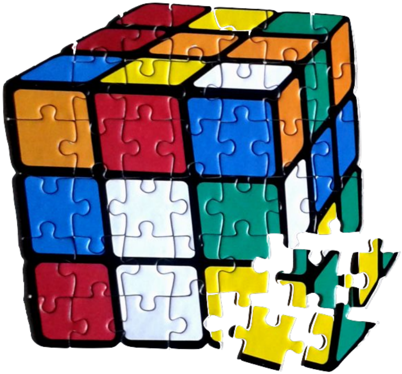
Casse-têtes et mathématiques



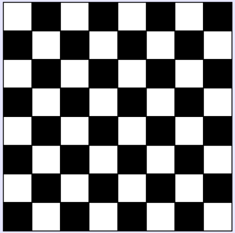
David Gontier

Samedi 30 mars 2024

MATh.en.JEANS

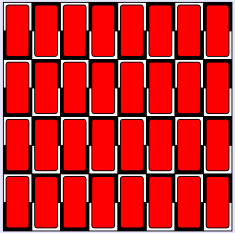
Problème 1

Peut-on “paver” un échiquier 8×8 avec des dominos 2×1 ?



Problème 1

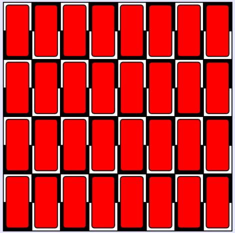
Peut-on “paver” un échiquier 8×8 avec des dominos 2×1 ?



OUI

Problème 1

Peut-on “paver” un échiquier 8×8 avec des dominos 2×1 ?

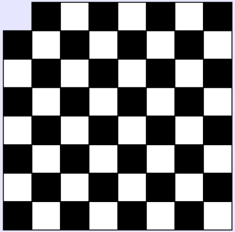


OUI

Il existe 12,988,816 solutions...

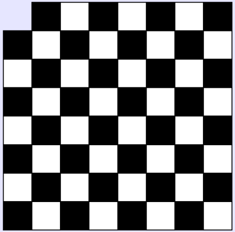
Problème 2

Et si on retire une case ?



Problème 2

Et si on retire une case ?



NON

Il y a $8 \times 8 - 1 = 63$ cases,

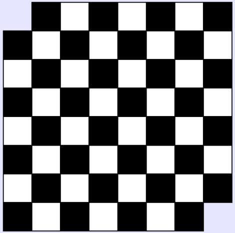
Chaque domino recouvre 2 cases,

Donc N dominos recouvrent $2N$ cases,

Et 63 est impair.

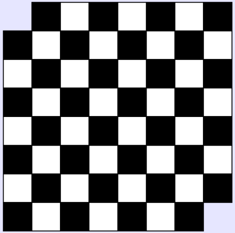
Problème 3

Et si on retire deux cases “opposées” ?



Problème 3

Et si on retire deux cases “opposées” ?



NON

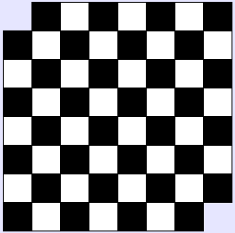
Chaque domino recouvre 1 case blanche et 1 case noire,

N dominos recouvrent N cases blanches et N cases noires,

Il y a 32 cases noires, et 30 cases blanches

Problème 3

Et si on retire deux cases “opposées” ?



NON

Chaque domino recouvre 1 case blanche et 1 case noire,

N dominos recouvrent N cases blanches et N cases noires,

Il y a 32 cases noires, et 30 cases blanches

Il s’agit d’un de mes problèmes préférés.

Solution simple et élégante à un problème d’apparence difficile (*le moment “Ha-ha !”*).

Qu'est ce qu'un bon casse-tête ?

Qu'est ce qu'un bon casse-tête ?

Un problème d'apparence simple, mais (très) difficile.

Qu'est ce qu'un bon casse-tête ?

Un problème d'apparence simple, mais (très) difficile.

Attention : il doit y avoir une solution !

Qu'est ce qu'un bon casse-tête ?

Un problème d'apparence simple, mais (très) difficile.

Attention : il doit y avoir une solution !

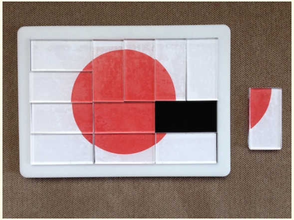
Dans l'exemple précédent, on aimerait conserver le nombre de possibilités ($\sim$ 12,988,816), mais rajouter une règle pour en sélectionner une seule "bonne" !

Qu'est ce qu'un bon casse-tête ?

Un problème d'apparence simple, mais (très) difficile.
Attention : il doit y avoir une solution !

Dans l'exemple précédent, on aimerait conserver le nombre de possibilités ($\sim$ 12,988,816), mais rajouter une règle pour en sélectionner une seule "bonne" !

HINOMARU puzzle (Pavel Curtis, 2001)



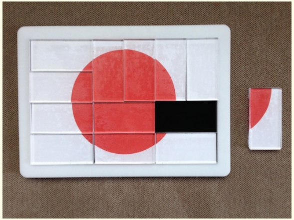
Qu'est ce qu'un bon casse-tête ?

Un problème d'apparence simple, mais (très) difficile.

Attention : il doit y avoir une solution !

Dans l'exemple précédent, on aimerait conserver le nombre de possibilités ($\sim$ 12,988,816), mais rajouter une règle pour en sélectionner une seule "bonne" !

HINOMARU puzzle (Pavel Curtis, 2001)



Encore mieux s'il y a le **moment "Ha-ha !"**.

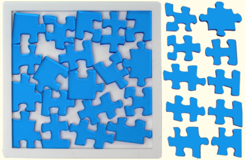
1. Les puzzles (*jigsaw puzzles*).

Le plus grand puzzle du monde (551,232 pièces, Vietnam 2011).

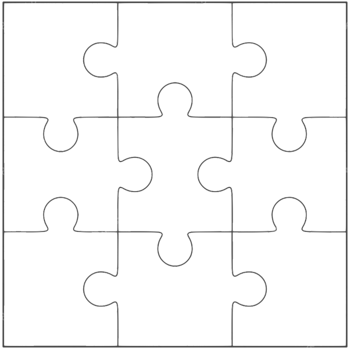
Un puzzle 42.000 pièces

Un puzzle blanc

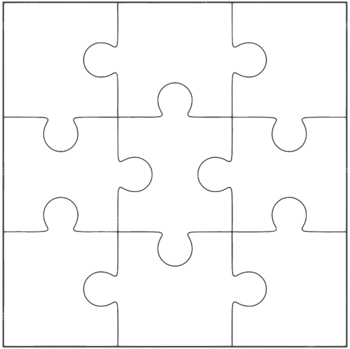
Puzzle 29 (Yuu Asaka)



Quel est le puzzle 3×3 le plus difficile ?



Quel est le puzzle 3×3 le plus difficile ?



On cherche un ensemble de 9 pièces qui donne le *minimum* de solutions.

Un peu de combinatoire.

- De combien de façons différentes peut-on mettre 9 petits carrés dans un grand ?

Un peu de combinatoire.

- De combien de façons différentes peut-on mettre 9 petits carrés dans un grand ?

Il y a $9! = 9 \times 8 \times \cdots \times 1$ façons de placer les 9 carrés, et chaque carré à 4 orientations possibles.

$\Longrightarrow \ 9! \times 4^9 = 95.126.814.720.$

Étant donné 9 pièces, il peut être difficile de compter le nombre de solutions !

Un peu de combinatoire.

- De combien de façons différentes peut-on mettre 9 petits carrés dans un grand ?

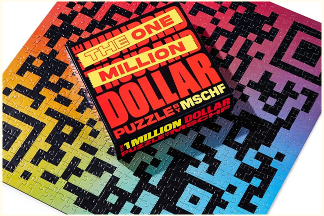
Il y a $9! = 9 \times 8 \times \cdots \times 1$ façons de placer les 9 carrés, et chaque carré à 4 orientations possibles.

$\implies 9! \times 4^9 = 95.126.814.720.$

Étant donné 9 pièces, il peut être difficile de compter le nombre de solutions !

Eternity II (Christopher Monckton)

The one million dollar puzzle (MSCHF)



- Combien de pièces différentes existe-t-il ?

- Combien de pièces différentes existe-t-il ?

Une pièce a 4 bords, chaque bord peut-être “droit”, “entrant” ou “sortant”.
$\Longrightarrow\ 3^4 = 81$ pièces différentes.

- Combien de pièces différentes existe-t-il ?

Une pièce a 4 bords, chaque bord peut-être “droit”, “entrant” ou “sortant”.
$\Longrightarrow\ 3^4 = 81$ pièces différentes.

- Combien de pièces *non équivalentes* différentes existe-t-il (rotation et retournement) ?

- Combien de pièces différentes existe-t-il ?

Une pièce a 4 bords, chaque bord peut-être “droit”, “entrant” ou “sortant”.
$\Longrightarrow\ 3^4 = 81$ pièces différentes.

- Combien de pièces *non équivalentes* différentes existe-t-il (rotation et retournement) ?

Difficile ! (mais facile pour un ordinateur). 21 pièces non équivalentes.

- Combien de pièces différentes existe-t-il ?

Une pièce a 4 bords, chaque bord peut-être “droit”, “entrant” ou “sortant”.
$\Longrightarrow\ 3^4 = 81$ pièces différentes.

- Combien de pièces *non équivalentes* différentes existe-t-il (rotation et retournement) ?

Difficile ! (mais facile pour un ordinateur). 21 pièces non équivalentes.

- Combien de puzzles 3×3 différents existe-t-il ?

- Combien de pièces différentes existe-t-il ?

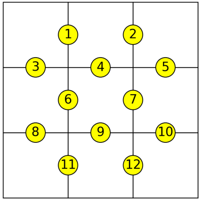
Une pièce a 4 bords, chaque bord peut-être "droit", "entrant" ou "sortant".
$\Longrightarrow\ 3^4 = 81$ pièces différentes.

- Combien de pièces *non équivalentes* différentes existe-t-il (rotation et retournement) ?

Difficile ! (mais facile pour un ordinateur). 21 pièces non équivalentes.

- Combien de puzzles 3×3 différents existe-t-il ?

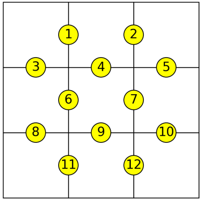
Il y a 12 bords *internes* dans un puzzle. Chaque bord peut être "droit", "entrant" ou "sortant".
$\Longrightarrow\ 3^{12} = 531.441$ puzzles différents.

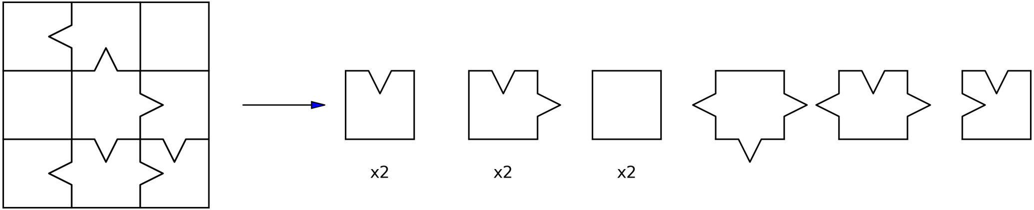


Idée d'algorithme

- Générer tous les puzzles possibles.
- Pour chaque puzzle, enregistrer la liste des pièces qui le compose.
- Chercher la liste des pièces qui apparaît le minimum de fois.

($\sim$ 3 minutes sur mon ordinateur).

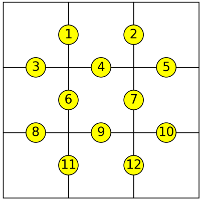


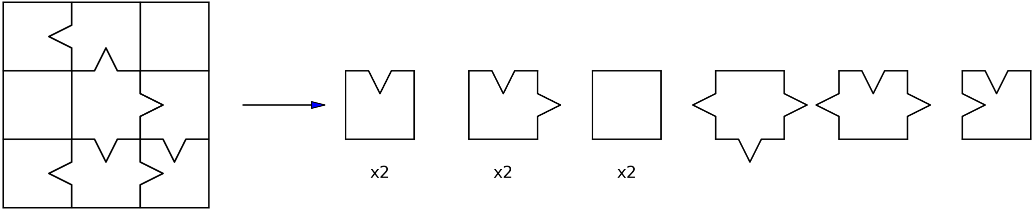


Idée d'algorithme

- Générer tous les puzzles possibles.
- Pour chaque puzzle, enregistrer la liste des pièces qui le compose.
- Chercher la liste des pièces qui apparaît le minimum de fois.

($\sim$ 3 minutes sur mon ordinateur).

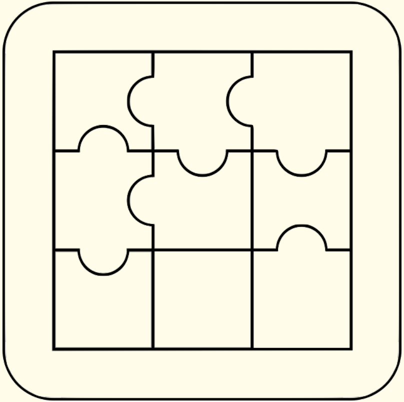




On trouve 18 puzzles avec une unique solution (à symétrie près) !

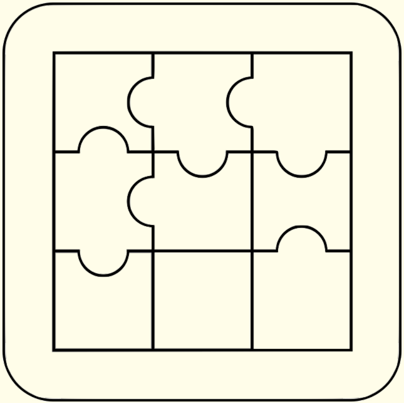
Résultat

9 pièces, DG 2020



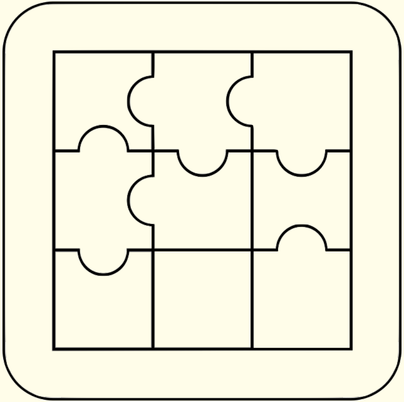
Résultat

9 pièces, DG 2020



Résultat

9 pièces, DG 2020

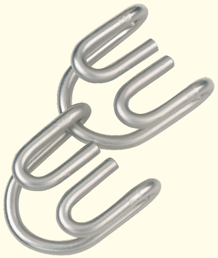


Comptez entre 10 et 20 minutes pour le résoudre...

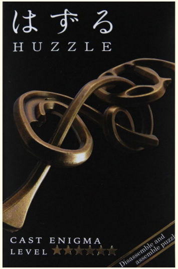
2. Les casse-têtes emboités (*interlocking*).

Puzzles manipulables avec peu de pièces,... et difficiles !

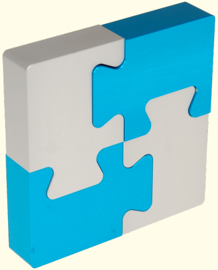
Les usuels



Les *Hanayamas*



4-pieces (Wil Strijbos)



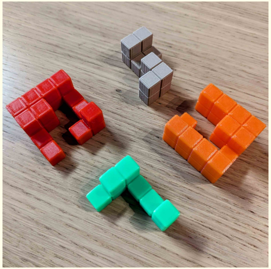
Le *challenge* initial (Bram Cohen & Richard Gain)

Créer un casse-tête 3d de taille $4 \times 4 \times 4$, avec 4 pièces, **imprimable**, et qui nécessite 5 mouvements (ou plus) pour retirer la première pièce.

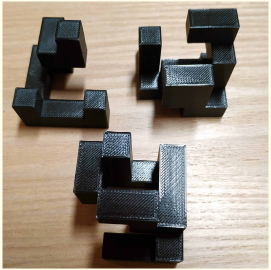
Le *challenge* initial (Bram Cohen & Richard Gain)

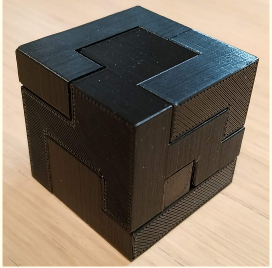
Créer un casse-tête 3d de taille $4 \times 4 \times 4$, avec 4 pièces, **imprimable**, et qui nécessite 5 mouvements (ou plus) pour retirer la première pièce.

Interlocking 1 (DG 2019)

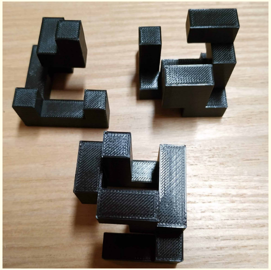
 

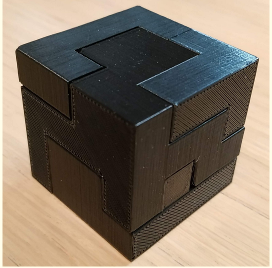
Interlocking 2 (DG 2019)





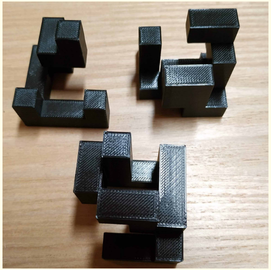
Interlocking 2 (DG 2019)

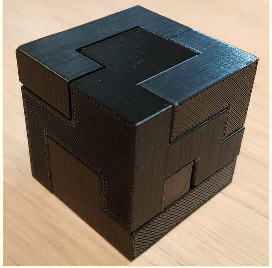




En bois par Rzvvl2

Interlocking 2 (DG 2019)



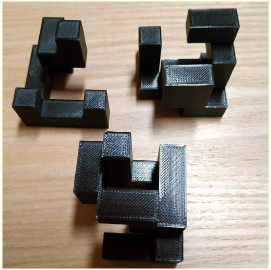


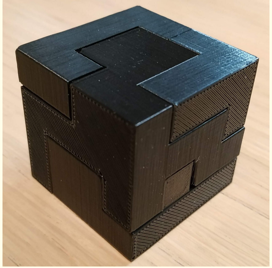
En bois par Rzvvl2

Il faut faire 10 mouvements pour retirer la première pièce...

https://youtu.be/0jzQRQPS1aE

Interlocking 2 (DG 2019)





En bois par Rzvvl2

Il faut faire 10 mouvements pour retirer la première pièce...

https://youtu.be/0jzQRQPS1aE

Questions :

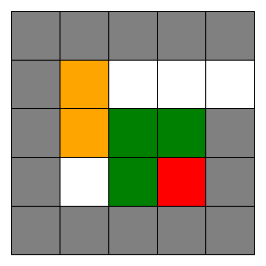
- Comment résoudre un tel puzzle avec un ordinateur ?
- Comment générer des puzzles difficiles ?

Résolution d'un casse-tête "géométrique"

Rush Hour (Nob Yoshigahara)

Anti-Virus Mutation (SmartGames)

Peut-on sortir la pièce rouge ?

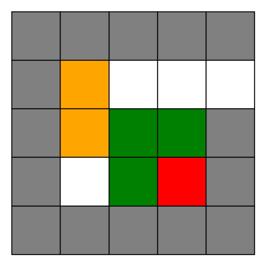


Résolution d'un casse-tête "géométrique"

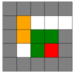
Rush Hour (Nob Yoshigahara)

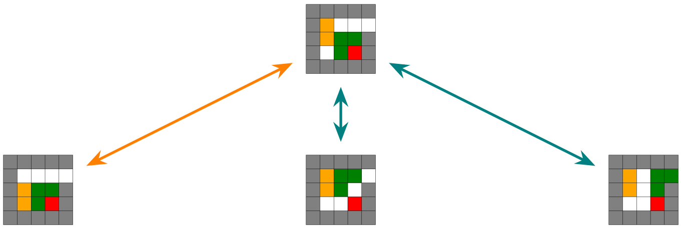
Anti-Virus Mutation (SmartGames)

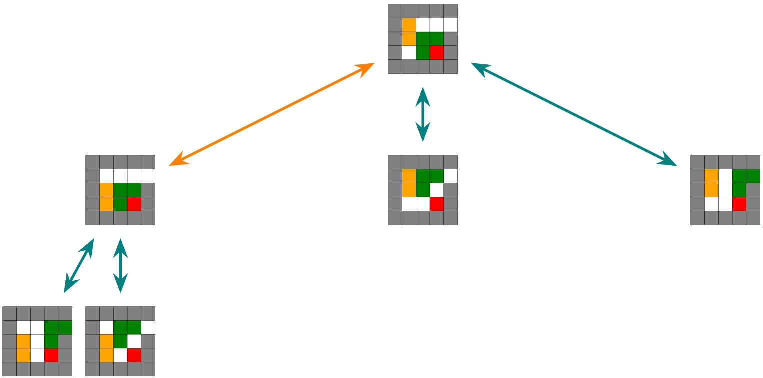
Peut-on sortir la pièce rouge ?

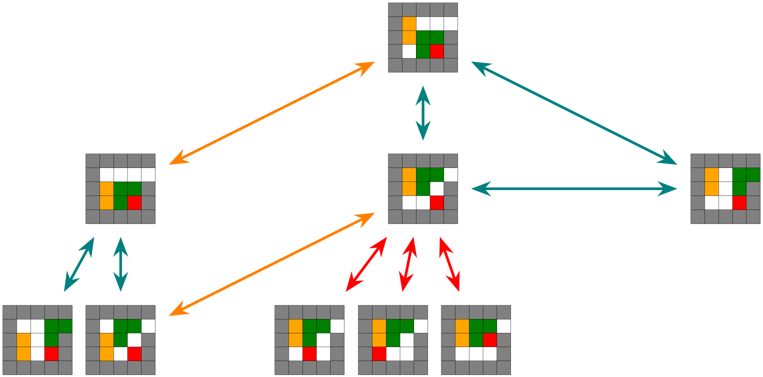


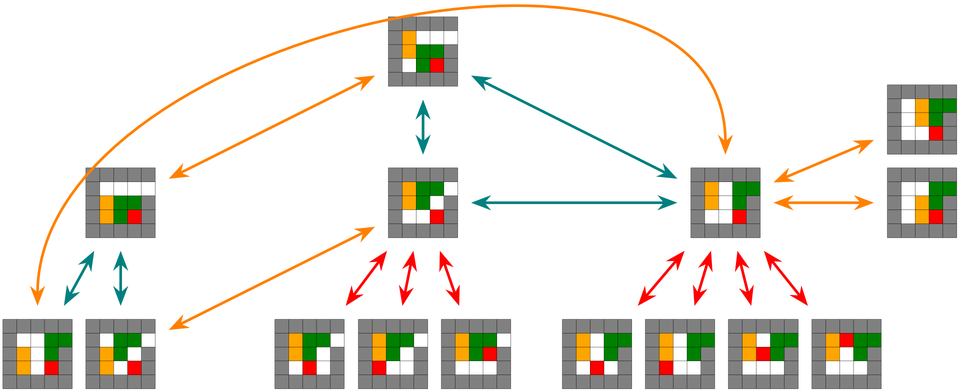
Idée : Construire le **graphe** des configurations.

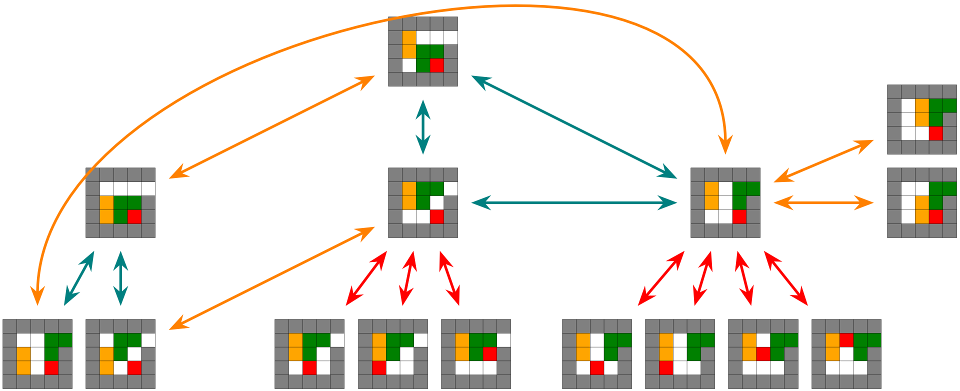








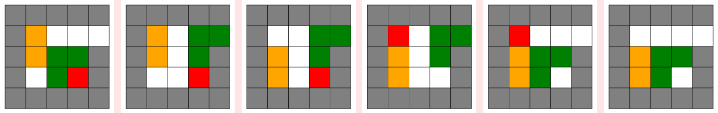




ETC...

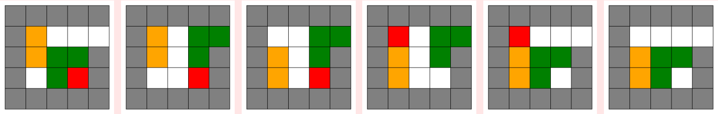
Il faut imaginer un labyrinthe, où :
les salles sont les configurations du puzzle,
et les couloirs sont les mouvements possibles.

Solution



Pour ce puzzle, il y a 5 mouvements pour sortir, et le labyrinthe a 37 salles.

Solution

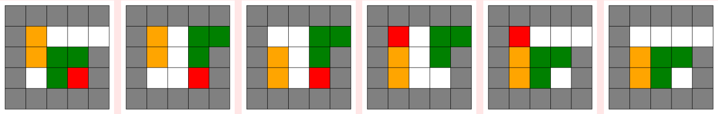


Pour ce puzzle, il y a 5 mouvements pour sortir, et le labyrinthe a 37 salles.

Anti-Virus Mutation ($\sim$ niveau 60)

44 mouvements pour sortir,
le labyrinthe a 1796 salles.

Solution



Pour ce puzzle, il y a 5 mouvements pour sortir, et le labyrinthe a 37 salles.

Anti-Virus Mutation ($\sim$ niveau 60)

44 mouvements pour sortir,
le labyrinthe a 1796 salles.

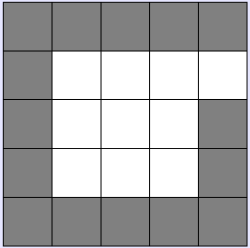
Rubik's Cube (Rubik, 1974)

Le labyrinthe a $2^{10} \times 3^7 \times 12! \times 8! =$
43.252.003.274.489.856.000 salles...

Comment créer des puzzles difficiles ?

Problème

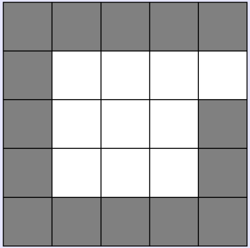
Combien de puzzles de “ce type” existe-il (3 pièces) ?



Comment créer des puzzles difficiles ?

Problème

Combien de puzzles de “ce type” existe-il (3 pièces) ?



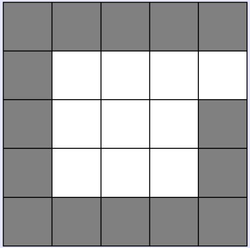
- Chaque case peut être vide ou une des 3 pièces.
- Il y a 9 cases.
- Donc $4^9 = 262.144$ puzzles.

Ici, on pourrait énumérer tous les puzzles, et chercher le plus difficile.

Comment créer des puzzles difficiles ?

Problème

Combien de puzzles de “ce type” existe-il (3 pièces) ?



- Chaque case peut être vide ou une des 3 pièces.
- Il y a 9 cases.
- Donc $4^9 = 262.144$ puzzles.

Ici, on pourrait énumérer tous les puzzles, et chercher le plus difficile.

Pour Anti-Virus Mutation, il y a 25 cases, et 6 pièces : $7^{25} \sim 10^{21}$ puzzles.

Pour les cubes 3d, il y a $4 \times 4 \times 4 = 64$ cases, et 3 pièces : $4^{64} = 10^{38}$ puzzles.

Il faut une autre méthode...

Idée : recherches aléatoires

On définit une fonction **score** à chaque puzzle P, par exemple

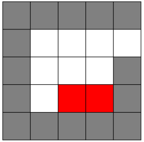
$$\mathbf{score}(P) = \begin{cases} 0 & \text{si } P \text{ n'est pas valide (pièce non connexe par exemple),} \\ & \text{ou s'il n'y a pas de solutions} \\ M(P) & \text{nombre de mouvements pour résoudre le puzzle sinon.} \end{cases}$$

Idée d'algorithme

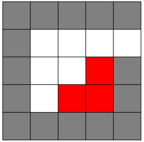
- 1/ Commencer avec un puzzle $P_{n=0} = P_0$ initial donné (par exemple le puzzle vide).
- 2/ Faire un *flip* : choisir une case aléatoirement, et changer sa couleur $\implies \widetilde{P}_{n+1}$.
- 3/ On pose

$$P_{n+1} = \begin{cases} \widetilde{P}_{n+1} & \text{si} \quad \mathbf{score}(\widetilde{P}_{n+1}) \geq \mathbf{score}(P_n) \qquad \textit{(on accepte le flip)} \\ P_n & \text{sinon} \qquad \textit{(on refuse le flip).} \end{cases}$$

Exemple :

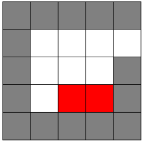


P_0 : score = 1

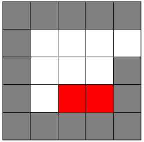


$\widetilde{P}_0$: score = 0

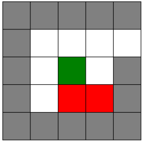
Exemple :



P_0 : score = 1

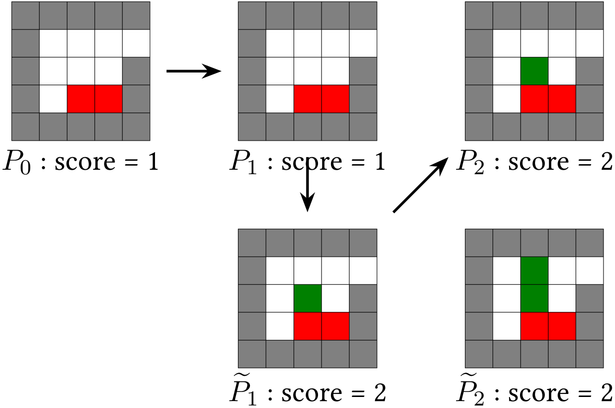


P_1 : score = 1

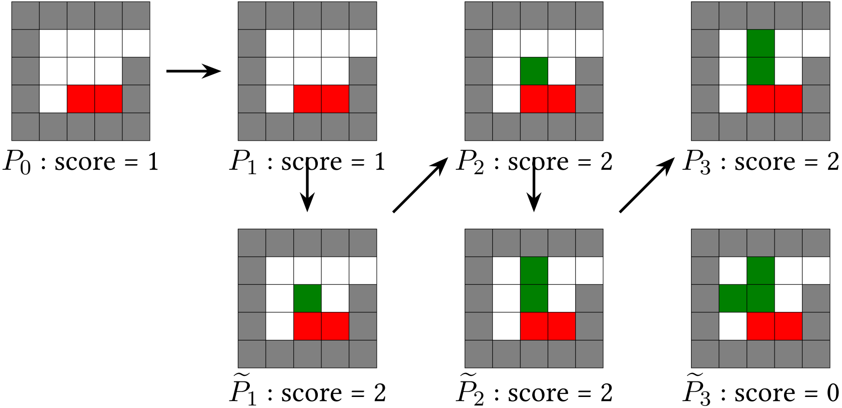


$\widetilde{P}_1$: score = 2

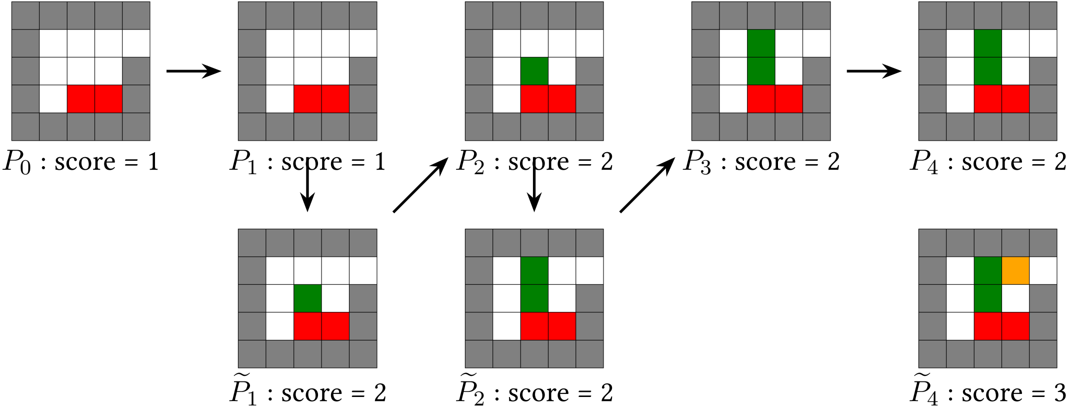
Exemple :


P_0 : score = 1
P_1 : score = 1
P_2 : score = 2
$\widetilde{P}_1$: score = 2
$\widetilde{P}_2$: score = 2

Exemple :

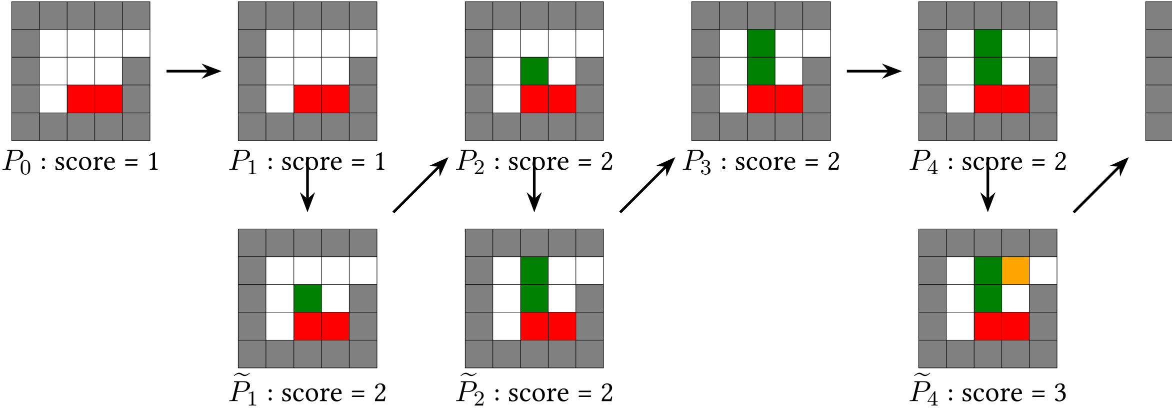

P_0 : score = 1
P_1 : score = 1
P_2 : score = 2
P_3 : score = 2
$\widetilde{P}_1$: score = 2
$\widetilde{P}_2$: score = 2
$\widetilde{P}_3$: score = 0

Exemple :



P_0 : score = 1
P_1 : score = 1
P_2 : score = 2
P_3 : score = 2
P_4 : score = 2
$\widetilde{P}_1$: score = 2
$\widetilde{P}_2$: score = 2
$\widetilde{P}_4$: score = 3

Exemple :



ETC.

En pratique, on lance la recherche des milliers/millions de fois.

Amélioration : À partir de P_n, faire plein de *flips* aléatoires, et prendre le meilleur.

3. Les casse-têtes *papier-crayon* (*Sudoku*).

	2	3			9		8	1
9	1	7	2		8		6	
5	8			1		7		
8	9							6
7	3	5	6	8	1	2		
1			9			8	3	7
		9		2				8
	7	8	1		4	9		
2	5	1	8	9		6		

	2	3			9		8	1
9	1	7	2		8		6	
5	8			1		7		
8	9							6
7	3	5	6	8	1	2		
1			9			8	3	7
		9		2				8
	7	8	1		4	9		
2	5	1	8	9		6		

6	2	3	5	7	9	4	8	1
9	1	7	2	4	8	5	6	3
5	8	4	3	1	6	7	9	2
8	9	2	4	3	7	1	5	6
7	3	5	6	8	1	2	4	9
1	4	6	9	5	2	8	3	7
4	6	9	7	2	5	3	1	8
3	7	8	1	6	4	9	2	5
2	5	1	8	9	3	6	7	4

	2	3			9		8	1
9	1	7	2		8		6	
5	8			1		7		
8	9							6
7	3	5	6	8	1	2		
1			9			8	3	7
		9		2				8
	7	8	1		4	9		
2	5	1	8	9		6		

6	2	3	5	7	9	4	8	1
9	1	7	2	4	8	5	6	3
5	8	4	3	1	6	7	9	2
8	9	2	4	3	7	1	5	6
7	3	5	6	8	1	2	4	9
1	4	6	9	5	2	8	3	7
4	6	9	7	2	5	3	1	8
3	7	8	1	6	4	9	2	5
2	5	1	8	9	3	6	7	4

Sudoku / *Number place* (*su* = number, *doku* = single)

Règles : Chaque chiffre n'apparaît qu'une fois par colonne, par ligne, et par carré.

	2	3			9		8	1
9	1	7	2		8		6	
5	8			1		7		
8	9							6
7	3	5	6	8	1	2		
1			9			8	3	7
		9		2				8
	7	8	1		4	9		
2	5	1	8	9		6		

6	2	3	5	7	9	4	8	1
9	1	7	2	4	8	5	6	3
5	8	4	3	1	6	7	9	2
8	9	2	4	3	7	1	5	6
7	3	5	6	8	1	2	4	9
1	4	6	9	5	2	8	3	7
4	6	9	7	2	5	3	1	8
3	7	8	1	6	4	9	2	5
2	5	1	8	9	3	6	7	4

Sudoku / *Number place* (*su* = number, *doku* = single)

Règles : Chaque chiffre n'apparaît qu'une fois par colonne, par ligne, et par carré.

- Devenu viral en 2004. Les ventes de crayons à papier font +700% en 2005…

	2	3			9		8	1
9	1	7	2		8		6	
5	8			1		7		
8	9							6
7	3	5	6	8	1	2		
1			9			8	3	7
		9		2				8
	7	8	1		4	9		
2	5	1	8	9		6		

6	2	3	5	7	9	4	8	1
9	1	7	2	4	8	5	6	3
5	8	4	3	1	6	7	9	2
8	9	2	4	3	7	1	5	6
7	3	5	6	8	1	2	4	9
1	4	6	9	5	2	8	3	7
4	6	9	7	2	5	3	1	8
3	7	8	1	6	4	9	2	5
2	5	1	8	9	3	6	7	4

Sudoku / *Number place* (*su* = number, *doku* = single)

Règles : Chaque chiffre n'apparaît qu'une fois par colonne, par ligne, et par carré.

- Devenu viral en 2004. Les ventes de crayons à papier font +700% en 2005...
- Il existe 5,472,730,538 grilles complètes différentes (à symétries près).

AI Everest (2012, Arto Inkala)

8								
		3	6					
	7			9		2		
	5				7			
				4	5	7		
			1				3	
		1					6	8
		8	5				1	
	9					4		

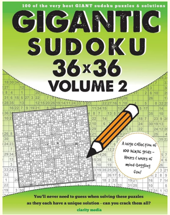
Le Sudoku le plus difficile au monde

AI Everest (2012, Arto Inkala)

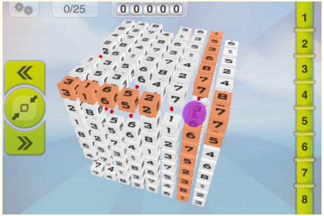
8								
		3	6					
	7			9		2		
	5				7			
				4	5	7		
			1				3	
		1					6	8
		8	5				1	
	9					4		

Le Sudoku le plus difficile au monde

Sudoku 36×36



Sudoku 3d (Kuboku)



Comment résoudre un Sudoku ?

Candidat unique

?				6	7	8		9
	3	5						
2		4						

Comment résoudre un Sudoku ?

Candidat unique

1				6	7	8		9
	3	5						
2		4						

Comment résoudre un Sudoku ?

Candidat unique

1				6	7	8		9
	3	5						
2		4						

Position unique

?	2	3						
							1	
			1					

Comment résoudre un Sudoku ?

Candidat unique

1				6	7	8		9
	3	5						
2		4						

Position unique

1	2	3						
							1	
			1					

Comment résoudre un Sudoku ?

Candidat unique

1				6	7	8		9
	3	5						
2		4						

Position unique

1	2	3						
							1	
			1					

Chaînes xy

	1,2,3,4		2,3	3,4			2,3,4	

Comment résoudre un Sudoku ?

Candidat unique

1				6	7	8		9
	3	5						
2		4						

Position unique

1	2	3						
							1	
			1					

Chaînes xy

	1		2,3	3,4			2,3,4	

Comment résoudre un Sudoku ?

Candidat unique

1				6	7	8		9
	3	5						
2		4						

Position unique

1	2	3						
							1	
			1					

Chaînes xy

	1		2,3	3,4			2,3,4	

ETC. (X-Wing, XY-Wing, Swordfish, Jellyfish, chaînes ALS, chaînes nrczt, ...)

Et les maths dans tout ça ?

Idée : Voir un Sudoku comme une grille en trois dimensions (= hôtel).

"la case (i,j) contient le chiffre k" $\iff$ "Il y a quelqu'un dans l'étage k de la tour (i, j)".

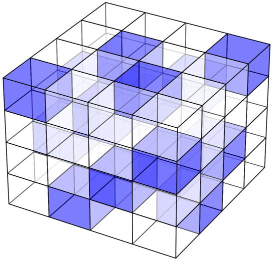
Et les maths dans tout ça ?

Idée : Voir un Sudoku comme une grille en trois dimensions (= hôtel).

“la case (i,j) contient le chiffre k” $\Longleftrightarrow$ “Il y a quelqu’un dans l’étage k de la tour (i, j)”.

Sudoku 4×4

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3



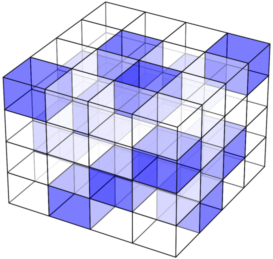
Et les maths dans tout ça ?

Idée : Voir un Sudoku comme une grille en trois dimensions (= hôtel).

“la case (i,j) contient le chiffre k” $\Longleftrightarrow$ “Il y a quelqu’un dans l’étage k de la tour (i, j)”.

Sudoku 4×4

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3



$$\boxed{x_{i,j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est dans la case } (i,j)\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

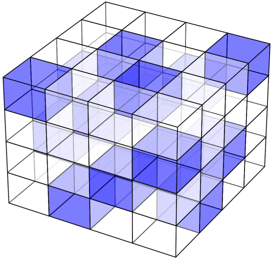
Et les maths dans tout ça ?

Idée : Voir un Sudoku comme une grille en trois dimensions (= hôtel).

“la case (i,j) contient le chiffre k” $\Longleftrightarrow$ “Il y a quelqu’un dans l’étage k de la tour (i, j)”.

Sudoku 4×4

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

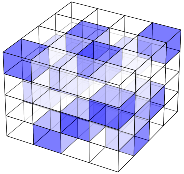


$$\boxed{x_{i,j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est dans la case } (i,j)\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

Pour un puzzle 9×9, il y a $9^3 = 729$ variables $x_{i,j,k} \in \{0,1\}$. On écrit $\mathbf{x} := (x_{i,j,k}) \in \{0,1\}^{729}$.

On cherche un vecteur x parmi les sommets d’un hypercube de dimension 729.

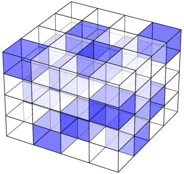
Les règles du Sudoku, version mathématique



Chaque cellule n'a qu'un chiffre (= chaque tour n'a qu'un habitant)

Pour tout i et j, $$\sum_k x_{i,j,k} = 1$$ (81 équations).

Les règles du Sudoku, version mathématique



Chaque cellule n'a qu'un chiffre (= chaque tour n'a qu'un habitant)

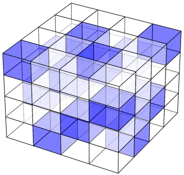
$$\text{Pour tout } i \text{ et } j, \qquad \sum_k x_{i,j,k} = 1 \qquad \text{(81 équations).}$$

Chaque chiffre apparaît une fois par ligne et par colonne
(= chaque couloir de chaque étage a un habitant)

$$\text{Pour tout } k \text{ et } i, \qquad \sum_j x_{i,j,k} = 1 \qquad \text{(81 équations).}$$

$$\text{Pour tout } k \text{ et } j, \qquad \sum_i x_{i,j,k} = 1 \qquad \text{(81 équations).}$$

Les règles du Sudoku, version mathématique



Chaque cellule n'a qu'un chiffre (= chaque tour n'a qu'un habitant)

$$\text{Pour tout } i \text{ et } j, \qquad \sum_k x_{i,j,k} = 1 \qquad \text{(81 équations).}$$

Chaque chiffre apparaît une fois par ligne et par colonne
(= chaque couloir de chaque étage a un habitant)

$$\text{Pour tout } k \text{ et } i, \qquad \sum_j x_{i,j,k} = 1 \qquad \text{(81 équations).}$$

$$\text{Pour tout } k \text{ et } j, \qquad \sum_i x_{i,j,k} = 1 \qquad \text{(81 équations).}$$

Chaque chiffre apparaît une fois par carré
(= chaque "open space" de chaque étage a un habitant)

plus compliqué à écrire... (81 équations).

On connaît certaines valeurs (= on sait où habitent certaines personnes)

On sait que $x_{i,j,k} = 1$ pour certaines valeurs de (i, j, k).

On connaît certaines valeurs (= on sait où habitent certaines personnes)

On sait que $x_{i,j,k} = 1$ pour certaines valeurs de (i, j, k).

Toutes ses règles se traduisent par le fait que $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$, où $\mathcal{P}$ est un **hyperplan** de $\mathbb{R}^{729}$.

On connaît certaines valeurs (= on sait où habitent certaines personnes)

On sait que $x_{i,j,k} = 1$ pour certaines valeurs de (i, j, k).

Toutes ses règles se traduisent par le fait que $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$, où $\mathcal{P}$ est un **hyperplan** de $\mathbb{R}^{729}$.

Résoudre un Sudoku,
c'est trouver l'intersection d'un hyperplan $\mathcal{P}$ et les sommets d'un hypercube,
en dimension 729 !

On connaît certaines valeurs (= on sait où habitent certaines personnes)

On sait que $x_{i,j,k} = 1$ pour certaines valeurs de (i, j, k).

Toutes ses règles se traduisent par le fait que $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$, où $\mathcal{P}$ est un **hyperplan** de $\mathbb{R}^{729}$.

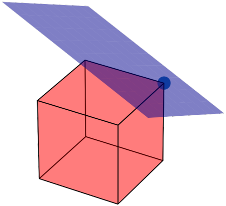
> Résoudre un Sudoku,
> c'est trouver l'intersection d'un hyperplan $\mathcal{P}$ et les sommets d'un hypercube,
> en dimension 729 !

On connaît certaines valeurs (= on sait où habitent certaines personnes)

On sait que $x_{i,j,k} = 1$ pour certaines valeurs de (i, j, k).

Toutes ses règles se traduisent par le fait que $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$, où $\mathcal{P}$ est un **hyperplan** de $\mathbb{R}^{729}$.

Résoudre un Sudoku,
c'est trouver l'intersection d'un hyperplan $\mathcal{P}$ et les sommets d'un hypercube,
en dimension 729 !

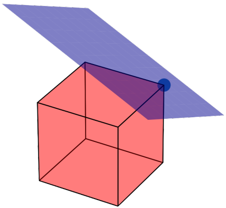


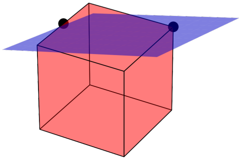
On connaît certaines valeurs (= on sait où habitent certaines personnes)

On sait que $x_{i,j,k} = 1$ pour certaines valeurs de (i, j, k).

Toutes ses règles se traduisent par le fait que $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$, où $\mathcal{P}$ est un **hyperplan** de $\mathbb{R}^{729}$.

Résoudre un Sudoku,
c'est trouver l'intersection d'un hyperplan $\mathcal{P}$ et les sommets d'un hypercube,
en dimension 729 !



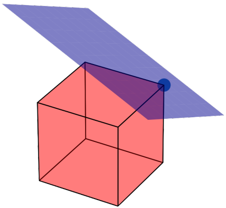


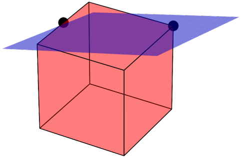
On connaît certaines valeurs (= on sait où habitent certaines personnes)

On sait que $x_{i,j,k} = 1$ pour certaines valeurs de (i, j, k).

Toutes ses règles se traduisent par le fait que $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$, où $\mathcal{P}$ est un **hyperplan** de $\mathbb{R}^{729}$.

Résoudre un Sudoku,
c'est trouver l'intersection d'un hyperplan $\mathcal{P}$ et les sommets d'un hypercube,
en dimension 729 !





Remarque : l'intersection de l'hyperplan et de **tout** l'hypercube peut-être infini !

Théorème

Si un Sudoku peut-être résolu avec les raisonnements suivants :

candidat unique, position unique, chaînes xy, x-wing, swordfish, ...

Alors l'hyperplan $\mathcal{P}$ correspondant intersecte l'hypercube en un seul point (= la solution).

Théorème

Si un Sudoku peut-être résolu avec les raisonnements suivants :

candidat unique, position unique, chaînes xy, x-wing, swordfish, ...

Alors l'hyperplan $\mathcal{P}$ correspondant intersecte l'hypercube en un seul point (= la solution).

Corollaire

Si l'hyperplan intersecte l'hypercube en plusieurs points, alors le Sudoku correspondant **ne peut pas** être résolu uniquement avec les raisonnements précédents.

Théorème

Si un Sudoku peut-être résolu avec les raisonnements suivants :

candidat unique, position unique, chaînes xy, x-wing, swordfish, ...

Alors l'hyperplan $\mathcal{P}$ correspondant intersecte l'hypercube en un seul point (= la solution).

Corollaire

Si l'hyperplan intersecte l'hypercube en plusieurs points, alors le Sudoku correspondant **ne peut pas** être résolu uniquement avec les raisonnements précédents.

Environ 1% des Sudokus trouvés sur internet ont une intersection compliquée.
Ces Sudokus sont effectivement assez complexes à résoudre.

Un Sudoku “difficile”

	2	3			9		8	1
9	1	7	2		8		6	
5	8			1		7		
8	9							6
7	3	5	6	8	1	2		
1			9			8	3	7
		9		2				8
	7	8	1		4	9		
2	5	1	8	9		6		

Un Sudoku “difficile”

6	2	3	5	7	9	4	8	1
9	1	7	2	4	8	5	6	3
5	8	4	3	1	6	7	9	2
8	9	2	4	3	7	1	5	6
7	3	5	6	8	1	2	4	9
1	4	6	9	5	2	8	3	7
4	6	9	7	2	5	3	1	8
3	7	8	1	6	4	9	2	5
2	5	1	8	9	3	6	7	4

La solution $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^{729}$

4,6	2	3	5,7	6,7	9	4,5	8	1
9	1	7	2	4,5	8	3,4	6	3,5
5	8	4,6	3,4	1	3,6	7	2,9	2,9
8	9	2,4	3,4	5,7	2,7	1,5	1,5	6
7	3	5	6	8	1	2	4,9	4,9
1	4,6	2,6	9	4,5	2,5	8	3	7
3,4	4,6	9	7,5	2	5,6	1,3	1,7	8
3,6	7	8	1	3,6	4	9	2,5	2,5
2	5	1	8	9	3,7	6	4,7	3,4

Une intersection $\mathbf{x} \in [0, 1]^{729}$

Un Sudoku “difficile”

6	2	3	5	7	9	4	8	1
9	1	7	2	4	8	5	6	3
5	8	4	3	1	6	7	9	2
8	9	2	4	3	7	1	5	6
7	3	5	6	8	1	2	4	9
1	4	6	9	5	2	8	3	7
4	6	9	7	2	5	3	1	8
3	7	8	1	6	4	9	2	5
2	5	1	8	9	3	6	7	4

La solution $\mathbf{x} \in \{0,1\}^{729}$

4,6	2	3	5,7	6,7	9	4,5	8	1
9	1	7	2	4,5	8	3,4	6	3,5
5	8	4,6	3,4	1	3,6	7	2,9	2,9
8	9	2,4	3,4	5,7	2,7	1,5	1,5	6
7	3	5	6	8	1	2	4,9	4,9
1	4,6	2,6	9	4,5	2,5	8	3	7
3,4	4,6	9	7,5	2	5,6	1,3	1,7	8
3,6	7	8	1	3,6	4	9	2,5	2,5
2	5	1	8	9	3,7	6	4,7	3,4

Une intersection $\mathbf{x} \in [0,1]^{729}$

Nosey puzzle (Alexander Holroyd, 2018)

Nosey puzzle (Alexander Holroyd, 2018)

Solution

"Ha-ha !"