathbf{R} \in \mathbb{L}\}.$$

Par optimalité, on doit avoir  $2r_0 \in Z_{\mathbb{L}}$ . Enfin, comme  $f$  a un signe après  $2r_0$ , on obtient

$$(3.1) \quad \boxed{f(0) = \widehat{f}(0) = 1, \quad f(2r_0) = 0, \quad \begin{cases} \forall R \in Z_{\mathbb{L}} \setminus \{0, 2r_0\}, & f(R) = 0, \quad f'(R) = 0, \\ \forall R \in Z_{\mathbb{L}^*} \setminus \{0\}, & \widehat{f}(R) = 0, \quad \widehat{f}'(R) = 0. \end{cases}}$$

Après être arrivé là, voici ce que dit Henry Cohn dans sa présentation de Maryna Viazovska à l'ICMP 2022 [Coh22].

*When Elkies and I proposed this method in 1999, Viazovska was still in secondary school. Without realizing how profoundly difficult the remaining step was, I imagined that we had almost solved the sphere packing problem in eight and twenty-four dimensions, and our inability to find the magic functions was extremely frustrating. At first, I worried that someone else would find an easy solution and leave me feeling foolish for not doing it myself. Over time I became convinced that obtaining these functions was in fact difficult, and others also reached the same conclusion. For example, Thomas Hales has said that I felt that it would take a Ramanujan to find it [19]. **Eventually, instead of worrying that someone else would solve it, I began to fear that nobody would solve it, and that I would someday die without knowing the outcome.** I am grateful that Viazovska found such a satisfying and beautiful solution, and that she introduced wonderful new ideas for the mathematical community to explore.*

#### 4. LE TRAVAIL DE MARYNA VIAZOVSKA

Maryna Viazovska est née en 1984 à Kiev. Elle y étudie jusqu'en 2010, puis part à Bonn pour faire une thèse sous la direction de Don Zagier et Werner Müller. Depuis 2018, elle est professeure à l'EPFL (Lausanne).

**4.1. Le réseau  $E_8$ .** On peut commencer par se demander pourquoi le réseau  $E_8$  est aussi spécial. On note  $D_d$  le réseau

$$D_d := \left\{ (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d, \quad \sum_i x_i \in 2\mathbb{Z} \right\}, \quad (\text{réseau échiquier}).$$

Il est généré par  $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{a}_j = \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{j-1}$ . Il se trouve que  $D_{d=3}$  correspond au réseau bcc (optimal pour  $d = 3$ ), et que  $D_{d=4}$  et  $D_{d=5}$  semble être optimal en dimension 4 et 5 (c'est une conjecture).

**Remarque 1.** Pour le réseau  $\mathbb{Z}^d$ , on a  $|\Lambda| = 1$  et  $r_0 = \frac{1}{2}$ , ce qui donne

$$\rho_d(\mathbb{Z}^d) = \omega_d \cdot \frac{1}{2^d}.$$

Pour le réseau  $D_d$ , on a  $|\Lambda| = 2$  et  $r_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , donc

$$\rho_d(D_d) = \omega_d \cdot \frac{1}{2^{d/2}} \frac{1}{2} = \omega_d \cdot \frac{1}{2^{\frac{d}{2}+1}}.$$

ce qui est plus grand que  $\rho_d(\mathbb{Z}^d)$  pour  $d \geq 3$ . Pour  $d = 3$ , on a  $\rho_3(D_3) = \frac{4}{3}\pi \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{18}}$  (on retrouve Kepler).

Quel est le point de  $\Lambda$  le plus loin des sommets de  $\Lambda$ ? Le point  $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$  est à distance  $\sqrt{\frac{d}{4}}$  de l'origine et de tous les  $\mathbf{a}_j$  pour  $j \geq 2$ . Lorsque  $d = 8$ , il est à distance  $\sqrt{2} = 2r(D_d)$ . Cela signifie que le réseau

$$E_8 := D_8 \cup (D_8 + (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})), \quad \text{vérifie aussi } r(E_8) = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Il est généré par  $\mathbf{a}_0 = 2\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{a}_j = \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{j-1}$ ,  $\mathbf{a}_8 = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ , et donc  $|\Lambda| = 1$  pour ce réseau. Ceci montre que

$$\rho_8(E_8) = \text{Vol}_8(\mathcal{B}(0, 1)) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}^8} = \frac{\pi^4}{4!} \frac{1}{16} = \frac{\pi^4}{384} \approx 0.2536.$$

Les seules propriétés essentielles que nous allons utiliser pour  $E_8$  sont les suivantes :

**Proposition 2.**

- Pour le réseau  $E_8$ , on a  $|\Lambda| = 1$  (on dit que le réseau est unimodulaire...)
- On a  $(E_8)^* = E_8$ .
- On a  $Z_{E_8} = \{\sqrt{2n}, n \in \mathbb{N}\}$ .

*Démonstration.* Pour le dernier point, si  $\mathbf{x} \in D_8$ , on a  $\sum x_i \in 2\mathbb{Z}$ , donc il y a un nombre pair de coefficients impairs  $x_i$ . Ceci montre que  $\sum x_i^2 \in 2\mathbb{N}$ . De même, si  $\mathbf{y} \in D_8 + (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ , on écrit  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ , et on a

$$|\mathbf{y}|^2 = \sum_i (x_i + \frac{1}{2})^2 = \mathbf{x}^2 + \sum_i x_i + 8 \frac{1}{4} \in 2\mathbb{N}.$$

Réciproquement, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on utilise le théorème de Lagrange, qui dit que  $n$  est la somme de 4 carrés :  $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ , donc  $2n = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2$ , et on considère  $\mathbf{x} = (a, a, b, b, c, c, d, d)$ .  $\square$

**4.2. Le théorème de Viazovska (and co.)** Comme  $Z_{E_8}$  est très simple à décrire, les conditions précédentes de l'Eq (3.1) prennent la forme suivante. Nous cherchons une fonction  $f \in \mathcal{S}_{\text{rad}}$  (radiale dans  $\mathbb{R}^8$ ) telle que

$$f(0) = \widehat{f}(0) = 1, \quad f(\sqrt{2}) = 0, \quad \forall n \geq 2, \quad f(\sqrt{2n}) = f'(\sqrt{2n}) = \widehat{f}(\sqrt{2n}) = \widehat{f}'(\sqrt{2n}) = 0.$$

Le théorème suivant est dû à Cohn, Kumar, Miller, Radchenko et Viazovska [Coh+22].

**Théorème 3 : Une identité pour les fonctions radiales en dimension  $d = 8$ .**

Il existe des fonctions Schwartz radiales  $(a_n, b_n)$  telle que, pour toute fonction  $f$  Schwartz radiale de  $\mathbb{R}^8$  dans  $\mathbb{C}$ , on a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\sqrt{2n})a_n(x) + f'(\sqrt{2n})b_n(x) + \widehat{f}(\sqrt{2n})\widehat{a}_n(x) + \widehat{f}'(\sqrt{2n})\widehat{b}_n(x).$$

Dans le cas de la preuve de Cohn et Elkies, il suffit d'étudier la fonction

$$f_{\text{CE}}(x) := \lambda b_1(x),$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}$  est choisi pour vérifier la relation  $f(0) = \widehat{f}(0) = 1$  (la première implique la seconde par Poisson). Il faut encore vérifier que la fonction  $f$  obtenue est positive! Cette dernière étape a nécessité une preuve par ordinateur. C'est ce qu'a fait Maryna Viazovska dans son article [Via17]. Comme l'ont remarqué les auteurs précédemment suivant, l'Ansatz qu'elle a proposé dans cet article peut être généralisé pour obtenir le Théorème précédent.

4.3. **Le cas plus simple.** Pour illustrer la preuve de Viazovska, nous allons démontrer le théorème suivant, dû à Radchendko et Viazovska en 2019 [RV19].

**Théorème 4 : Une identité pour les fonctions paires en dimension  $d = 1$ .**

Il existe des fonctions paires  $a_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Schwartz telles que, pour toute fonction paire  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Schwartz, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) f(\sqrt{n}) + \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{a}_n(x) \widehat{f}(\sqrt{n}).$$

Autrement dit, si  $f$  est paire, nous pouvons reconstruire entièrement  $f$  à partir des données  $f(\sqrt{n})$  et  $\widehat{f}(\sqrt{n})$ .

*Démonstration.* Afin d'illustrer la méthode de preuve, nous allons construire la fonction

$$g_0 := a_0 + \widehat{a}_0.$$

Cette fonction vérifie

$$\widehat{g}_0 = g_0, \quad g_0(0) = 1, \quad \forall n \geq 1, \quad g_0(\sqrt{n}) = 0.$$

L'idée de la preuve est de chercher  $g$  sous la forme

$$(4.1) \quad g_0(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \psi(z) e^{i\pi z x^2} dz, \quad \text{avec} \quad \psi(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m e^{i\pi m z},$$

et où le contour d'intégration est un demi-cercle dans le plan supérieur  $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}$ . La somme pour  $\psi$  est la décomposition en série de Fourier de  $\psi$ , vue comme une fonction 2-périodique. Pour commencer, on remarque que (on suppose qu'on peut inverser intégrale et somme)

$$g_0(\sqrt{n}) = \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m \int_{-1}^1 e^{i\pi m z} e^{i\pi z n} dz = \alpha_{-n}.$$

Notre condition sur  $g_0$  implique donc que tous les coefficients  $\alpha_m$  sont nuls pour  $m < 0$ , et  $\alpha_0 = 1$ . De plus, en passant la transformée de Fourier sur la Gaussienne, on a

$$\widehat{g}(k) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \psi(z) \frac{1}{\sqrt{-iz}^d} e^{i\pi \left(\frac{-1}{z}\right) k^2} dz.$$

En faisant le changement de variable  $u = \frac{-1}{z}$  (donc  $du = \frac{1}{z^2} dz = u^2 dz$ ), on trouve (attention, on change l'orientation de l'intégrale, d'où le signe  $-$ )

$$\widehat{g}(k) = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \psi\left(-\frac{1}{u}\right) \sqrt{iu} e^{i\pi u k^2} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \psi\left(-\frac{1}{u}\right) \frac{1}{\sqrt{-iu}^3} e^{i\pi u k^2} du.$$

Ainsi,  $g_0$  vérifie  $\widehat{g}_0 = g_0$  si

$$\psi\left(\frac{-1}{z}\right) = \sqrt{-iz}^3 \psi(z).$$

On cherche donc une fonction  $\psi$  2-périodique qui vérifie cette propriété...

Il se trouve que la fonction  $\theta^3$  vérifie toutes ces hypothèses, où  $\theta$  est la fonction de Jacobi introduite en Exercice 4. On a

$$\theta(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\pi n^2 z}, \quad \text{donc} \quad \theta^3(z) = 1 + \sum_{N=1}^{\infty} \alpha_N e^{i\pi N z}.$$

On peut remarquer que  $\alpha_N \in \mathbb{N}$  vaut

$$\begin{aligned} \alpha_N &= 2 \times \{\text{nombre de façon d'écrire } N = n^2\} \\ &\quad + 4 \times \{\text{nombre de façon d'écrire } N = n_1^2 + n_2^2\} \\ &\quad + 8 \times \{\text{nombre de façon d'écrire } N = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\}. \end{aligned}$$

□

**4.4. Les formes modulaires.** Grâce à son Ansatz magique (4.1), Viazovska fait le lien entre la transformée de Fourier et les fonctions  $\psi$  holomorphes sur  $\mathbb{U}$ , qui vérifient

$$\psi(z+2) = \psi(z), \quad \text{et} \quad \psi\left(\frac{-1}{z}\right) = \sqrt{-iz}^k \psi(z).$$

**Définition 5.** Soit  $k \in \mathbb{Z}$ . Une fonction  $\phi$  est une **faiblement modulaire** de poids  $2k$  si  $\phi$  est méromorphe sur  $\mathbb{U}$ , et vérifie

$$\phi(z+1) = \phi(z), \quad \text{et} \quad \phi\left(\frac{-1}{z}\right) = z^{2k} \phi(z).$$

Par périodicité, on peut écrire

$$\phi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i2\pi z} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n q^n, \quad q = e^{i2\pi z}.$$

( $z \in \mathbb{U}$  implique  $|q| < 1$ . La limite  $z \rightarrow \infty$  correspond à  $q \rightarrow 0$ .)

**Définition 6.** Une fonction  $f$  est une **forme modulaire** de poids  $2k$  si  $f$  est une fonction faiblement modulaire avec  $a_n = 0$  pour tout  $n < 0$ .

Le nom vient du fait que

$$\phi\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k \phi(z),$$

pour tout

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), ad - bc = 1 \right\}. \quad (\text{groupe modulaire}).$$

Ces formes modulaires ont des propriétés tout à fait remarquables, qui rejoint de nombreuses branches des mathématiques. C'est pour avoir fait le lien entre des quasi-formes modulaires et la transformée de Fourier que Maryna Viazovska a eu la médaille Fields.

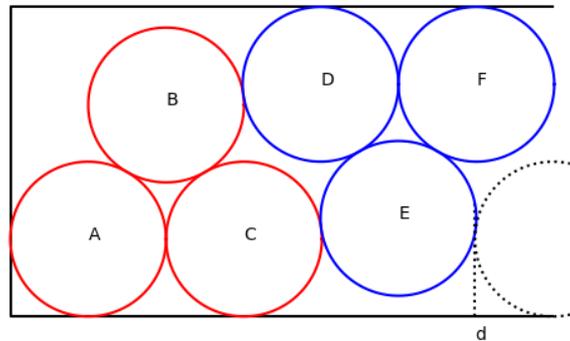
**4.5. Et la dimension 2 ?** Bien qu'on connaisse le réseau optimal en dimension  $d = 2$ , on ne connaît pas la fonction de Cohn-Elkies qui permet de retrouver le résultat. Un des problèmes est que pour le réseau triangulaire  $A_2 \subset \mathbb{R}^2$ , on a

$$Z_{A_2} := \{N = n^2 + nm + m^2, (n, m) \in \mathbb{N}\} = \{N = a^2 + 3b^2, (a, b) \in \mathbb{N}\}.$$

On cherche une fonction  $f$  qui s'annule à l'ordre 2 sur tous les points de  $Z_{A_2}$ , et cet ensemble semble difficile à décrire.

#### ANNEXE A. SOLUTION DU PROBLÈME

L'idée est de mettre les biscuits 6 par 6, en répétant la configuration suivante <sup>5</sup>



Calculons  $d$  sur la figure. On note  $(x_A, y_A)$  les coordonnées du centre du disque A, etc. On trouve directement

$$(x_A, y_A) = (1, 1) \quad \text{et} \quad (x_C, y_C) = (3, 1).$$

5. Voir aussi <https://www.ceremade.dauphine.fr/~gontier/Problemes/les-biscuits-dans-la-boite.html>

De plus, comme les centres des cercles  $(A, B, C)$  forment un triangle équilatéral, on trouve

$$(x_B, y_B) = (2, 1 + \sqrt{3}).$$

On a aussi :  $y_D = 3$ . Le nombre  $x_D$  est plus complexe à trouver. En écrivant que la distance  $BD$  est 2, on obtient le système

$$\begin{cases} (x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2 = 4 \\ y_D = 3 \end{cases}$$

ce qui donne  $x_D^2 - 4x_D + 7 - 4\sqrt{3} = 0$ , et donc  $x_D = 2 + \sqrt{4\sqrt{3} - 3}$ . En répétant ces calculs, on déduit que  $d = 2(x_D - 1)$ , et enfin  $d = 2 + 2\sqrt{4\sqrt{3} - 3} \approx 5.963939$ .

On remarque que  $d < 6$ , on a donc réussi à placer 6 biscuits sur une distance strictement plus petite que 6. Si on répète l'opération 56 fois, on place  $56 \times 6 = 336$  biscuits dans une boîte de longueur  $1 + 56 \times d \approx 334.98 < 335$  (le 1 vient du fait que le dernier biscuit  $F$  dépasse au dessus), et, en rajoutant un biscuit dans le coin en bas à droite, on place 337 biscuits dans une boîte de taille 336.

#### ANNEXE B. QUELQUES RÉFÉRENCES

- Pour comprendre le travail de Viazovska, voici un article écrit par Henri Cohn sur son travail [Coh22].
- Le texte de Viazovska pour sa médaille Fields [Via21].
- Des vidéos de Viazovska à l'IHES sur Youtube <https://www.youtube.com/watch?v=xALXm2XHDWc>.
- Pour les formes modulaires, le livre de Jean Pierre Serre [Ser12]
- Plusieurs conférences dans l'exposé Bourbaki :
  - Yves Meyer sur les mesures cristallines, et le théorème Radchenko-Viazovska []
  - Joseph Oesterlé sur ces résultats [Oes17]
  - Joseph Oesterlé sur la preuve de Hales [Oes98]
  - Joseph Oesterlé sur Cohn-Elkies [Oes89]

#### RÉFÉRENCES

- [CE03] H. COHN et N. ELKIES. « New upper bounds on sphere packings I ». In : *Annals of Mathematics* (2003), p. 689-714.
- [Coh+22] H. COHN, A. KUMAR, S. MILLER, D. RADCHENKO et M. VIAZOVSKA. « Universal optimality of the  $E_8$  and Leech lattices and interpolation formulas ». In : *Annals of Mathematics* 196.3 (2022), p. 983-1082.
- [Coh22] H. COHN. « The work of Maryna Viazovska ». In : *arXiv preprint arXiv:2207.06913* (2022).
- [CW10] H.-C. CHANG et L.-C. WANG. « A simple proof of Thue's theorem on circle packing ». In : *arXiv preprint arXiv:1009.4322* (2010).
- [Hal06] T. C. HALES. « Introduction to the Flyspeck project ». In : *Dagstuhl Seminar Proceedings*. Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum für Informatik. 2006.
- [Oes17] J. OESTERLÉ. « Densité maximale des empilements de sphères en dimension 3 ». In : *Séminaire BOURBAKI* (2017), 69ème.
- [Oes89] J. OESTERLÉ. « Empilements de spheres ». In : *Séminaire Bourbaki* 90 (1989), p. 189-190.
- [Oes98] J. OESTERLÉ. « Densité maximale des empilements de sphères en dimension 3 ». In : *Séminaire Bourbaki* 41 (1998), p. 405-413.
- [RV19] D. RADCHENKO et M. VIAZOVSKA. « Fourier interpolation on the real line ». In : *Publications mathématiques de l'IHÉS* 129 (2019), p. 51-81.
- [Ser12] J.-P. SERRE. *A course in arithmetic*. T. 7. Springer Science & Business Media, 2012.
- [Via17] M. S. VIAZOVSKA. « The sphere packing problem in dimension 8 ». In : *Annals of Mathematics* (2017), p. 991-1015.
- [Via21] M. VIAZOVSKA. « Almost impossible E and Leech lattices ». In : *European Mathematical Society Magazine* 121 (2021), p. 4-8.