

Volatilité stochastique : étude d'un modèle ergodique.

Julien Guyon
julien.guyon@polytechnique.fr

novembre 2002

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Notations	5
1.2	Interprétation	7
1.3	A quoi s'attendre ?	14
2	Prix d'une option européenne	15
2.1	EDP d'évaluation	15
2.2	Interprétation probabiliste	19
3	Analyse asymptotique	21
3.1	Retour à la moyenne	22
3.1.1	Probabilité stationnaire	25
3.1.2	Propriété de décorrélation, théorème ergodique	26
3.1.3	Equation homogène	27
3.2	Le prix Black-Scholes corrigé	27
3.2.1	Notations	27
3.2.2	Le problème à résoudre	28
3.2.3	Etape 1 : $\mathcal{L}_0 P_0 = 0$	30
3.2.4	Etape 2 : $\mathcal{L}_0 P_1 + \mathcal{L}_1 P_0 = 0$	30
3.2.5	Etape 3 : $\mathcal{L}_0 P_2 + \mathcal{L}_1 P_1 + \mathcal{L}_2 P_0 = 0$	31
3.2.6	Etape 4 : équation de Poisson	31
3.2.7	Etape 5 : $\mathcal{L}_0 P_3 + \mathcal{L}_1 P_2 + \mathcal{L}_2 P_1 = 0$	33

3.3	Stratégies de couverture	35
3.3.1	La stratégie de couverture dans le modèle de BLACK et SCHOLLES	35
3.3.2	Stratégie 1 : delta Black-Scholes	36
3.3.3	Stratégie 2 : une stratégie autofinancée en moyenne . .	40
3.3.4	Stratégie 3 : un portefeuille qui colle au prix de l'option	42
4	L'approche martingale	44
4.1	Démarche	44
4.2	Notations	46
4.3	Le prix corrigé comme martingale approchée	48
4.4	Retrouver le prix $P_0 + \tilde{P}_1$	51
4.4.1	Développement limité de $\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}_*)$	52
4.4.2	Développement limité de $H^*(t, x)$	54
4.4.3	Conclusion	55
5	Calibration	55
5.1	Le prix corrigé de l'option d'achat	56
5.2	Surface de volatilité implicite	56
6	Simulations numériques	58
6.1	Schémas numériques pour l'EDP d'évaluation	59
6.1.1	Méthode	59
6.1.2	Résultats	62
6.2	Méthode de Monte-Carlo ¹	62
6.2.1	Schéma d'Euler	62
6.2.2	Amélioration du schéma	67
6.2.3	Mise en oeuvre	71
6.2.4	Résultats	74
7	Perspectives	90

¹Cette section doit beaucoup à Bernard LAPEYRE qui est à l'origine de plusieurs améliorations.

Je tiens à remercier vivement Christophe MICHEL pour m'avoir proposé ce stage, m'avoir permis d'aborder dans le détail les questions théoriques que posent les modèles à volatilité stochastique, et avoir su bien expliquer les enjeux d'une telle modélisation : en pratique, apprendre à choisir un modèle suffisamment complexe pour rendre compte des phénomènes de marché - le *smile* de volatilité essentiellement -, pour rendre compte des principaux risques auxquels est soumis un produit financier, et dans le même temps suffisamment simple pour pouvoir mener des calculs exacts, ou des calculs approchés rapides - avec contrôle d'erreur. Apprendre aussi à se limiter à un nombre restreint de paramètres facilement interprétables.

Ce stage m'a permis de me familiariser avec les pratiques de la finance, son vocabulaire, de comprendre le travail d'un trader, celui d'un ingénieur, les interactions entre la salle des marchés et la "recherche et développement". Savoir lire vite un *smile*, ce qu'on peut en déduire sur une corrélation, la distribution du sous-jacent, etc.

Ce stage a offert un juste équilibre entre questions théoriques et simulations informatiques. Entre les deux, les allers-retours sont incessants : par exemple, bien analyser les propriétés gaussienne et markovienne du processus d'Ornstein-Uhlenbeck (O-U) permet de le simuler efficacement. Dans l'autre sens, faire varier la force de rappel de l'O-U et observer l'effet sur le *smile* permet de mieux se représenter le concept d'ergodicité.

Outre Christophe MICHEL, je tiens à dire un grand merci à Joe BONNAUD, que j'ai beaucoup sollicité et qui a toujours su répondre efficacement et agréablement à mes questions, aussi bien financières que mathématiques. Joe a souvent posé les bonnes questions et j'ai eu la chance de mener avec lui des discussions fructueuses, notamment sur les simulations par méthode de Monte-Carlo. Merci aussi à Christophe TEZIER, qui m'a initié aux simulations par les méthodes d'EDP. Christophe a su me guider très vite, aussi bien sur la théorie que sur le code informatique, il est le grand spécialiste de ce domaine dans l'équipe. Ce travail est inachevé et j'espère le poursuivre bientôt. Etienne ROCHE a toujours répondu très agréablement à mes questions sur le code C, je lui dois la découverte de plusieurs bogues et une leçon très intéressante sur la manière de gérer au mieux la mémoire. Je tiens aussi à remercier Laurent JACQUEL - du bon temps passé à la salle de muscu! -, Pierre GODARD, Loïc BACONNIER et Olivier GUILLEN. Tous participent de la très bonne ambiance qui règne dans l'équipe et ont largement contribué à faire de ces neuf mois une expérience très enrichissante et très agréable... qui va se continuer à Londres.

Enfin je remercie Bernard LAPEYRE, Nicole EL KAROUI et Denis TALAY qui ont eu la gentillesse de me conseiller sur la manière de mener ce travail, de répondre à mes questions et de me présenter des papiers et des résultats qui m'ont bien servi. Ce travail leur doit beaucoup !

1 Introduction

1.1 Notations

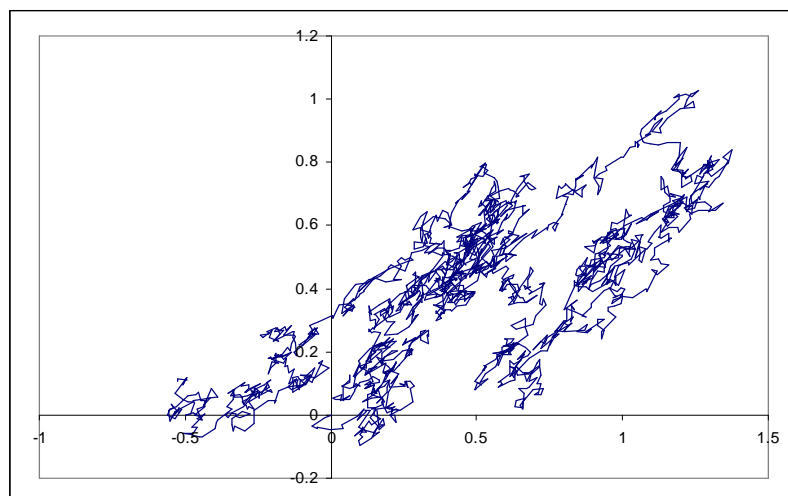
Dans cet article, nous nous proposons d'étudier un modèle à volatilité stochastique proposé par Jean-Pierre FOUQUE, George PAPANICOLAOU et K. Ronnie SIRCAR [1]. Nous reprenons le travail theorique des auteurs, puis nous proposons des exemples de simulation informatique. Le modele est le suivant :

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma_t X_t dW_t \\ \sigma_t = f(Y_t) \\ dY_t = \alpha(m - Y_t) dt + \beta d\hat{Z}_t \end{cases} \quad (1)$$

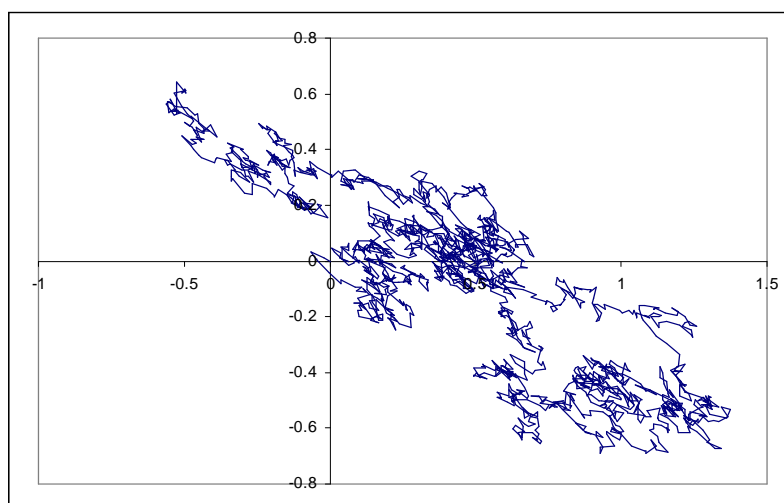
Dans cette écriture :

- X représente le sous-jacent, X_t son cours à la date t ,
- μ est le rendement instantané, supposé constant,
- σ_t est la valeur à la date t de la volatilité du cours du sous-jacent ; elle mesure l'intensité du bruit $\sigma_t X_t dW_t$ auquel est soumis le cours du sous-jacent
- W est un mouvement brownien standard, la volatilité σ est elle-même un processus stochastique, fonction déterministe du processus Y ; la fonction f est définie sur \mathbb{R} et à valeurs strictement positives,
- Y est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, de moyenne à long terme m et de variance à long terme $\frac{\beta^2}{2\alpha}$,
- \hat{Z} est un mouvement brownien standard éventuellement corrélé à W ; nous supposons dans la suite cette corrélation constante et nous la notons ρ , avec $\rho \in]-1, 1[$, de sorte que $d\langle W, \hat{Z} \rangle_t = \rho dt$. Si nous définissons Z_t par l'égalité $\hat{Z}_t = \rho W_t + \sqrt{1 - \rho^2} Z_t$, alors W et Z sont deux browniens indépendants.

On donne ci-dessous un exemple de trajectoires possibles pour les trajectoires de (W, Z) et de (W, \hat{Z}) , dans le cas où $\rho = 0.5$ puis dans le cas où $\rho = -0.5$. Dans les trois cas, on a utilisé les mêmes séries d'aléas. On a utilise un code C pour générer ces trajectoires.



Une trajectoire de (W, \widehat{Z}) entre $t = 0$ et $t = 1$. La corrélation ρ vaut 0.5.



Une trajectoire de (W, \widehat{Z}) entre $t = 0$ et $t = 1$. La corrélation ρ vaut -0.5 .

Nous nous plaçons sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni de la filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, Z_s, 0 \leq s \leq t)$. Par exemple, on pourra considérer l'espace $\Omega = C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$ des fonctions continues à valeurs dans \mathbb{R}^2 muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Wiener sur cette tribu. Dans ce cas, il faut voir un événement ponctuel ω comme une trajectoire $t \mapsto (W_t(\omega), Z_t(\omega))$. Par ailleurs, la filtration \mathcal{F}_t représente l'information sur les deux mouvements browniens W et Z jusqu'à la date t ; c'est l'augmentation habituelle de la tribu engendrée par les ensembles de la forme $\{\omega \in \Omega \mid |W_s| \leq R_1, |Z_s| \leq R_2, 0 \leq s \leq t\}$.

Dans toute la suite, nous nous plaçons sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA). Plus précisément, nous supposons l'existence d'une probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) sous laquelle le prix des actifs actualisé est une martingale locale.

1.2 Interprétation

F. BLACK et M. SCHOLES ont proposé [2] de modéliser la dynamique du cours X_t du sous-jacent par l'équation différentielle stochastique

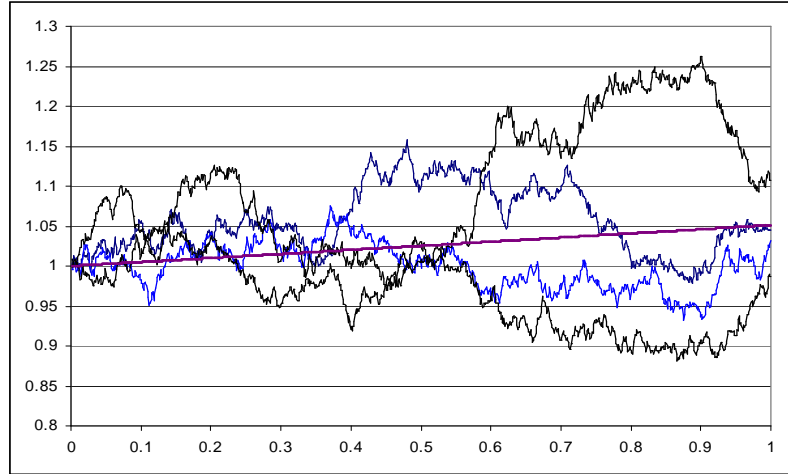
$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = x. \quad (2)$$

Typiquement, le sous-jacent est une action ou un indice boursier. Dans ce modèle, σ est une constante strictement positive, i.e. une quantité supposée indépendante du temps et du hasard, qu'on appelle "volatilité". Nous considérons également un actif sans risque X^0 dont la valeur à la date t est $X_t^0 = e^{rt}$. Ceci revient à supposer le taux d'intérêt à court terme constant égal à r . L'équation (2) a des conséquences importantes :

- Le processus X est un mouvement brownien géométrique ; on dispose d'une expression explicite pour X_t :

$$X_t = x \exp \left(\sigma W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right) \quad (3)$$

qui prouve que le logarithme du cours X_t suit une loi gaussienne de moyenne $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t$ et de variance $\sigma^2 t$. On peut réécrire (3) sous la forme $X_t = e^{\mu t} M_t$, où $M_t = \exp \left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t \right)$ est une \mathbb{P} -martingale de moyenne 1. La figure suivante présente quatre trajectoires possibles du processus $(X_t)_{0 \leq t \leq 1}$ et la trajectoire moyenne.



Quatre trajectoires possibles du sous-jacent sous le modèle de BLACK et SCHOLLES ; $\mu = 0.05$, $\sigma = 0.15$.

- Le marché est *viable* et *complet* :
 - Il existe *une et une seule* probabilité \mathbb{P}^* sous laquelle le processus des prix actualisés $(e^{-rt}X_t)_{t \geq 0}$ de l'actif risqué est une \mathbb{P}^* -martingale. Cette probabilité est appelée probabilité risque-neutre.
 - L'évolution du sous-jacent s'écrit

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dW_t^*, \quad X_0 = x,$$

où W^* est un \mathbb{P}^* -mouvement brownien.

- Toute option européenne de payoff $H \in L^2(\mathbb{P}^*, \mathcal{F}_T)$, c'est-à-dire toute option définie par une variable aléatoire H \mathcal{F}_T -mesurable et de carré intégrable sous la probabilité \mathbb{P}^* , est simulable : il existe un unique portefeuille admissible, i.e. autofinancé et minoré, ne contenant que de l'actif sans risque et de l'actif risqué, dont la valeur en T est H . De plus, la valeur $V(t)$ de l'option est, sous la probabilité risque-neutre, l'espérance actualisée du flux terminal H :

$$V(t) = \mathbb{E}^* \left[e^{-r(T-t)} H \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Ceci est une conséquence du théorème de représentation des martingales browniennes (notons que $\sigma(W_s, 0 \leq s \leq t) = \sigma(W_s^*, 0 \leq$

$s \leq t$). Autrement dit, on peut se couvrir parfaitement - éliminer le risque - en gérant dynamiquement un portefeuille ne contenant que du liquide et du sous-jacent. Notons que $V(t)$ est indépendant de la tendance μ .

- Dans le cas particulier où $H = h(X_T)$, avec h continue et positive, le prix de l'option se met sous la forme $P(t, X_t)$ avec

$$P(t, x) = \mathbb{E}^* \left[e^{-r(T-t)} h \left(x \exp^{\sigma(W_T^* - W_t^*) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \right) \right]. \quad (4)$$

La fonction P est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{BS}(\sigma)P = 0, \\ \forall x > 0, P(T, x) = h(x), \end{cases} \quad (5)$$

où

$$\mathcal{L}_{BS}(\sigma) = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + r \left(x \frac{\partial}{\partial x} - \cdot \right). \quad (6)$$

De plus, la quantité d'actif risqué à détenir à la date t est

$$a_t = \frac{\partial P}{\partial x}(t, X_t),$$

quantité qu'on appelle le "delta". Par conséquent, le portefeuille de couverture contient

$$b_t = e^{-rt} \left(P(t, X_t) - X_t \frac{\partial P}{\partial x}(t, X_t) \right)$$

unités d'actif sans risque.

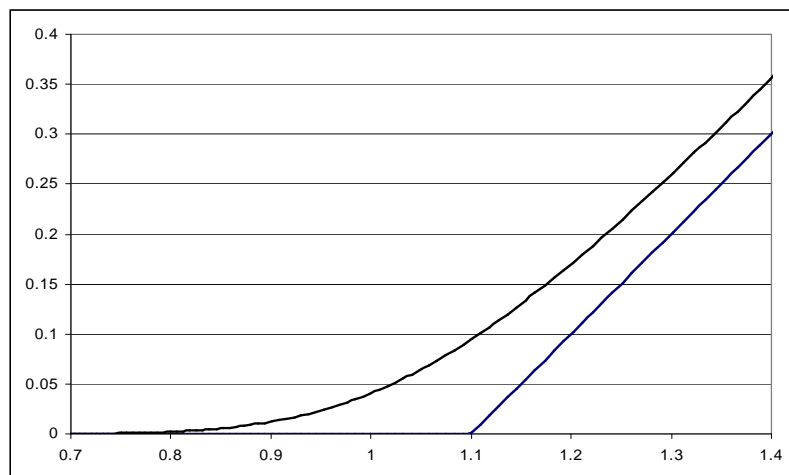
- Le cas du call correspond au payoff $h(x) = (x - K)_+$, on note alors $P(t, x) = C_{BS}(t, x; K, T; \sigma)$ et

$$C_{BS}(t, x; K, T; \sigma) = xN(d_+) - Ke^{-r(T-t)}N(d_-) \quad (7)$$

où

$$\begin{cases} d_+ = \frac{\ln\left(\frac{x}{Ke^{-r(T-t)}}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}, \\ d_- = \frac{\ln\left(\frac{x}{Ke^{-r(T-t)}}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}. \end{cases} \quad (8)$$

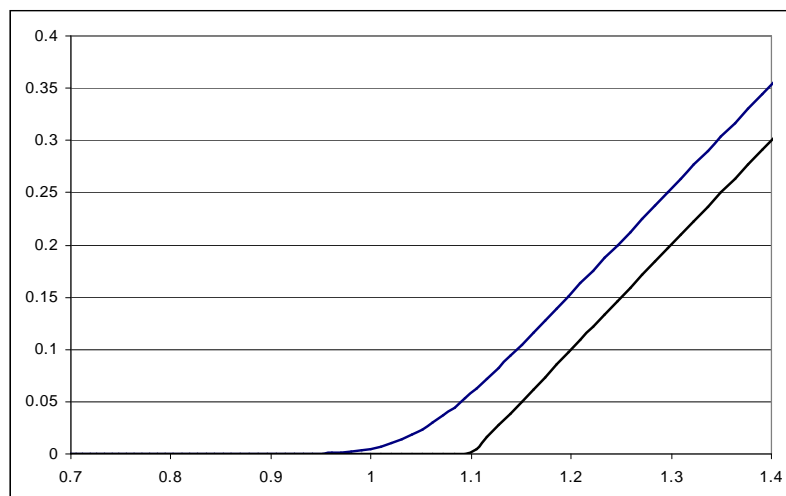
On donne ci-dessous le graphe de la fonction $x \mapsto C_{BS}(t, x; K, T; \sigma)$ pour les valeurs suivantes des paramètres : $t = 0$, $K = 1.1$, $T = 1$, $\sigma = 0.15$, $r = 0.05$. On a superposé le graphe donnant le payoff du call, i.e. $x \mapsto (x - K)_+$.



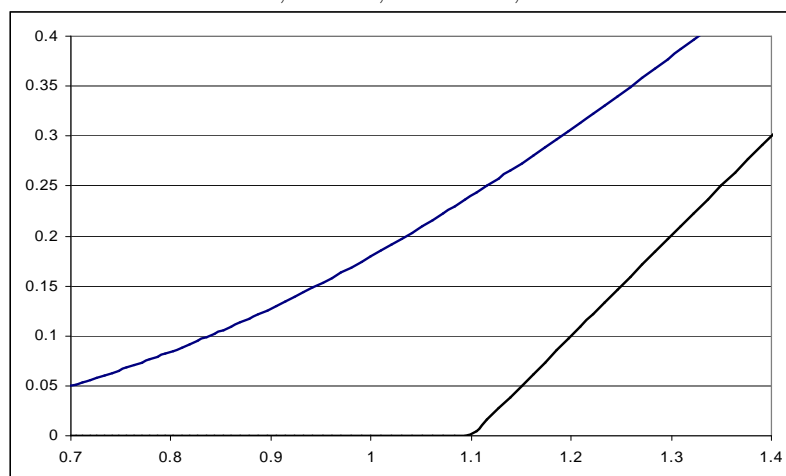
Prix du call dans le modèle de BLACK et SCHOLES ; $t = 0$,

$$K = 1.1, T = 1, \sigma = 0.15, r = 0.05.$$

Ci-dessous, on modifie la valeur de σ , toutes choses égales par ailleurs.
On regarde successivement une volatilité de 5% puis une volatilité de 50%. Les trois graphes sont à la même échelle.



Prix du call dans le modèle de BLACK et SCHOLES ; $t = 0$,
 $K = 1.1$, $T = 1$, $\sigma = 0.05$, $r = 0.05$.



Prix du call dans le modèle de BLACK et SCHOLES ; $t = 0$,
 $K = 1.1$, $T = 1$, $\sigma = 0.5$, $r = 0.05$.

De plus, le portefeuille de couverture contient la quantité

$$a_t = N(d_+)$$

d'actifs risqués. Ceci prouve que l'égalité (7) donnant le prix du call sous le modèle de BLACK et SCHOLES donne aussi la décomposition du portefeuille de couverture en actif risqué et en actif sans risque.

Signalons que ce qui précède reste vrai si l'on autorise le taux d'intérêt à court terme, dit aussi "taux court", et la volatilité à dépendre du temps, *mais pas du hasard*. Il suffit de remplacer r par

$$\bar{r} = \frac{1}{T-t} \int_t^T r_s ds$$

et σ par $\bar{\sigma}$ où

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_s^2 ds$$

dans les formules (4), (5), (6), (7) et (8).

Le modèle de BLACK et SCHOLES sert de référence à tous ceux qui pratiquent la finance des marchés :

- Il est *simple* : adopter le modèle de BLACK et SCHOLES, c'est simplement supposer les cours X à trajectoires continues et à accroissements relatifs indépendants et stationnaires.
- Il est *maniable* : il donne lieu à des formules fermées pour le prix des calls et des puts et pour les deltas correspondants, c'est-à-dire pour les quantités d'actifs risqués que doit contenir le portefeuille de couverture.

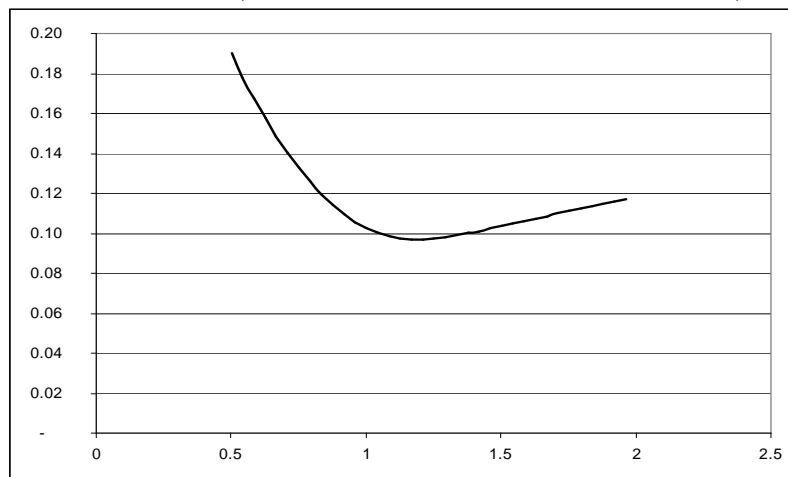
Cependant :

- Tous les tests statistiques invalident l'hypothèse log-normale pour le cours du sous-jacent. En réalité, il semble que les queues de distribution soient plus épaisses que ne le prévoit le modèle de BLACK et SCHOLES. De plus, les queues de distribution empiriques de $\ln(X_t)$ sont parfois asymétriques.
- Nous définissons la volatilité implicite I par l'égalité

$$C_{BS}(t, x; K, T; I) = C^{obs}$$

où C^{obs} est le prix observé du call de maturité T et de strike K . La définition a un sens puisque $\sigma \mapsto C_{BS}(t, x; K, T; \sigma)$ est une bijection de \mathbb{R}_+^* sur $](x - K)_+, x[$. Ainsi définie, I est une fonction de t, x, K, T

et C^{obs} . Si les prix observés étaient exactement les prix prévus par le modèle de BLACK et SCHOLES, la fonction $K \mapsto I(t, x, K, T, C^{obs})$ serait constante et égale au paramètre σ . Or, les données de marché font apparaître une dépendance en K . La courbe empirique $K \mapsto I(t, x, K, T, C^{obs})$ porte souvent le nom de courbe de “smile” en référence à son allure souriante (convexe décroissante puis croissante).



Un smile observé par un trader du Crédit Lyonnais en traitant des swaptions 5 ans - 10 ans

Bien sûr pour expliquer ces phénomènes, il faut raffiner le modèle. Il y a bien des façons de le faire : par exemple autoriser les cours X_t à avoir des sauts, ou autoriser la volatilité à dépendre de t et de x , la seule source de bruit restant le brownien W (c’est ce que propose B. DUPIRE [3]). Une manière naturelle d’étendre le modèle de BLACK et SCHOLES est d’autoriser la volatilité à être un processus stochastique gouverné par un deuxième bruit modélisé par un deuxième brownien \hat{Z} éventuellement corrélé à W , mais non parfaitement corrélé, contrairement au cas du modèle de DUPIRE. Nous conservons donc l’écriture

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma_t X_t dW_t$$

mais σ est désormais un processus aléatoire dépendant du temps et du hasard (W, \hat{Z}) . Comment choisir ce processus ? Nous souhaitons que la volatilité σ_t

soit une quantité \mathcal{F}_t -mesurable et strictement positive. Aussi nous nous proposons de l'écrire sous la forme $\sigma_t = f(Y_t)$, où $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une fonction déterministe et Y est un processus aléatoire à valeurs réelles (\mathcal{F}_t) -adapté.

Nous nous limiterons aux processus Y qui sont *markoviens*. Par exemple :

- un processus markovien de sauts pur à espace d'états fini ou dénombrable,
- un processus markovien de sauts pur à espace d'états infini non dénombrable,
- une diffusion markovienne du type

$$dY_t = \mu_Y(t, Y_t) dt + \sigma_Y(t, Y_t) d\hat{Z}_t. \quad (9)$$

Dans toute la suite, nous nous limiterons aux diffusions markoviennes (9), et parmi elles à celles qui possèdent la propriété de *retour à la moyenne*, i.e. celles pour lesquelles

$$\mu_Y(t, y) = \alpha(m - y).$$

Le paramètre α s'appelle le *taux de retour à la moyenne* et le paramètre m la *moyenne à long terme*. On peut voir Y_t comme la position à la date t d'une particule soumise à une force de rappel d'intensité α qui a tendance à la ramener à sa position d'équilibre (déterministe) m et à une force aléatoire - par exemple des chocs - modélisée par le bruit $\sigma_Y(t, Y_t) d\hat{Z}_t$. Le choix $\sigma_Y(t, Y_t) = \beta$, où β est une constante, correspond au processus dit d'Ornstein-Uhlenbeck.

1.3 A quoi s'attendre ?

Il y a une bonne raison *a priori* de considérer la volatilité comme une quantité aléatoire : des études empiriques sur les rendements du cours du sous-jacent permettent d'estimer la volatilité et celle-ci semble présenter un comportement stochastique. Mais modéliser la volatilité par un processus stochastique, c'est en fait reconnaître que quantifier le risque à travers un paramètre de volatilité *constant* est aujourd'hui insuffisant pour expliquer certains phénomènes de marché. En particulier pour expliquer la courbe de smile. Et c'est une modification profonde et puissante qui permet de décrire un marché bien plus complexe que le marché de BLACK et SCHOLES :

- nous pouvons reproduire des lois plus réalistes pour les rendements ; en particulier, les queues de ces distributions sont plus épaisses que celles des lois lognormales,
- nous pouvons rendre ces distributions asymétriques en corrélant les deux bruits W et \hat{Z} ,

- nous pouvons faire apparaître du smile.

Evidemment rien n'est gratuit - surtout dans le monde de la finance des marchés - et il faut bien payer quelque part le prix de ces nettes améliorations :

- on ne peut pas observer directement la volatilité ; estimer les paramètres du modèle (α, m, β) et le niveau actuel de la volatilité sont donc des problèmes difficiles,
- le marché ainsi modélisé est *incomplet* : lorsqu'on traite une option, on ne peut pas éliminer le risque en gérant un portefeuille contenant du liquide et du sous-jacent. En effet, la variation infinitésimale de la valeur d'un tel portefeuille contient des termes en dW_t et en dZ_t que l'on ne peut annuler simultanément.

2 Prix d'une option européenne

2.1 EDP d'évaluation

Dans cette section, on considère la dynamique (1) et on s'intéresse au prix d'une option européenne d'échéance T_1 et de payoff h continu ; l'acheteur d'une telle option reçoit $h(X_{T_1})$ en T_1 . L'absence d'opportunité d'arbitrage et l'hypothèse markovienne sur Y nous assurent l'existence d'une fonction $P^{(T_1)} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, que nous supposons suffisamment régulière, telle que le prix de cette option à la date $t \in [0, T_1]$ s'écrit $P^{(T_1)}(t, X_t, Y_t)$. Il est impossible d'annuler le risque avec seulement l'actif sous-jacent. Aussi allons nous considérer un portefeuille qui contient a_t unités d'actif risqué, b_t unités d'actif sans risque et c_t options européennes d'échéance $T_2 > T_1$ et de même payoff h . Nous cherchons a_t, b_t et c_t tels que le portefeuille réplique l'option et soit autofinancé. L'hypothèse de réplication correspond à l'égalité

$$P^{(T_1)}(T_1, X_{T_1}, Y_{T_1}) = a_{T_1} X_{T_1} + b_{T_1} e^{rT_1} + c_{T_1} P^{(T_2)}(T_1, X_{T_1}, Y_{T_1}) \quad \mathbb{P} - ps \quad (10)$$

et l'hypothèse d'autofinancement à

$$dP^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) = a_t dX_t + b_t d(e^{rt}) + c_t dP^{(T_2)}(t, X_t, Y_t). \quad (11)$$

Par absence d'opportunité d'arbitrage, (10) implique que à toute date $t \leq T_1$

$$P^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) = a_t X_t + b_t e^{rt} + c_t P^{(T_2)}(t, X_t, Y_t) \quad \mathbb{P} - ps \quad (12)$$

c'est-à-dire que la valeur du portefeuille est à tout instant égale au prix de l'option. Par la formule d'Itô, on a²

$$\begin{aligned}
dP^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) &= \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial t}(t, X_t, Y_t) dt + \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t) dX_t \\
&\quad + \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t) dY_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P^{(T_1)}}{\partial x^2}(t, X_t, Y_t) d\langle X \rangle_t \\
&\quad + \frac{\partial^2 P^{(T_1)}}{\partial x \partial y}(t, X_t, Y_t) d\langle X, Y \rangle_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P^{(T_1)}}{\partial y^2}(t, X_t, Y_t) d\langle Y \rangle_t \\
&= \mathcal{A}_1 P^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) dt \\
&\quad + \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t) dX_t + \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t) dY_t
\end{aligned}$$

où \mathcal{A}_1 est l'opérateur défini par

$$\mathcal{A}_1 = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} x^2 f(y)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho \beta x f(y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Mais, d'après l'hypothèse d'autofinancement, la variation infinitésimale de la valeur du portefeuille est aussi égale à

$$\begin{aligned}
&dP^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) \\
&= a_t dX_t + b_t d(e^{rt}) + c_t dP^{(T_2)}(t, X_t, Y_t) \\
&= a_t dX_t + r b_t e^{rt} dt \\
&\quad + c_t \left(\mathcal{A}_1 P^{(T_2)}(t, X_t, Y_t) dt + \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t) dX_t + \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t) dY_t \right) \\
&= (c_t \mathcal{A}_1 P^{(T_2)}(t, X_t, Y_t) + r b_t e^{rt}) dt \\
&\quad + \left(a_t + c_t \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t) \right) dX_t \\
&\quad + c_t \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t) dY_t.
\end{aligned}$$

Il n'y a de termes en dZ_t que dans dY_t , si bien que l'identification des termes en dZ_t donne

$$c_t = \frac{\frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t)}{\frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t)}.$$

²les égalités faisant intervenir X_t et Y_t sont à prendre au sens ps

L'identification des termes en dW_t donne

$$a_t = \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t) - c_t \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t)$$

d'où on déduit

$$b_t = e^{-rt} \left(P^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) - a_t X_t - c_t P^{(T_2)}(t, X_t, Y_t) \right)$$

Enfin l'identification des termes en dt donne

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_1 P^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) + \mu X_t \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t) + \alpha (m - Y_t) \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t) \\ = & c_t \mathcal{A}_1 P^{(T_2)}(t, X_t, Y_t) + r b_t e^{rt} + \mu \left(a_t + c_t \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t) \right) X_t \\ & + \alpha (m - Y_t) c_t \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t), \end{aligned}$$

qui s'écrit aussi en remplaçant a_t, b_t et c_t par leurs expressions :

$$\left(\frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t) \right)^{-1} \mathcal{A}_2 P^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) = \left(\frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t) \right)^{-1} \mathcal{A}_2 P^{(T_2)}(t, X_t, Y_t)$$

où

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 + r \left(x \frac{\partial}{\partial x} - \cdot \right).$$

Autrement dit, si on définit l'opérateur \mathcal{U} par

$$\mathcal{U} = \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^{-1} \mathcal{A}_2$$

alors

$$\mathcal{U} P^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) = \mathcal{U} P^{(T_2)}(t, X_t, Y_t).$$

Comme le membre de gauche dépend de T_1 mais pas de T_2 et que le membre de droite, lui, dépend de T_2 mais pas de T_1 , les deux membres sont en fait indépendants de T_1 et de T_2 . Moralement, l'opérateur \mathcal{U} annule la dépendance en l'échéance. Il existe donc une fonction $\psi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que quelle que soit son échéance $T > 0$, une option de payoff h a un prix $P^{(T)}(t, X_t, Y_t)$ qui vérifie

$$\mathcal{U} P^{(T)}(t, X_t, Y_t) = \psi(t, X_t, Y_t).$$

Désormais on considère l'option de payoff h et d'échéance T . Son prix $P(t, X_t, Y_t)$ vérifie l'équation

$$\mathcal{A}_2 P(t, X_t, Y_t) - \psi(t, X_t, Y_t) \frac{\partial P}{\partial y}(t, X_t, Y_t) = 0. \quad (13)$$

Pour des raisons qui apparaitront claires bientôt, on introduit les fonctions Λ et γ définies par

$$\psi(t, x, y) = \beta \Lambda(t, x, y) - \alpha(m - y) \quad (14)$$

et

$$\Lambda(t, x, y) = \rho \frac{\mu - r}{f(y)} + \sqrt{1 - \rho^2} \gamma(t, x, y). \quad (15)$$

Avec ces notations, (13) se réécrit, en omettant la dépendance en (t, X_t, Y_t)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} X_t^2 f(Y_t)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \rho \beta X_t f(Y_t) \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \\ & + r \left(X_t \frac{\partial P}{\partial x} - P \right) + \alpha(m - Y_t) \frac{\partial P}{\partial y} - \beta \Lambda \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Cette égalité étant vraie ps, le prix P est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$(\mathcal{L}_{BS}(f(y)) + \mathcal{L}_{OU} + \mathcal{L}_1) P(t, x, y) = 0 \quad (16)$$

avec la condition terminale

$$P(T, x, y) = h(x),$$

où

$$\mathcal{L}_{BS}(f(y)) = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} x^2 f(y)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + r \left(x \frac{\partial}{\partial x} - \cdot \right)$$

est l'opérateur Black-Scholes de paramètre de volatilité $f(y)$,

$$\mathcal{L}_{OU} = \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \alpha(m - y) \frac{\partial}{\partial y}$$

est le générateur infinitésimal du processus d'Ornstein-Uhlenbeck, et

$$\mathcal{L}_1 = \rho \beta x f(y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \beta \Lambda(t, x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

est un opérateur faisant intervenir la corrélation ρ d'une part, en facteur de la dérivée croisée, et la fonction Λ d'autre part. Cette dernière est appelée "*prime de risque de volatilité*". Plus précisément, la fonction $\frac{\mu - r}{f}$ est

exactement la prime de risque liée à la première source de bruit W et γ est exactement la prime de risque liée à la deuxième source de bruit Z . En effet, une variation infinitésimale du prix de l'option s'écrit, en utilisant (16) et la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} dP(t, X_t, Y_t) &= \left\{ rP + \frac{\mu - r}{f(Y_t)} \left(X_t f(Y_t) \frac{\partial P}{\partial x} + \beta \rho \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \gamma(t, X_t, Y_t) \beta \sqrt{1 - \rho^2} \frac{\partial P}{\partial y} \right\} dt \\ &\quad + \left\{ X_t f(Y_t) \frac{\partial P}{\partial x} + \beta \rho \frac{\partial P}{\partial y} \right\} dW_t + \left\{ \beta \sqrt{1 - \rho^2} \frac{\partial P}{\partial y} \right\} dZ_t. \end{aligned}$$

La fonction Λ agrège les primes de risque liées aux deux sources indépendantes de hasard, à travers (15). On comprend maintenant pourquoi il est bienvenu d'écrire la fonction ψ sous la forme (14)-(15).

2.2 Interprétation probabiliste

On cherche ici à donner une interprétation probabiliste du prix $P(t, x, y)$. Posons

$$\begin{cases} \theta_t^W = \frac{\mu - r}{f(Y_t)}, \\ \theta_t^Z = \gamma(t, X_t, Y_t), \end{cases}$$

et

$$M_t = \exp \left(- \int_0^t \theta_s^W dW_s - \int_0^t \theta_s^Z dZ_s - \frac{1}{2} \int_0^t \left((\theta_s^W)^2 + (\theta_s^Z)^2 \right) ds \right).$$

Sous certaines conditions techniques, par exemple sous la condition de Novikov :

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \left((\theta_s^W)^2 + (\theta_s^Z)^2 \right) ds \right) \right] < \infty, \quad (17)$$

M est une \mathbb{P} -martingale. On définit alors bien une mesure de probabilité $\mathbb{P}^{*(\gamma)}$ en posant

$$d\mathbb{P}^{*(\gamma)}(\omega) = M_T(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

Cette nouvelle probabilité est équivalente à \mathbb{P} et, d'après le théorème de Girsanov, les processus

$$W_t^* = W_t + \int_0^t \theta_s^W ds$$

et

$$Z_t^* = Z_t + \int_0^t \theta_s^Z ds$$

sont deux $\mathbb{P}^{*(\gamma)}$ -mouvements browniens indépendants. On a

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu X_t dt + f(Y_t) X_t dW_t \\ &= \mu X_t dt + f(Y_t) X_t \left(dW_t^* - \frac{\mu - r}{f(Y_t)} dt \right) \\ &= r X_t dt + f(Y_t) X_t dW_t^* \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} dY_t &= \alpha(m - Y_t) dt + \beta d\hat{Z}_t \\ &= \alpha(m - Y_t) dt + \beta \left(\rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t \right) \\ &= \alpha(m - Y_t) dt + \beta \rho \left(dW_t^* - \frac{\mu - r}{f(Y_t)} dt \right) \\ &\quad + \beta \sqrt{1 - \rho^2} (dZ_t^* - \gamma(t, X_t, Y_t) dt) \\ &= (\alpha(m - Y_t) - \beta \Lambda(t, X_t, Y_t)) dt + \beta \left(\rho dW_t^* + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t^* \right). \end{aligned}$$

Si on pose

$$\hat{Z}_t^* = \rho W_t^* + \sqrt{1 - \rho^2} Z_t^*$$

on définit un $\mathbb{P}^{*(\gamma)}$ -mouvement brownien et on peut réécrire la dynamique (1) sous la forme

$$\begin{cases} dX_t = r X_t dt + \sigma_t X_t dW_t^* \\ \sigma_t = f(Y_t) \\ dY_t = \{\alpha(m - Y_t) - \beta \Lambda(t, X_t, Y_t)\} dt + \beta d\hat{Z}_t^* \end{cases} \quad (18)$$

Sous la probabilité $\mathbb{P}^{*(\gamma)}$, le processus des prix actualisés $(\tilde{X}_t)_{0 \leq t \leq T}$ défini par

$$\tilde{X}_t = e^{-rt} X_t$$

est une martingale locale. On se placera sous les hypothèses qui assurent que c'est en fait une vraie $\mathbb{P}^{*(\gamma)}$ -martingale. On pourra par exemple supposer que

$$\mathbb{E}^{*(\gamma)} \left[\int_0^T f(Y_t)^2 X_t^2 dt \right] < \infty \quad (19)$$

ou même seulement

$$\mathbb{E}^{*(\gamma)} \left[\sqrt{\int_0^T f(Y_t)^2 X_t^2 dt} \right] < \infty. \quad (20)$$

Alors si on évalue l'option européenne de maturité T et de payoff $H = h(X_T)$ par

$$V_t = \mathbb{E}^{*(\gamma)} \left[e^{-r(T-t)} h(X_T) \mid \mathcal{F}_t \right]$$

on supprime toute possibilité d'arbitrage. L'énorme inconvénient de ce modèle à volatilité stochastique, lorsqu'on le compare au modèle de BLACK et SCHOLES, c'est qu'à chaque fonction $\gamma(t, x, y)$ correspond une probabilité risque neutre $\mathbb{P}^{*(\gamma)}$. On peut adopter le point de vue suivant : le marché sélectionne naturellement une prime de risque de volatilité γ qu'il s'agit de mesurer en étudiant l'historique des données et/ou l'ensemble des prix d'options cotées sur le marché. Pour ce faire, il sera sans doute raisonnable de supposer d'abord que γ est une constante, puis de considérer que γ ne dépend que de y , ou éventuellement de t et de y . Dans ces derniers cas en effet, la dynamique de Y reste autonome, au sens où la dynamique de X n'interfère pas avec celle de Y . C'est sans doute un problème difficile, et qui ne sera pas utile pour la suite de cette étude. Retenons qu'il existe *a priori* une infinité de γ possibles, auxquels correspondent une infinité de probabilités risque-neutre équivalentes $\mathbb{P}^{*(\gamma)}$. Cette propriété est caractéristique de l'*incomplétude* du marché.

Il semble cependant raisonnable, étant donnée l'interprétation financière de Λ , de ne considérer que des fonctions $y \mapsto \Lambda(y)$ bornées. Au vu de (18), la prime de risque Λ n'intervient que dans le terme de drift de Y où elle s'ajoute au terme $\alpha(m - Y_t)$ qui lui n'est pas borné. Il est donc légitime de penser que Λ ne joue qu'au "second ordre". Ainsi, lors des simulations numériques, on ne considérera que le cas $\Lambda \equiv 0$.

3 Analyse asymptotique

L'idée principale de Jean-Pierre FOUQUE, George PAPANICOLAOU et K. Ronnie SIRCAR [1] est de considérer :

- d'une part que la volatilité possède la propriété de retour à la moyenne, qu'on modélise par la force de rappel déterministe $\alpha(m - Y_t) dt$,

- d'autre part que ce retour à la moyenne est *rapide*. On suppose donc que l'intensité α de la force de rappel est grande. Grande devant quoi ? α est l'inverse d'un temps. Il s'agit donc de comparer $\varepsilon = 1/\alpha$ - temps caractéristique de retour à la moyenne - à l'échelle de temps du problème : $T - t$. Aussi on considérera que $\varepsilon \ll T - t$ ou, de manière équivalente, que $\alpha \gg (T - t)^{-1}$.

L'idée est ensuite de proposer un développement limité en $\sqrt{\varepsilon}$ du prix de l'option. Revenons d'abord sur la propriété de retour à la moyenne à travers l'exemple du processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

3.1 Retour à la moyenne

On se propose ici d'étudier plus en détail le processus d'Ornstein-Uhlenbeck Y de dynamique

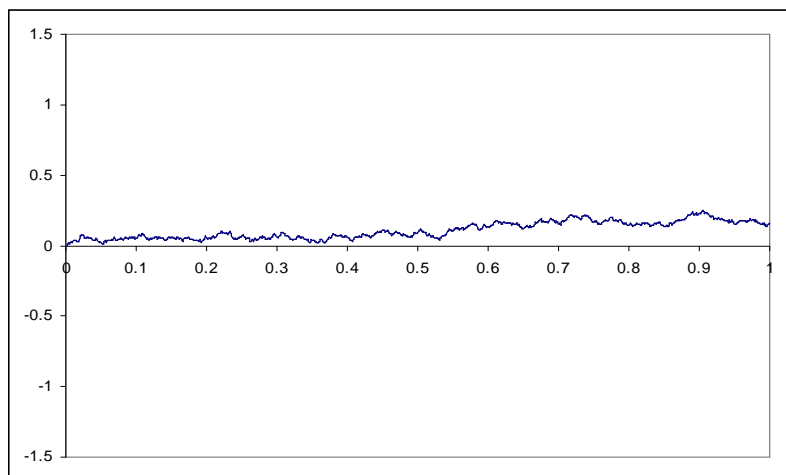
$$dY_t = \alpha(m - Y_t) dt + \beta d\hat{Z}_t, \quad Y_0 = y.$$

On a une expression explicite pour Y_t :

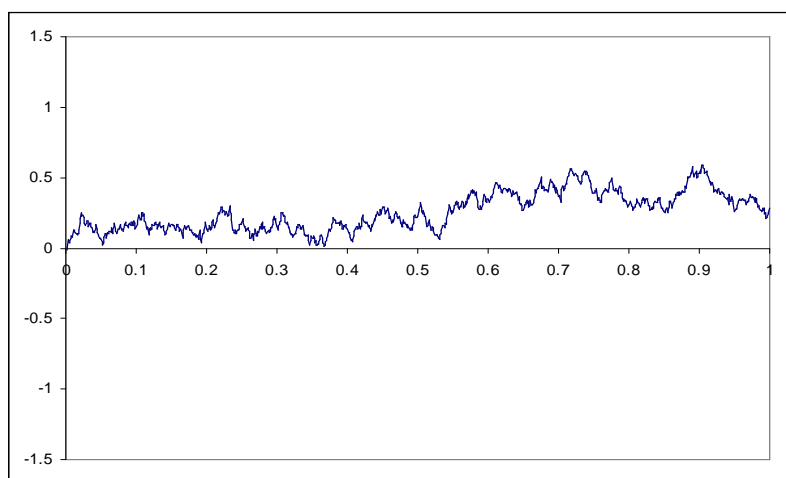
$$Y_t = m + (y - m)e^{-\alpha t} + \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} d\hat{Z}_s$$

qui prouve que Y_t suit la loi gaussienne de moyenne $m + (y - m)e^{-\alpha t}$ et de variance $\nu^2(1 - e^{-2\alpha t})$, où $\nu^2 = \frac{\beta^2}{2\alpha}$; Y_t converge en loi lorsque $t \rightarrow +\infty$ vers $\pi = \mathcal{N}(m, \nu^2)$, la loi gaussienne de moyenne m et de variance ν^2 .

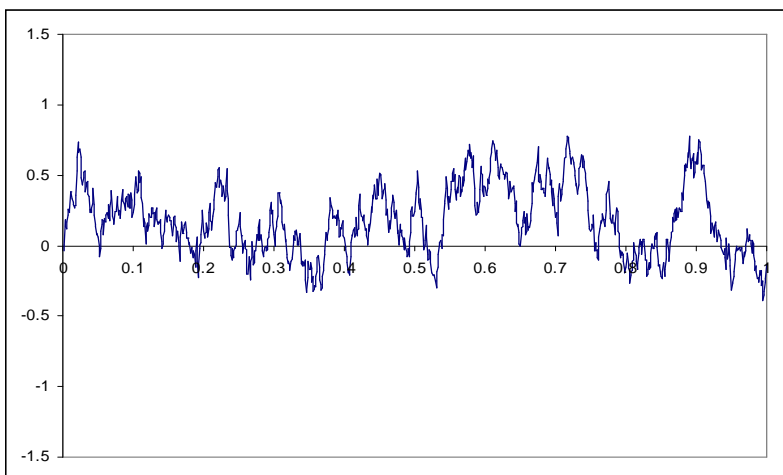
On donne ci-dessous des trajectoires du processus $(Y_t)_{0 \leq t \leq 1}$ pour $m = 0$, $\nu = 0.5$, $y = 0$. On teste plusieurs valeurs de α : 0.1, 1, 10, 100.



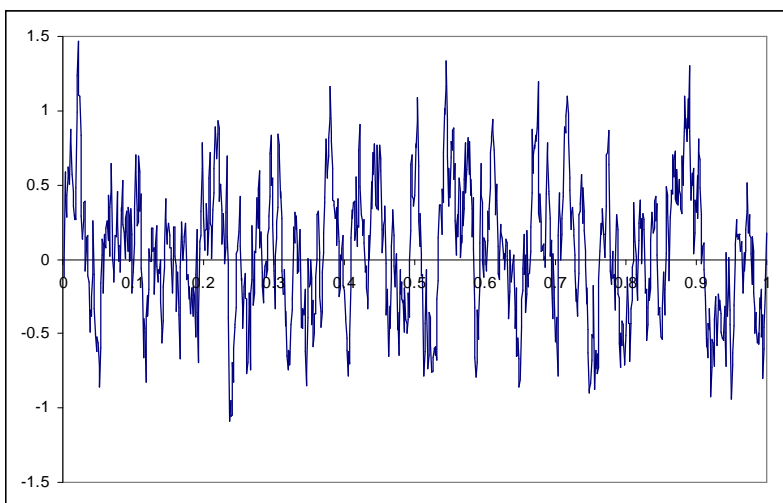
Une trajectoire du processus Y ; $\alpha = 0.1$



Une trajectoire du processus Y ; $\alpha = 1$



Une trajectoire du processus Y ; $\alpha = 10$



Une trajectoire du processus Y ; $\alpha = 100$

3.1.1 Probabilité stationnaire

Cette loi limite π est aussi la loi stationnaire du processus Y : si Y_0 suit la loi $\mathcal{N}(m, \nu^2)$, alors à toute date $t \geq 0$ la variable aléatoire Y_t suit aussi la loi $\mathcal{N}(m, \nu^2)$. Sa densité Φ est donnée par

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \exp\left(-\frac{(u-m)^2}{2\nu^2}\right)$$

et vérifie l'équation

$$\mathcal{L}_{OU}^* \Phi = 0$$

où

$$\mathcal{L}_{OU}^* = -\alpha \frac{\partial}{\partial y} ((m-y) \cdot) + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

est l'adjoint de l'opérateur

$$\mathcal{L}_{OU} = \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \alpha(m-y) \frac{\partial}{\partial y}$$

qui est le générateur infinitésimal de la diffusion Y , c'est-à-dire par définition l'opérateur qui à une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 à support compact associe la tendance en moyenne de $g(Y_t)$ connaissant Y_t :

$$(\mathcal{L}_{OU} g)(y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{E}^y [g(Y_t)] - g(y)}{t}.$$

Dans cette écriture, \mathbb{E}^y désigne l'espérance sous la probabilité \mathbb{P}^y qui est la probabilité conditionnelle sachant que $Y_0 = y$. On pose

$$L_\pi^2 = L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \pi), \quad (g_1 | g_2) = \int_{\mathbb{R}} g_1 g_2 d\pi, \quad \|g\| = \sqrt{(g | g)}.$$

On définit l'application $P_t : L_\pi^2 \rightarrow L_\pi^2$ par

$$(P_t g)(y) = \mathbb{E}^y [g(Y_t)]$$

et l'ensemble

$$\mathcal{D} = \left\{ g \in L_\pi^2 \mid \exists \psi \in L_\pi^2, \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\| \frac{P_t g - g}{t} - \psi \right\| = 0 \right\}.$$

Le générateur infinitésimal \mathcal{L}_{OU} est en fait défini sur $\mathcal{D} \subset L_\pi^2$ à valeurs dans L_π^2 . On donnera donc un sens à l'expression $\mathcal{L}_{OU} g$ si et seulement si $g \in \mathcal{D}$.

3.1.2 Propriété de décorrélation, théorème ergodique

L'inverse ε de l'intensité α de la force de rappel s'interprète aussi comme le temps caractéristique de décorrélation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck, puisque, si $s \leq t$,

$$\begin{aligned}
\text{cov}(Y_s, Y_t) &= \text{cov} \left(\beta \int_0^s e^{-\alpha(s-u)} d\hat{Z}_u, \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-v)} d\hat{Z}_v \right) \\
&= \beta^2 e^{-\alpha(t+s)} \mathbb{E} \left[\int_0^s e^{\alpha u} d\hat{Z}_u \int_0^t e^{\alpha v} d\hat{Z}_v \right] \\
&= \beta^2 e^{-\alpha(t+s)} \mathbb{E} \left[\int_0^s e^{\alpha u} d\hat{Z}_u \int_0^s e^{\alpha v} d\hat{Z}_v \right] \\
&= \beta^2 e^{-\alpha(t+s)} \int_0^s e^{2\alpha u} du \\
&= \nu^2 (e^{-\alpha(t-s)} - e^{-\alpha(t+s)}) .
\end{aligned}$$

Par conséquent, si s et t tendent vers $+\infty$ de sorte que $\Delta = |t - s|$ reste constant, la covariance limite de Y_s et Y_t vaut $\nu^2 e^{-\alpha\Delta}$. Notons que c'est exactement la covariance de Y_s et Y_t sous la loi stationnaire. A la limite, lorsque ce temps typique de décorrélation ε est infiniment petit, i.e. lorsque α est infiniment grand, les valeurs Y_s et Y_t , même pour des temps voisins s et t , sont indépendantes (leur covariance est nulle et le processus Y est gaussien). C'est pour cette raison qu'on va disposer de théorèmes ergodiques du type loi forte des grands nombres. Plus précisément, pour toute fonction g intégrable contre la mesure stationnaire $\mathcal{N}(m, \nu^2)$,

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{T-t} \int_t^T g(Y_s) ds = \langle g \rangle \quad (21)$$

où, par définition, $\langle g \rangle$ est l'espérance de la fonction g contre la mesure stationnaire, i.e.

$$\langle g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) \Phi(u) du.$$

En pratique, l'approximation

$$\frac{1}{T-t} \int_t^T g(Y_s) ds \approx \langle g \rangle$$

ne sera valable que si $\alpha \gg \frac{1}{T-t}$. Dans le contexte des marchés financiers, cela signifie que nous ne pourrions faire cette approximation que si nous sommes suffisamment loin de l'échéance T de l'option traitée.

3.1.3 Equation homogène

On sera amené à considérer l'ensemble \mathcal{H} des fonctions $\varphi \in \mathcal{D}$ (donc $\varphi \in L^2_\pi$) et solutions de l'équation homogène $\mathcal{L}_{OU}\varphi = 0$. Cette dernière équation est en fait l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{1}{2}\beta^2\varphi''(y) + \alpha(m-y)\varphi'(y) = 0.$$

L'ensemble des solutions de cette équation est l'espace vectoriel de dimension 2 engendré par les constantes et par la fonction $\psi : y \mapsto \int_0^y \exp\left(\frac{(m-z)^2}{2\nu^2}\right) dz$. Cette dernière fonction n'étant pas de carré intégrable contre la mesure stationnaire $\pi = \mathcal{N}(m, \nu^2)$, \mathcal{H} est l'ensemble des fonctions constantes³.

3.2 Le prix Black-Scholes corrigé

3.2.1 Notations

On se place ici sous l'hypothèse $\varepsilon \ll T - t$. Moralement, sous cette hypothèse, Y_t atteint sa loi limite $\mathcal{N}(m, \nu^2)$ en temps fini. On se placera donc dans l'asymptotique

$$\varepsilon \longrightarrow 0, \quad \nu^2 = \text{cte.}$$

Comme $\nu^2 = \frac{\beta^2}{2\alpha}$, cela signifie que $\beta = \nu\sqrt{2\alpha} = \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}}$ tend vers $+\infty$. On peut réécrire la dynamique (1) en faisant apparaître le paramètre infiniment petit ε :

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon = rX_t^\varepsilon dt + \sigma_t X_t^\varepsilon dW_t^*, \\ \sigma_t = f(Y_t^\varepsilon), \\ dY_t^\varepsilon = \left\{ \frac{1}{\varepsilon}(m - Y_t^\varepsilon) - \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}}\Lambda(t, X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon) \right\} dt + \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} d\hat{Z}_t^*. \end{cases}$$

Le prix P^ε de l'option européenne de maturité T et de payoff $H = h(X_T^\varepsilon) \in L^2(\mathbb{P}^*, \mathcal{F}_T)$ vérifie

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{2}(X_t^\varepsilon)^2 f(Y_t^\varepsilon)^2 \frac{\partial^2 P^\varepsilon}{\partial x^2} + \rho \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} X_t^\varepsilon f(Y_t^\varepsilon) \frac{\partial^2 P^\varepsilon}{\partial x \partial y} + \frac{\nu^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 P^\varepsilon}{\partial y^2} \\ & + r \left(X_t^\varepsilon \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial x} - P^\varepsilon \right) + \frac{1}{\varepsilon}(m - Y_t^\varepsilon) \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial y} - \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} \Lambda \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

et est donc solution de l'EDP

$$\left(\frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L}_0 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \right) P^\varepsilon(t, x, y) = 0 \quad (22)$$

³ ψ n'est même pas intégrable contre π ; de ce fait, on ne peut pas donner de sens à $\mathbb{E}^y[\psi(Y_t)]$, ni *a fortiori* à $(\mathcal{L}_{OU}\psi)(y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{E}^y[\psi(Y_t)] - \psi(y)}{t}$.

avec la condition terminale

$$P^\varepsilon(T, x, y) = h(x),$$

où

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{BS}(f(y)) = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}x^2 f(y)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + r \left(x \frac{\partial}{\partial x} - \cdot \right)$$

est l'opérateur Black-Scholes de paramètre de volatilité $f(y)$,

$$\mathcal{L}_0 = \varepsilon \mathcal{L}_{OU} = \nu^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (m - y) \frac{\partial}{\partial y}$$

est le générateur infinitésimal du processus d'Ornstein-Uhlenbeck multiplié par ε , et

$$\mathcal{L}_1 = \rho \nu \sqrt{2} x f(y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \nu \sqrt{2} \Lambda \frac{\partial}{\partial y}.$$

*Dans toute la suite, on fait l'hypothèse que la prime de risque Λ est une fonction continue **bornée ne dépendant que de y .***

3.2.2 Le problème à résoudre

On se place dans les conditions où, pour tout $\varepsilon > 0$, l'EDP (22) a une unique solution. On va voir que cette solution P^ε a une limite quand ε tend vers 0 et on va s'intéresser à la correction d'ordre 1. Pour ce faire, on suppose l'existence d'un développement en série de la forme

$$P^\varepsilon = P_0 + \sqrt{\varepsilon} P_1 + \varepsilon P_2 + \varepsilon \sqrt{\varepsilon} P_3 + \varepsilon^2 P_4 + \dots$$

(22) se réécrit alors formellement

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L}_0 P_0 \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\mathcal{L}_0 P_1 + \mathcal{L}_1 P_0) \\ &+ (\mathcal{L}_0 P_2 + \mathcal{L}_1 P_1 + \mathcal{L}_2 P_0) \\ &+ \sqrt{\varepsilon} (\mathcal{L}_0 P_3 + \mathcal{L}_1 P_2 + \mathcal{L}_2 P_1) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

On cherche des fonctions $P_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulières qui vérifient :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 P_0 = 0, & P_0(T, x, y) = h(x), \\ \mathcal{L}_0 P_1 + \mathcal{L}_1 P_0 = 0, & P_1(T, x, y) = 0, \\ \mathcal{L}_0 P_n + \mathcal{L}_1 P_{n-1} + \mathcal{L}_2 P_{n-2} = 0, & P_n(T, x, y) = 0, \quad \forall n \geq 2. \end{cases}$$

L'opérateur \mathcal{L}_0 n'agit que sur la variable y . Plus précisément, notons $Q_i^{t,x} = P_i(t, x, \cdot)$. C'est une fonction de y seulement. On a

$$(\mathcal{L}_0 P_i)(t, x, y) = (\mathcal{L}_0 Q_i^{t,x})(y)$$

(cela n'est pas vrai pour l'opérateur \mathcal{L}_1 par exemple). Afin de donner un sens à l'expression $\mathcal{L}_0 P_n$, il suffit donc de donner un sens, pour tous t et x , à $\mathcal{L}_0 Q_n^{t,x}$. On cherche donc des fonctions P_i telles que $P_i(t, x, \cdot) \in \mathcal{D}$, notamment $P_i(t, x, \cdot) \in L_\pi^2$.

Enfin, les opérateurs \mathcal{L}_i font intervenir des dérivées premières en temps et secondes en x et en y . On cherche donc des fonctions P_i de classe $C^{1,2,2}$.

On se propose donc de résoudre le problème suivant : **trouver des fonctions $P_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^{1,2,2}$ qui vérifient :**

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 P_0 = 0, & P_0(T, x, y) = h(x), \\ \mathcal{L}_0 P_1 + \mathcal{L}_1 P_0 = 0, & P_1(T, x, y) = 0, \\ \mathcal{L}_0 P_n + \mathcal{L}_1 P_{n-1} + \mathcal{L}_2 P_{n-2} = 0, & P_n(T, x, y) = 0, \quad \forall n \geq 2. \end{cases}$$

et telles que $P_i(t, x, \cdot) \in \mathcal{D}$ pour tous t, x .

Notons, de plus, que pour la probabilité \mathbb{P}^* sélectionnée par le marché, on a

$$P^\varepsilon(t, X_t, Y_t) = \mathbb{E}^* [e^{-r(T-t)} h(X_T) \mid \mathcal{F}_t]$$

où \mathcal{F}_t est l'information contenue dans les trajectoires des deux browniens W^* et \hat{Z}^* jusqu'à la date t . Le payoff $h(X_T)$ étant supposé de carré intégrable sous \mathbb{P}^* , $P^\varepsilon(t, X_t, Y_t)$ est aussi dans l'espace $L^2(\mathbb{P}^*)$.

En fait, on se limitera à la recherche des fonctions P_0 et P_1 . Elles permettent d'obtenir le prix corrigé à l'ordre 1 : $P_0 + \sqrt{\varepsilon} P_1$. On va procéder en cinq étapes. Avant cela, trois remarques sur les opérateurs \mathcal{L}_i :

- \mathcal{L}_0 ne fait intervenir que la variable y ; pour une fonction $\psi(t, x)$, $\mathcal{L}_0 \psi = 0$,
- \mathcal{L}_1 est une combinaison des dérivées $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$; pour une fonction $\psi(t, x)$, $\mathcal{L}_1 \psi = 0$,

- \mathcal{L}_2 ne fait pas intervenir de dérivée par rapport à y ; cependant, la variable y est présente à travers $f(y)$ en facteur de $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$; pour une fonction $\psi(t, x)$,

$$\begin{aligned}
& \langle \mathcal{L}_2 \psi \rangle(t, x) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{L}_2 \psi)(t, x, u) \Phi(u) du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2} x^2 f(u)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(t, x) + r \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x) - \psi(t, x) \right) \right) \Phi(u) du \\
&= \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2} x^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(u) \Phi(u) du \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(t, x) + r \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x) - \psi(t, x) \right) \\
&= \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 x^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(t, x) + r \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x) - \psi(t, x) \right) \\
&= \langle \mathcal{L}_2 \rangle \psi(t, x)
\end{aligned}$$

où on a défini

$$\bar{\sigma}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(u) \Phi(u) du = \langle f^2 \rangle$$

(on suppose donc dans toute la suite que $f \in L_\pi^2$) et

$$\langle \mathcal{L}_2 \rangle = \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}).$$

Supposons que les fonctions P_0, P_1, P_2, \dots répondant au problème ci-dessus existent, et cherchons à calculer P_0 et P_1 .

3.2.3 Etape 1 : $\mathcal{L}_0 P_0 = 0$

Comme $\mathcal{L}_0 P_0 = 0$, $\mathcal{L}_0 Q_0^{t,x} = 0$ donc $\mathcal{L}_{OU} Q_0^{t,x} = 0$: $P_0(t, x, \cdot)$ appartient à l'ensemble \mathcal{H} des solutions de l'équation homogène de la diffusion Y . On a montré que cet ensemble est réduit aux fonctions constantes. Ceci prouve que la fonction P_0 ne dépend pas de y . Par abus, on notera $P_0(t, x)$.

3.2.4 Etape 2 : $\mathcal{L}_0 P_1 + \mathcal{L}_1 P_0 = 0$

Comme P_0 ne dépend pas de y , $\mathcal{L}_1 P_0 = 0$; l'équation $\mathcal{L}_0 P_1 + \mathcal{L}_1 P_0 = 0$ se réduit donc à $\mathcal{L}_0 P_1 = 0$. Comme à l'étape 1, on montre que la fonction P_1 ne dépend pas de y . Par abus, on notera $P_1(t, x)$.

Dès à présent, on sait que le prix corrigé à l'ordre 1, $P_0 + \sqrt{\varepsilon}P_1$ ne dépend pas de y . C'est une propriété remarquable : à l'ordre 1, il n'est pas besoin de connaître le niveau actuel de la volatilité pour déterminer le prix de l'option ; la date t de la transaction et le niveau actuel x du cours du sous-jacent suffisent. Cela tombe bien car la volatilité n'est pas directement observable.

3.2.5 Etape 3 : $\mathcal{L}_0P_2 + \mathcal{L}_1P_1 + \mathcal{L}_2P_0 = 0$

Comme P_1 ne dépend pas de y , $\mathcal{L}_1P_1 = 0$; l'équation $\mathcal{L}_0P_2 + \mathcal{L}_1P_1 + \mathcal{L}_2P_0 = 0$ se réduit donc à $\mathcal{L}_0P_2 + \mathcal{L}_2P_0 = 0$; $\mathcal{L}_0P_2 \in L_\pi^2$ (donc $\mathcal{L}_2P_0 \in L_\pi^2$) et par définition de la probabilité invariante $\pi = \mathcal{N}(m, \nu^2) = \Phi(u) du$,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_0P_2 \rangle(t, x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{L}_0P_2)(t, x, u) \Phi(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P_2(t, x, u) (\mathcal{L}_0^*\Phi(u)) du \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\langle \mathcal{L}_2P_0 \rangle = 0$, i.e. $\langle \mathcal{L}_2 \rangle P_0 = 0$, ce qui s'écrit aussi $\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})P_0 = 0$. A l'ordre 0, le prix de l'option est donc le prix donné par le modèle de BLACK et SCHOLES, utilisé avec le paramètre de volatilité constant $\bar{\sigma}$, moyenne ergodique de la volatilité stochastique. Reste à déterminer P_1 .

3.2.6 Etape 4 : équation de Poisson

On connaît maintenant P_0 , donc aussi \mathcal{L}_2P_0 : c'est une fonction de (t, x, y) . Certes P_0 ne dépend pas de y , mais le coefficient $f(y)$ en facteur de $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ dans l'expression de \mathcal{L}_2 réintroduit de la dépendance en y . Soit $R^{t,x} = (\mathcal{L}_2P_0)(t, x, \cdot)$ et $Q_2^{t,x} = P_2(t, x, \cdot)$. Comme $(\mathcal{L}_0P_2)(t, x, y) = (\mathcal{L}_0Q_2^{t,x})(y)$ (rappelons que c'est une propriété propre à l'opérateur \mathcal{L}_0), l'égalité

$$\mathcal{L}_0P_2 + \mathcal{L}_2P_0 = 0$$

entre fonctions de trois variables (t, x, y) est équivalente aux égalités

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*, \quad \mathcal{L}_0Q_2^{t,x} + R^{t,x} = 0$$

entre fonctions d'une seule variable (la variable y). On se donne donc une fonction $R : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\langle R \rangle = 0$ et on cherche $Q_2 \in \mathcal{D} \subset L_\pi^2$ telle que

$$\mathcal{L}_0Q_2 + R = 0. \tag{23}$$

Cette équation porte le nom d'*équation de Poisson*. En effet, pour une diffusion brownienne dans l'espace, le générateur infinitésimal vaut $\frac{1}{2}\Delta$, où Δ est le laplacien, et on obtient alors l'équation de Poisson de l'électrostatique : la solution Q_2 s'interprète, dans les bonnes unités, comme le potentiel électrique correspondant à la densité volumique de charges R .

L'équation (23) se réécrit

$$\nu^2 Q_2''(y) + (m - y) Q_2'(y) = -R(y).$$

Soit $D_2 = Q_2'$. La droite de solutions de l'équation sans second membre

$$\nu^2 D_2'(y) + (m - y) D_2(y) = 0 \quad (24)$$

est engendrée par $y \mapsto \exp\left(\frac{(y-m)^2}{2\nu^2}\right)$, ou de manière équivalente par Φ^{-1} .

Une solution particulière $y \mapsto \lambda(y) \exp\left(\frac{(y-m)^2}{2\nu^2}\right)$ de

$$\nu^2 D_2'(y) + (m - y) D_2(y) = -R(y)$$

est obtenue par la méthode de variation de la constante : on a $\lambda'(y) = -\frac{R(y)}{\nu^2} \exp\left(-\frac{(y-m)^2}{2\nu^2}\right)$. Ainsi,

$$Q_2'(y) = -\frac{1}{\nu^2} \exp\left(\frac{(y-m)^2}{2\nu^2}\right) \left(\int_{-\infty}^y R(z) \exp\left(-\frac{(z-m)^2}{2\nu^2}\right) dz + \text{cte}_1 \right)$$

ou encore

$$Q_2'(y) = -\frac{1}{\nu^2 \Phi(y)} \left(\int_{-\infty}^y R(z) \Phi(z) dz + \text{cte}_2 \right).$$

Comme $\int_{-\infty}^y R(z) \Phi(z) dz = \langle R \rangle = 0$, $\text{cte}_2 = 0$, d'où

$$Q_2'(y) = -\frac{1}{\nu^2 \Phi(y)} \left(\int_{-\infty}^y R(z) \Phi(z) dz \right)$$

qu'il s'agit d'intégrer pour obtenir Q_2 .

Dans le cas que nous étudions, vu que $\langle \mathcal{L}_2 P_0 \rangle = 0$,

$$\begin{aligned} R(y) &\equiv R^{t,x}(y) \\ &= (\mathcal{L}_2 P_0)(t, x, y) \\ &= (\mathcal{L}_2 P_0)(t, x, y) - \langle \mathcal{L}_2 P_0 \rangle(t, x) \\ &= \frac{1}{2} (f(y)^2 - \langle f^2 \rangle) x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x). \end{aligned}$$

Par conséquent, si ϕ est une solution de $\mathcal{L}_0\phi = f^2 - \langle f^2 \rangle$, alors

$$P_2^{t,x}(y) = -\frac{1}{2}x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) (\phi(y) + \text{cte}).$$

A chaque couple (t, x) fixé correspond une constante, on note donc

$$P_2(t, x, y) = -\frac{1}{2}x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) (\phi(y) + c(t, x))$$

et on a pour ϕ l'expression

$$\phi'(y) = \frac{1}{\nu^2 \Phi(y)} \left(\int_{-\infty}^y (f(z)^2 - \langle f^2 \rangle) \Phi(z) dz \right).$$

3.2.7 Etape 5 : $\mathcal{L}_0 P_3 + \mathcal{L}_1 P_2 + \mathcal{L}_2 P_1 = 0$

Comme $\langle \mathcal{L}_0 P_3 \rangle = 0$, on a $\langle \mathcal{L}_1 P_2 + \mathcal{L}_2 P_1 \rangle = 0$, ce qui s'écrit aussi $\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})P_1 = -\langle \mathcal{L}_1 P_2 \rangle$. On voit donc que P_1 est solution d'une équation aux dérivées partielles du type Black-Scholes avec second membre. Le second membre est l'opposé de la moyenne ergodique de $\mathcal{L}_1 P_2$ et fait donc intervenir, comme le montre l'expression de \mathcal{L}_1 ,

- la corrélation entre volatilité et sous-jacent,
- la prime de risque de volatilité.

Plus précisément,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 P_2(t, x, y) &= \left(\rho \nu \sqrt{2} x f(y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \nu \sqrt{2} \Lambda(y) \frac{\partial}{\partial y} \right) P_2(t, x, y) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\rho \nu \sqrt{2} x f(y) \frac{\partial}{\partial x} - \nu \sqrt{2} \Lambda(y) \right) \left(x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) \phi'(y) \right) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \rho \nu f(y) \phi'(y) \left(2x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) + x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t, x) \right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{2} \nu \Lambda(y) \phi'(y) x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x). \end{aligned}$$

Cette écriture fait apparaître les quantités $L_2(t, x) = x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x)$ et $L_3(t, x) = x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t, x)$ et décompose $\mathcal{L}_1 P_2$ en :

- une partie de *corrélation* pure, en facteur de la combinaison linéaire $2L_2 + L_3$,

– une partie de *prime de risque de volatilité* pure, en facteur de L_2 .

Sur une échelle de temps grande devant ε , la volatilité atteint son régime stationnaire :

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}_1 P_2 \rangle(t, x) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \rho \nu \langle f \phi' \rangle \left(2x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) + x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t, x) \right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{2} \nu \langle \Lambda \phi' \rangle x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x).\end{aligned}$$

Notons $\tilde{P}_1 = \sqrt{\varepsilon} P_1$ la correction du prix à l'ordre 1. \tilde{P}_1 est solution de l'EDP

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) \tilde{P}_1 &= \frac{\rho \nu}{\sqrt{2\alpha}} \langle f \phi' \rangle \left(2x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) + x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t, x) \right) \\ &\quad - \frac{\nu}{\sqrt{2\alpha}} \langle \Lambda \phi' \rangle x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x).\end{aligned}$$

qu'on peut également écrire explicitement comme combinaison linéaire de L_2 et de L_3 :

$$\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) \tilde{P}_1 = V_2 x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) + V_3 x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t, x)$$

avec

$$\begin{aligned}V_2 &= \frac{\nu}{\sqrt{2\alpha}} (2\rho \langle f \phi' \rangle - \langle \Lambda \phi' \rangle), \\ V_3 &= \frac{\rho \nu}{\sqrt{2\alpha}} \langle f \phi' \rangle.\end{aligned}$$

On pose $H(t, x) = V_2 x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) + V_3 x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t, x)$. Comme $\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) \left(x^n \frac{\partial^n P_0}{\partial x^n} \right) = x^n \frac{\partial^n P_0}{\partial x^n} \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) P_0 = 0$, on a

$$\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) H = \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) \left(V_2 x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) + V_3 x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t, x) \right) = 0$$

puis

$$\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) (-(T-t)H) = H - (T-t)\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})H = H,$$

ce qui prouve que

$$\tilde{P}_1(t, x) = -(T-t) \left(V_2 x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) + V_3 x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t, x) \right). \quad (25)$$

On s'aperçoit sur cette formule que pour calculer le prix corrigé à l'ordre 1, il suffit de connaître les trois quantités $\bar{\sigma}$, V_2 et V_3 . En pratique, il faudra *et il suffira* de calibrer ces trois paramètres qui agrègent $\alpha, m, \beta, \rho, f, \gamma, \mu$. Nous traiterons ce point plus loin dans la section “calibration”. On trouvera également dans cette section le graphe de la correction $x \mapsto \tilde{P}_1(0, x)$ dans le cas de l'option d'achat.

3.3 Stratégies de couverture

Comme nous sommes en marché incomplet, il n'est pas possible d'éliminer le risque en gérant un portefeuille ne contenant que du liquide et du sous-jacent. Il s'agit de transiger entre les pertes éventuelles dues à une mauvaise couverture et le coût de la couverture. On mesure sous la probabilité subjective \mathbb{P} les performances statistiques d'une stratégie.

3.3.1 La stratégie de couverture dans le modèle de Black et Scholes

Dans le modèle de BLACK et SCHOLLES, pour la dynamique suivante du sous-jacent :

$$dX_t = \mu X_t dt + \bar{\sigma} X_t dW_t,$$

une option européenne qui paye $h(X_T) \in L^2(\mathbb{P}^*)$ vaut $P_0(t, X_t)$ à la date t et est parfaitement couverte par le portefeuille autofinancé qui contient

$$a_t = \frac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t)$$

unités de sous-jacent et

$$b_t = e^{-rt} \left(P_0(t, X_t) - X_t \frac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t) \right)$$

unités monétaires. En effet :

- ce portefeuille *réplique* l'option : à toute date t , la valeur de ce portefeuille est $P_0(t, X_t)$; en particulier, à maturité, sa valeur est $P_0(T, X_T) = h(X_T)$,
- ce portefeuille est *autofinancé* : la formule d'Itô donne

$$dP_0(t, X_t) = \frac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \left(\frac{\partial P_0}{\partial t}(t, X_t) + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 X_t^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, X_t) \right) dt.$$

Comme P_0 est solution de l'EDP Black-Scholes

$$\frac{\partial P_0}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} + r \left(x \frac{\partial P_0}{\partial x} - P_0 \right) = 0, \quad (26)$$

on a

$$dP_0(t, X_t) = \frac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t) dX_t + r \left(P_0(t, X_t) - X_t \frac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t) \right) dt,$$

i.e.

$$dP_0(t, X_t) = a_t dX_t + b_t d(e^{rt}).$$

Autrement dit, la variation infinitésimale $dP_0(t, X_t)$ de la valeur de ce portefeuille est exactement la variation due au marché.

Dans la suite, on se place dans le cas du modèle à volatilité stochastique (1)

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + f(Y_t) X_t dW_t, \\ dY_t = \alpha(m - Y_t) dt + \beta d\hat{Z}_t, \end{cases}$$

on propose trois stratégies de couverture et on calcule leur coût.

3.3.2 Stratégie 1 : delta Black-Scholes

Coût exact On décide de suivre la même stratégie de gestion de portefeuille que dans le cas Black-Scholes avec volatilité $\bar{\sigma} = \sqrt{\langle f^2 \rangle}$, c'est-à-dire qu'on choisit⁴ :

$$\begin{cases} a_t^{(1)} = \frac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t), \\ b_t^{(1)} = e^{-rt} \left(P_0(t, X_t) - X_t \frac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t) \right). \end{cases}$$

A tout instant, la valeur de ce portefeuille est $a_t^{(1)} X_t + b_t^{(1)} e^{rt} = P_0(t, X_t)$. Comme $P_0(T, x) = h(x)$, la valeur finale est $h(X_T)$ donc ce portefeuille *réplique* l'option. Le hic, c'est qu'il *n'est pas* autofinancé. En effet,

$$dP_0(t, X_t) = a_t^{(1)} dX_t + \left(\frac{\partial P_0}{\partial t}(t, X_t) + \frac{1}{2} f(Y_t)^2 X_t^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, X_t) \right) dt$$

tandis que la variation due au marché vaut

$$a_t^{(1)} dX_t + b_t^{(1)} d(e^{rt}) = a_t^{(1)} dX_t + r \left(P_0(t, X_t) - X_t \frac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t) \right) dt,$$

⁴L'indice 1 se rapporte à la stratégie 1.

si bien que la différence, qu'on interprète comme le *coût infinitésimal* de la couverture, n'est pas nulle et vaut exactement, en utilisant (26) :

$$dC_t^{(1)} \tag{27}$$

$$= dP_0(t, X_t) - \left(a_t^{(1)} dX_t + b_t^{(1)} d(e^{rt}) \right) \tag{28}$$

$$= \left(\frac{\partial P_0}{\partial t}(t, X_t) + \frac{1}{2} f(Y_t)^2 X_t^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, X_t) - r \left(P_0(t, X_t) - X_t \frac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t) \right) \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} (f(Y_t)^2 - \bar{\sigma}^2) X_t^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, X_t) dt.$$

Si $dC_t^{(1)} > 0$, on doit injecter de l'argent dans le portefeuille; si $dC_t^{(1)} < 0$, on doit en retirer. La formule (27) est remarquable car *elle est valable trajectoire par trajectoire*; c'est une formule exacte, en ce sens qu'elle ne fait pas intervenir d'espérance; notamment elle ne suppose aucune probabilité sous-jacente. Remarquons tout de suite que le coût de gestion du portefeuille est :

- un processus stochastique à *variation finie*,
- d'autant plus petit que
 - la volatilité moyenne $\bar{\sigma}$ est proche de la vraie volatilité $f(Y_t)$,
 - la convexité de P_0 est petite, i.e. $x \mapsto P_0(t, x)$ a un profil plat.

Le vendeur de l'option touche $P_0(0, X_0) + \tilde{P}_1(0, X_0)$ à la date $t = 0$; $\tilde{P}_1(0, X_0)$ est de signe quelconque, comme le montre (25). Le vendeur investit $P_0(0, X_0)$ dans le portefeuille, répartis en a_0 unités d'actif risqué et b_0 unités monétaires; après cet investissement initial, la gestion dynamique du portefeuille de réplcation $(a_t^{(1)}, b_t^{(1)})$ a un coût aléatoire

$$C_t^{(1)} = \int_0^t dC_s^{(1)} = \frac{1}{2} \int_0^t (f(Y_s)^2 - \bar{\sigma}^2) X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) ds.$$

De plus, la richesse $\tilde{P}_1(0, X_0)$ est placée - si elle est positive - ou empruntée - si elle est négative - à la banque.

Effet de moyenne Heuristiquement, l'ergodicité du processus Y traduit un effet de moyenne et permet d'identifier, dans la limite où α est grand, l'intégrale

$$\int_0^t f(Y_s)^2 X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) ds$$

par

$$\int_0^t \bar{\sigma}^2 X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) ds$$

et par conséquent le coût $C_t^{(1)}$, qui est la différence des deux intégrales, est petit. Remarquons qu'il ne s'agit pas d'une application directe du théorème ergodique (21) puisque Y gouverne la dynamique de X . L'outil technique pour démontrer la convergence

$$\int_0^t f(Y_s)^2 X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) ds \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^t \bar{\sigma}^2 X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) ds$$

est le calcul stochastique. Nous allons en fait démontrer directement le résultat du second ordre correspondant :

$$C_t^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} (B_t + M_t) + O\left(\frac{1}{\alpha}\right) \quad ps$$

où $(B_t)_{t \geq 0}$ est un processus à variation finie et $(M_t)_{t \geq 0}$ une martingale de moyenne nulle d'ordre 1 vis-à-vis de α .

La preuve fait intervenir la fonction de classe C^2 ϕ ; rappelons qu'elle vérifie $\mathcal{L}_0 \phi = f^2 - \langle f^2 \rangle$, i.e. $\mathcal{L}_0 \phi = f^2 - \bar{\sigma}^2$. Ainsi, $(f(Y_s)^2 - \bar{\sigma}^2) ds = (\mathcal{L}_0 \phi)(Y_s) ds$. Comme, par la formule d'Itô,

$$d\phi(Y_s) = \alpha (\mathcal{L}_0 \phi)(Y_s) ds + \nu \sqrt{2\alpha} \phi'(Y_s) d\hat{Z}_s,$$

on a

$$(f(Y_s)^2 - \bar{\sigma}^2) ds = \frac{1}{\alpha} \left(d\phi(Y_s) - \nu \sqrt{2\alpha} \phi'(Y_s) d\hat{Z}_s \right),$$

de sorte que

$$C_t^{(1)} = \frac{1}{2\alpha} \left\{ \int_0^t X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) d\phi(Y_s) - \nu \sqrt{2\alpha} \int_0^t X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) \phi'(Y_s) d\hat{Z}_s \right\}.$$

Soit M la \mathbb{P} -martingale locale définie par

$$M_t = -\frac{\nu}{\sqrt{2}} \int_0^t X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) \phi'(Y_s) d\hat{Z}_s.$$

Ainsi,

$$C_t^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} M_t + \frac{1}{2\alpha} \int_0^t X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) d\phi(Y_s).$$

Cette écriture peut laisser croire que $C_t^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} M_t + O\left(\frac{1}{\alpha}\right)$; il n'en est rien car l'élément différentiel $d\phi(Y_s)$ est un infiniment grand vis-à-vis de α , d'ordre $\sqrt{\alpha}$ contre l'intégrand $X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s)$ qui est une fonction de X seulement. Précisément,

$$\begin{aligned} d\left(\phi(Y_s) X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s)\right) &= X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) d\phi(Y_s) \\ &\quad + \phi(Y_s) d\left(X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s)\right) \\ &\quad + d\left\langle \phi(Y), X^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(\cdot, X) \right\rangle_s, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} &d\left\langle \phi(Y), X^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(\cdot, X) \right\rangle_s \\ &= \rho\nu\sqrt{2\alpha}f(Y_s)\phi'(Y_s) \left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(s, X_s)\right) ds, \end{aligned}$$

vu que

$$d\phi(Y_s) = \dots ds + \nu\sqrt{2\alpha}\phi'(Y_s) d\hat{Z}_s$$

et

$$\begin{aligned} d\left(X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s)\right) &= \dots ds + \\ &\quad f(Y_s) \left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(s, X_s)\right) dW_s. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} C_t^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} M_t \\ &\quad - \frac{\rho\nu}{\sqrt{2\alpha}} \int_0^t f(Y_s)\phi'(Y_s) \left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(s, X_s)\right) ds \\ &\quad + \frac{1}{2\alpha} \int_0^t d\left(\phi(Y_s) X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s)\right) \\ &\quad - \frac{1}{2\alpha} \int_0^t \phi(Y_s) d\left(X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s)\right). \end{aligned} \tag{29a}$$

Le troisième terme vaut $\frac{1}{2\alpha} \left(\phi(Y_t) X_t^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, X_t) - \phi(Y_0) X_0^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(0, X_0) \right)$ et est donc d'ordre $\frac{1}{\alpha}$; le quatrième terme aussi car l'élément différentiel $d \left(X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) \right)$ est d'ordre 1 vis-à-vis de α . On pose

$$B_t = -\frac{\rho\nu}{\sqrt{2}} \int_0^t f(Y_s) \phi'(Y_s) \left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(s, X_s) \right) ds. \quad (30)$$

B est un processus à variation finie⁵ ; il est *a priori* d'ordre 1 vis-à-vis de α , sauf si $\langle f\phi' \rangle = 0$ (effet de moyenne). Et on a bien

$$C_t^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} (B_t + M_t) + O\left(\frac{1}{\alpha}\right) \quad ps$$

Notons que (30) ne permet pas de décider du signe du biais B . Une bonne stratégie de couverture devrait, à l'ordre 1 au moins, ne rien coûter *en moyenne*. A cette fin, nous proposons ci-dessous de corriger légèrement le portefeuille Black-Scholes.

3.3.3 Stratégie 2 : une stratégie autofinancée en moyenne

Pour qu'une stratégie ne coûte rien en moyenne au premier ordre, il suffit de "faire apparaître" le terme

$$+\frac{\rho\nu}{\sqrt{2\alpha}} \langle f\phi' \rangle \int_0^t \left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(s, X_s) \right) ds \quad (31)$$

qui viendrait s'ajouter aux quatre termes (29a) composant $C_t^{(1)}$. En effet, combiné au terme $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} B_t$, il génère un terme d'ordre $\frac{1}{\alpha}$, à cause de l'effet de moyenne décrit ci-dessus. On aurait alors l'approximation $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} M_t + O\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ pour le coût de gestion. Une idée naturelle, au vu de ce qui précède, serait de choisir

$$a_t = \frac{\partial \left(P_0 + \tilde{P}_1 \right)}{\partial x}(t, X_t),$$

à la place de $\frac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t)$. En fait, \tilde{P}_1 est solution de l'EDP

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) \tilde{P}_1 &= \frac{\rho\nu}{\sqrt{2\alpha}} \langle f\phi' \rangle \left(2x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) + x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t, x) \right) \\ &\quad - \frac{\nu}{\sqrt{2\alpha}} \langle \Lambda\phi' \rangle x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x). \end{aligned} \quad (32)$$

⁵ B fait intervenir la combinaison $2L_2 + L_3$; c'est donc un terme de corrélation pure.

Le terme $\frac{\rho\nu}{\sqrt{2\alpha}}\langle f\phi'\rangle\left(2x^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t,x)+x^3\frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t,x)\right)$ ressemble beaucoup à ce qu'on voudrait voir apparaître, mais le terme $-\frac{\nu}{\sqrt{2\alpha}}\langle\Lambda\phi'\rangle x^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t,x)$ est de trop : c'est en réalité un terme de prime de risque de volatilité pure, alors que, comme précisé plus haut, le biais B que l'on cherche à compenser est un terme de corrélation uniquement. Aussi est-il utile de définir la fonction $\tilde{Q}_1 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ solution de l'EDP

$$\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})\tilde{Q}_1 = \frac{\rho\nu}{\sqrt{2\alpha}}\langle f\phi'\rangle\left(2x^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t,x)+x^3\frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t,x)\right) \quad (33)$$

avec la condition terminale

$$\tilde{Q}_1(T,x) = 0 \quad \forall x > 0$$

et de considérer le portefeuille défini par

$$\begin{cases} a_t^{(2)} = \frac{\partial(P_0+\tilde{Q}_1)}{\partial x}(t,X_t), \\ b_t^{(2)} = e^{-rt}\left(\left(P_0+\tilde{Q}_1\right)(t,X_t) - X_t\frac{\partial(P_0+\tilde{Q}_1)}{\partial x}(t,X_t)\right). \end{cases}$$

Ce portefeuille vaut $\left(P_0+\tilde{Q}_1\right)(t,X_t)$ à la date t ; sa variation infinitésimale est

$$\begin{aligned} & d\left(P_0+\tilde{Q}_1\right)(t,X_t) \\ &= a_t^{(2)}dX_t + \left(\frac{\partial\left(P_0+\tilde{Q}_1\right)}{\partial t}(t,X_t) + \frac{1}{2}f(Y_t)^2X_t^2\frac{\partial^2\left(P_0+\tilde{Q}_1\right)}{\partial x^2}(t,X_t)\right)dt, \end{aligned}$$

tandis que la variation due au marché est

$$\begin{aligned} & a_t^{(2)}dX_t + b_t^{(2)}d(e^{rt}) \\ &= a_t^{(2)}dX_t + r\left(\left(P_0+\tilde{Q}_1\right)(t,X_t) - X_t\frac{\partial\left(P_0+\tilde{Q}_1\right)}{\partial x}(t,X_t)\right)dt, \end{aligned}$$

si bien que le coût infinitésimal vérifie

$$\frac{dC_t^{(2)}}{dt} = \frac{\partial\left(P_0+\tilde{Q}_1\right)}{\partial t}(t,X_t) + \frac{1}{2}f(Y_t)^2X_t^2\frac{\partial^2\left(P_0+\tilde{Q}_1\right)}{\partial x^2}(t,X_t)$$

$$\begin{aligned}
& -r \left((P_0 + \tilde{Q}_1)(t, X_t) - X_t \frac{\partial (P_0 + \tilde{Q}_1)}{\partial x}(t, X_t) \right) \\
& = \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) (P_0 + \tilde{Q}_1)(t, X_t) + \frac{1}{2} (f(Y_t)^2 - \bar{\sigma}^2) X_t^2 \frac{\partial^2 (P_0 + \tilde{Q}_1)}{\partial x^2}(t, X_t)
\end{aligned}$$

Etant donné (33), et vu que $\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})P_0 = 0$, on a

$$\begin{aligned}
dC_t^{(2)} &= dC_t^{(1)} \\
&+ \frac{\rho\nu}{\sqrt{2\alpha}} \langle f\phi' \rangle \left(2X_t^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, X_t) + X_t^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t, X_t) \right) dt \\
&+ \frac{1}{2} (f(Y_t)^2 - \bar{\sigma}^2) X_t^2 \frac{\partial^2 \tilde{Q}_1}{\partial x^2}(t, X_t) dt,
\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}
C_t^{(2)} &= C_t^{(1)} \\
&+ \frac{\rho\nu}{\sqrt{2\alpha}} \langle f\phi' \rangle \int_0^t \left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(s, X_s) \right) ds \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t (f(Y_s)^2 - \bar{\sigma}^2) X_s^2 \frac{\partial^2 \tilde{Q}_1}{\partial x^2}(s, X_s) ds.
\end{aligned}$$

Le dernier terme est d'ordre $\frac{1}{\alpha}$: ici l'effet de moyenne joue sur $X_s^2 \frac{\partial^2 \tilde{Q}_1}{\partial x^2}(s, X_s)$ qui est déjà d'ordre $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, comme \tilde{Q}_1 . Le second terme est précisément le terme voulu (31). Finalement,

$$C_t^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} M_t + O\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Notons que si l'on suit cette stratégie de gestion, les valeurs du portefeuille et de l'option diffèrent dès l'ordre $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, car cette différence est précisément $\tilde{Q}_1 - \tilde{P}_1$. Si l'on souhaite que les valeurs du portefeuille et de l'option ne diffèrent qu'à l'ordre $\frac{1}{\alpha}$, il suffit d'adopter la stratégie suivante.

3.3.4 Stratégie 3 : un portefeuille qui colle au prix de l'option

On choisit

$$\begin{cases} a_t^{(3)} = \frac{\partial (P_0 + \tilde{P}_1)}{\partial x}(t, X_t), \\ b_t^{(3)} = e^{-rt} \left((P_0 + \tilde{P}_1)(t, X_t) - X_t \frac{\partial (P_0 + \tilde{P}_1)}{\partial x}(t, X_t) \right). \end{cases}$$

Ce portefeuille vaut $\left(P_0 + \tilde{P}_1\right)(t, X_t)$ à la date t ; sa variation infinitésimale est

$$\begin{aligned} & d\left(P_0 + \tilde{P}_1\right)(t, X_t) \\ = & a_t^{(3)} dX_t + \left(\frac{\partial \left(P_0 + \tilde{P}_1\right)}{\partial t}(t, X_t) + \frac{1}{2} f(Y_t)^2 X_t^2 \frac{\partial^2 \left(P_0 + \tilde{P}_1\right)}{\partial x^2}(t, X_t) \right) dt, \end{aligned}$$

tandis que la variation due au marché est

$$\begin{aligned} & a_t^{(3)} dX_t + b_t^{(3)} d(e^{rt}) \\ = & a_t^{(3)} dX_t + r \left(\left(P_0 + \tilde{P}_1\right)(t, X_t) - X_t \frac{\partial \left(P_0 + \tilde{P}_1\right)}{\partial x}(t, X_t) \right) dt, \end{aligned}$$

si bien que le coût infinitésimal vérifie

$$\begin{aligned} \frac{dC_t^{(3)}}{dt} &= \frac{\partial \left(P_0 + \tilde{P}_1\right)}{\partial t}(t, X_t) + \frac{1}{2} f(Y_t)^2 X_t^2 \frac{\partial^2 \left(P_0 + \tilde{P}_1\right)}{\partial x^2}(t, X_t) \\ &\quad - r \left(\left(P_0 + \tilde{P}_1\right)(t, X_t) - X_t \frac{\partial \left(P_0 + \tilde{P}_1\right)}{\partial x}(t, X_t) \right) \\ &= \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) \left(P_0 + \tilde{P}_1\right)(t, X_t) + \frac{1}{2} (f(Y_t)^2 - \bar{\sigma}^2) X_t^2 \frac{\partial^2 \left(P_0 + \tilde{P}_1\right)}{\partial x^2}(t, X_t) \end{aligned}$$

Au vu de (32), et comme $\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})P_0 = 0$, on a

$$\begin{aligned} dC_t^{(3)} &= dC_t^{(2)} \\ &\quad - \frac{\nu}{\sqrt{2\alpha}} \langle \Lambda \phi' \rangle X_t^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, X_t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} (f(Y_t)^2 - \bar{\sigma}^2) X_t^2 \frac{\partial^2 \left(\tilde{P}_1 - \tilde{Q}_1\right)}{\partial x^2}(t, X_t) dt, \end{aligned}$$

i.e.

$$C_t^{(3)} = C_t^{(2)}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\nu}{\sqrt{2\alpha}} \langle \Lambda \phi' \rangle \int_0^t X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) ds \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t (f(Y_s)^2 - \bar{\sigma}^2) X_s^2 \frac{\partial^2 (\tilde{P}_1 - \tilde{Q}_1)}{\partial x^2}(s, X_s) ds.
\end{aligned}$$

Le dernier terme est d'ordre $\frac{1}{\alpha}$. Le deuxième terme, d'ordre $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, est le prix à fournir pour retrouver, à l'ordre $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ du moins, le prix de l'option à partir du coût de la stratégie autofinancée en moyenne. C'est donc le prix que le vendeur de l'option attache à l'incomplétude du marché. Celle-ci est due au caractère stochastique de la volatilité. Le vendeur subit donc un risque de volatilité et le quantifie via $-\frac{\nu}{\sqrt{2\alpha}} \langle \Lambda \phi' \rangle \int_0^t X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) ds$ qui est un terme de risque de volatilité uniquement.

4 L'approche martingale

4.1 Démarche

On souhaite retrouver le prix corrigé à l'ordre 1 par un raisonnement purement probabiliste. Autrement dit, on va regarder ici le prix corrigé, non plus comme l'approximation d'une solution d'une EDP, mais comme l'approximation d'une martingale sous la probabilité de pricing (à des termes d'ordre ε près).

Nous nous plaçons sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni de la filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, Z_s, 0 \leq s \leq t)$, avec $\Omega = C^0([0, T], \mathbb{R}^2)$ l'ensemble des fonctions continues à valeurs dans \mathbb{R}^2 , \mathcal{F} sa tribu borélienne et \mathbb{P} la mesure de Wiener sur cette tribu. On suppose l'existence d'une probabilité \mathbb{P}^* équivalente à \mathbb{P} telle que le prix de l'option européenne de payoff $h(X_T) \in L^2(\mathbb{P}^*)$ soit donné par

$$V_t = \mathbb{E}^* [e^{-r(T-t)} h(X_T) \mid \mathcal{F}_t]. \quad (34)$$

Soit $D_t = \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t}$; D est une martingale uniformément intégrable par rapport à (\mathcal{F}_t) , strictement positive. Comme (\mathcal{F}_t) est l'augmentation habituelle de la filtration canonique du mouvement brownien (W, Z) , le théorème de représentation des martingales nous assure l'existence de processus θ^W et θ^Z adaptés par rapport à (\mathcal{F}_t) tels que

$$\forall t \in [0, T[, \quad \int_0^t \left((\theta_s^W)^2 + (\theta_s^Z)^2 \right) ds < \infty \quad ps$$

et tels que pour tout $t \in [0, T[$

$$D_t = \exp \left(- \int_0^t \theta_s^W dW_s - \int_0^t \theta_s^Z dZ_s - \frac{1}{2} \int_0^t \left((\theta_s^W)^2 + (\theta_s^Z)^2 \right) ds \right)$$

(ceci prouve notamment que D est continue). On définit alors

$$\begin{cases} W_t^* = W_t + \int_0^t \theta_s^W ds, \\ Z_t^* = Z_t + \int_0^t \theta_s^Z ds. \end{cases}$$

D'après le théorème de Girsanov, W^* et Z^* sont deux \mathbb{P}^* -mouvements browniens indépendants. En termes de (W^*, Z^*) , la dynamique de X s'écrit :

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu X_t dt + f(Y_t) X_t dW_t \\ &= \mu X_t dt + f(Y_t) X_t (dW_t^* - \theta_t^W dt) \\ &= (\mu - f(Y_t) \theta_t^W) X_t dt + f(Y_t) X_t dW_t^*. \end{aligned}$$

En supposant que $X_T \in L^2(\mathbb{P}^*)$ et en faisant $h = id$ dans (34), on voit que le processus $(e^{-rt} X_t)$ est une \mathbb{P}^* -martingale, ce qui implique que

$$\mu - f(Y_t) \theta_t^W = r,$$

i.e.

$$\theta_t^W = \frac{\mu - r}{f(Y_t)}.$$

Dans l'univers de pricing, la dynamique de Y s'écrit :

$$\begin{aligned} dY_t &= \alpha(m - Y_t) dt + \beta d\hat{Z}_t \\ &= \alpha(m - Y_t) dt + \beta \left(\rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t \right) \\ &= \alpha(m - Y_t) dt + \beta \rho \left(dW_t^* - \frac{\mu - r}{f(Y_t)} dt \right) + \beta \sqrt{1 - \rho^2} (dZ_t^* - \theta_t^Z dt) \\ &= \left(\alpha(m - Y_t) - \beta \left(\rho \frac{\mu - r}{f(Y_t)} + \sqrt{1 - \rho^2} \theta_t^Z \right) \right) dt \\ &\quad + \beta \left(\rho dW_t^* + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t^* \right). \end{aligned}$$

Si on pose

$$\hat{Z}_t^* = \rho W_t^* + \sqrt{1 - \rho^2} Z_t^*,$$

on définit un \mathbb{P}^* -mouvement brownien et on peut réécrire la dynamique du marché sous la forme

$$\begin{cases} dX_t = rX_t dt + \sigma_t X_t dW_t^* \\ \sigma_t = f(Y_t) \\ dY_t = \{\alpha(m - Y_t) - \beta\Lambda_t\} dt + \beta d\hat{Z}_t^* \end{cases} \quad (35)$$

avec

$$\Lambda_t = \rho \frac{\mu - r}{f(Y_t)} + \sqrt{1 - \rho^2} \theta_t^Z.$$

Dans toute la suite, on suppose que le processus (Λ_t) peut se mettre sous la forme $\Lambda_t = \Lambda(Y_t)$ où $\Lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction *continue bornée*, et on se place dans l'univers de pricing.

4.2 Notations

Soit \mathcal{L}_{OU*} le générateur infinitésimal du processus Y dans l'univers de pricing, i.e. l'opérateur qui à toute fonction g convenable associe la fonction $\mathcal{L}_{OU*}g$ définie par

$$(\mathcal{L}_{OU*}g)(y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{E}^*[g(Y_t) \mid Y_0 = y] - g(y)}{t}$$

On a d'après (35)

$$\mathcal{L}_{OU*} = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L}_{0*}$$

où

$$\mathcal{L}_{0*} = \nu^2 \frac{d^2}{dy^2} + \left(m - y - \nu\sqrt{2\varepsilon}\Lambda(y) \right) \frac{d}{dy}.$$

Si on pose $s(y) = m - y - \nu\sqrt{2\varepsilon}\Lambda(y)$, on a donc

$$\mathcal{L}_{0*} = \nu^2 \frac{d^2}{dy^2} + s(y) \frac{d}{dy}.$$

L'hypothèse de bornitude sur la fonction Λ assure l'existence d'une probabilité stationnaire $\Phi_*(y) dy$ pour Y sous \mathbb{P}^* qui est l'unique densité de probabilité solution de l'équation $\mathcal{L}_{0*}^* \Phi_* = 0$, où \mathcal{L}_{0*}^* désigne l'adjoint de \mathcal{L}_{0*} ; en effet, on introduit une fonction $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\nu^2 \frac{d\xi}{dy} - s(y)\xi = 0$, par exemple

$$\xi(y) = \exp \left(-\frac{(m-y)^2}{2\nu^2} - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \tilde{\Lambda}(y) \right)$$

où $\tilde{\Lambda}$ est une primitive quelconque de Λ . Il est alors facile de vérifier que

$$\mathcal{L}_{0*} = \frac{\nu^2}{\xi} \frac{d}{dy} \left(\xi \frac{d}{dy} \right)$$

d'où on tire

$$\mathcal{L}_{0*}^* = \nu^2 \frac{d}{dy} \left(\xi \frac{d}{dy} \left(\frac{\cdot}{\xi} \right) \right)$$

Il est clair que ξ est une solution de $\mathcal{L}_{0*}^* \xi = 0$, intégrable car Λ est bornée, et les seules solutions intégrables de cette équation sont les multiples de ξ , si bien que

$$\Phi_*(y) = J_* \exp \left(-\frac{(m-y)^2}{2\nu^2} - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \tilde{\Lambda}(y) \right)$$

où

$$J_* = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{(m-y)^2}{2\nu^2} - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \tilde{\Lambda}(y) \right) dy \right)^{-1}.$$

On voit que Φ_* est une correction d'ordre $\sqrt{\varepsilon}$ par rapport à Φ . On définit alors :

- la moyenne d'une fonction contre cette probabilité stationnaire :

$$\langle g \rangle_* = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \Phi_*(y) dy$$

- la volatilité de pricing moyenne $\bar{\sigma}_*$:

$$\bar{\sigma}_*^2 = \langle f^2 \rangle_*$$

- la solution $P_0^* : [0, T] \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ de l'EDP

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}_*) P_0^* = 0, \\ \forall x > 0, P_0^*(T, x) = h(x) \end{cases} \quad (36)$$

- la fonction ϕ_* solution de $\mathcal{L}_{0*} \phi_* = f^2 - \langle f^2 \rangle_*$.
- le terme de corrélation

$$V_3^* = \frac{\rho \nu \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \langle f \phi_*' \rangle_*$$

– le terme de source

$$H^*(t, x) = V_3^* \left(2x^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}(t, x) + x^3 \frac{\partial^3 P_0^*}{\partial x^3}(t, x) \right)$$

– la solution $Q_1^* : [0, T] \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ de l'EDP

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}_*) Q_1^* = H^*, \\ \forall x > 0, Q_1^*(T, x) = 0 \end{cases} \quad (37)$$

– la fonction $Q^*(t, x) = P_0^*(t, x) + Q_1^*(t, x)$

– le processus stochastique $N_t = e^{-rt} Q^*(t, X_t)$.

4.3 Le prix corrigé comme martingale approchée

Nous allons montrer qu'à des termes d'ordre ε près, N est une \mathbb{P}^* -martingale de valeur terminale $e^{-rT} h(X_T)$. Rappelons que la valeur V_t de l'option, définie par (34), est complètement caractérisée par le fait que $(e^{-rt} V_t)$ est une \mathbb{P}^* -martingale de valeur terminale $e^{-rT} h(X_T)$. On aura ainsi montré que

$$V_t = Q^*(t, X_t) + O(\varepsilon),$$

ce qui permettra d'interpréter $Q^*(t, X_t)$ comme le prix de l'option au premier ordre.

Il est facile de voir que $N_T = e^{-rT} h(X_T)$. Ce qui est moins facile, c'est de montrer que N est une \mathbb{P}^* -martingale, à $O(\varepsilon)$ près. On utilise pour cela la formule d'Itô, en supposant Q suffisamment régulière, et les définitions de la section précédente :

$$\begin{aligned} & e^{rt} dN_t \\ &= dQ^*(t, X_t) - rQ^*(t, X_t) dt \\ &= \left(\frac{\partial Q^*}{\partial t}(t, X_t) + \frac{1}{2} f(Y_t)^2 X_t^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(t, X_t) - r \left(Q^*(t, X_t) - X_t \frac{\partial Q^*}{\partial x}(t, X_t) \right) \right) dt \\ & \quad + f(Y_t) X_t \frac{\partial Q^*}{\partial x}(t, X_t) dW_t^* \\ &= \left(\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}_*) Q^*(t, X_t) + \frac{1}{2} (f(Y_t)^2 - \bar{\sigma}_*^2) X_t^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(t, X_t) \right) dt \\ & \quad + f(Y_t) X_t \frac{\partial Q^*}{\partial x}(t, X_t) dW_t^* \\ &= \left(H^*(t, X_t) + \frac{1}{2} (f(Y_t)^2 - \bar{\sigma}_*^2) X_t^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(t, X_t) \right) dt + f(Y_t) X_t \frac{\partial Q^*}{\partial x}(t, X_t) dW_t^*. \end{aligned}$$

Il suffit donc de voir que

$$\int_0^t \left(H^*(s, X_s) + \frac{1}{2} (f(Y_s)^2 - \bar{\sigma}_*^2) X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s, X_s) \right) ds = \mathbb{P}^*\text{-martingale} + O(\varepsilon).$$

Comme

$$d\phi_*(Y_s) = \frac{1}{\varepsilon} (\mathcal{L}_{0*}\phi_*)(Y_s) ds + \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} \phi'_*(Y_s) d\hat{Z}_s^*,$$

on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^t (f(Y_s)^2 - \bar{\sigma}_*^2) X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s, X_s) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t (\mathcal{L}_{0*}\phi_*)(Y_s) X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s, X_s) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s, X_s) \left(\varepsilon d\phi_*(Y_s) - \nu\sqrt{2\varepsilon} \phi'_*(Y_s) d\hat{Z}_s^* \right) \\ &= \mathbb{P}^*\text{-martingale} + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s, X_s) d\phi_*(Y_s) \end{aligned}$$

(à supposer que la \mathbb{P}^* -martingale locale $-\frac{\nu\sqrt{2\varepsilon}}{2} \int_0^t X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s, X_s) \phi'_*(Y_s) d\hat{Z}_s^*$ soit effectivement une vraie \mathbb{P}^* -martingale). Le piège dans lequel il ne faut pas tomber serait de croire que $\frac{\varepsilon}{2} \int_0^t X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s, X_s) d\phi_*(Y_s) = O(\varepsilon)$. Certes $\phi_*(Y_s) = O(1)$, tout comme $X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s, X_s)$. Mais les variations infinitésimales de Y_s , et par conséquent celles de $\phi_*(Y_s)$, sont infiniment grandes lorsque ε devient infiniment petit, d'ordre $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. A moins que les deux browniens W^* et \hat{Z}^* gouvernant respectivement X et Y soient indépendants, cela génère un crochet infiniment grand entre l'intégrand et le processus contre lequel on l'intègre :

$$\begin{aligned} & d \left\langle \phi_*(Y), X^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}(\cdot, X) \right\rangle_s \\ &= \frac{\rho\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} f(Y_s) \phi'_*(Y_s) \left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0^*}{\partial x^3}(s, X_s) \right) ds \end{aligned}$$

(en effet,

$$d\phi_*(Y_s) = \dots ds + \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} \phi'_*(Y_s) d\hat{Z}_s^*$$

et

$$d \left(X_s^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}(s, X_s) \right) = \dots ds + f(Y_s) \left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0^*}{\partial x^3}(s, X_s) \right) dW_s^*.$$

De ce fait, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} & \int_0^t X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s, X_s) d\phi_*(Y_s) \\ &= \int_0^t d \left(X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s, X_s) \phi_*(Y_s) \right) \\ & \quad - \int_0^t \phi_*(Y_s) d \left(X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s, X_s) \right) \\ & \quad - \frac{\rho\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t f(Y_s) \phi'_*(Y_s) \left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0^*}{\partial x^3}(s, X_s) \right) ds \\ &= O(1) - \frac{\rho\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t f(Y_s) \phi'_*(Y_s) \left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0^*}{\partial x^3}(s, X_s) \right) ds \end{aligned}$$

Pour voir que la première intégrale est un $O(1)$, on peut soit l'écrire $X_t^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(t, X_t) \phi_*(Y_t) - X_0^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(0, X_0) \phi_*(Y_0)$, soit remarquer que la présence de Y dans l'élément différentiel est sans conséquence car l'intégrand - le processus identiquement égal à 1 - est à variation finie et génère donc un crochet nul avec l'élément différentiel. Pour la deuxième intégrale, il suffit de remarquer que Y est absent de l'élément différentiel et que l'intégrand $\phi_*(Y_s)$ est un $O(1)$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left(H^*(s, X_s) + \frac{1}{2} (f(Y_s)^2 - \bar{\sigma}_*^2) X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s, X_s) \right) ds \\ &= \mathbb{P}^*\text{-martingale} + O(\varepsilon) \\ & \quad - \frac{\rho\nu\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \int_0^t f(Y_s) \phi'_*(Y_s) \left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0^*}{\partial x^3}(s, X_s) \right) ds \\ & \quad + \int_0^t H^*(s, X_s) ds. \end{aligned}$$

Or,

$$\int_0^t H^*(s, X_s) ds - \rho\nu\sqrt{2\varepsilon} \int_0^t f(Y_s) \phi'_*(Y_s) \left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0^*}{\partial x^3}(s, X_s) \right) ds$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\rho\nu\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \int_0^t (f(Y_s)\phi'_*(Y_s) - \langle f\phi'_* \rangle_*) \left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0^*}{\partial x^3}(s, X_s) \right) ds \\
&= \frac{\rho\nu\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \{O(\sqrt{\varepsilon})\} \quad (\text{effet de moyenne, ou théorème ergodique}) \\
&= O(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Finalement, on a bien

$$\int_0^t \left(H^*(s, X_s) + \frac{1}{2} (f(Y_s)^2 - \bar{\sigma}_*^2) X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s, X_s) \right) ds = \mathbb{P}^*\text{-martingale} + O(\varepsilon),$$

ce qu'il fallait démontrer.

4.4 Retrouver le prix $P_0 + \tilde{P}_1$

Le prix $P_0 + \tilde{P}_1$ obtenu par la méthode EDP est la solution de l'EDP :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) (P_0 + \tilde{P}_1) = H(t, x), \\ \forall x > 0, (P_0 + \tilde{P}_1)(T, x) = h(x). \end{cases} \quad (38)$$

Le prix $P_0^* + Q_1^*$ obtenu par la méthode martingale est, lui, la solution de l'EDP :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}_*) (P_0^* + Q_1^*) = H^*(t, x), \\ \forall x > 0, (P_0^* + Q_1^*)(T, x) = h(x). \end{cases} \quad (39)$$

Les termes de sources ont les expressions

$$H(t, x) = V_2 x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) + V_3 x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t, x)$$

où $\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})P_0 = 0$ et $P_0(T, x) = h(x)$, et

$$H^*(t, x) = V_3^* \left(2x^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial^3 P_0^*}{\partial x^3} \right) (t, x)$$

où $\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}_*)P_0^* = 0$ et $P_0^*(T, x) = h(x)$. Nous allons montrer qu'au premier ordre, les deux prix coïncident, i.e.

$$P_0^* + Q_1^* = P_0 + \tilde{P}_1 + O(\varepsilon).$$

Pour cela, il suffit de montrer que, à $O(\varepsilon)$ près, $P_0^* + Q_1^*$ est solution du problème (38). Les conditions terminales des deux problèmes (38) et (39) étant identiques, il suffit de prouver que

$$\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) (P_0^* + Q_1^*) = H(t, x) + O(\varepsilon).$$

Pour ce faire, nous donnons des développements limités en $\sqrt{\varepsilon}$ de $\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}_*)$ et $H^*(t, x)$.

4.4.1 Développement limité de $\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}_*)$

Comme

$$\begin{aligned} J_*^{-1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{(m-y)^2}{2\nu^2} - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \tilde{\Lambda}(y) \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{(m-y)^2}{2\nu^2} \right) \exp \left(-\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \tilde{\Lambda}(y) \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{(m-y)^2}{2\nu^2} \right) \left(1 - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \tilde{\Lambda}(y) + O(\varepsilon) \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{(m-y)^2}{2\nu^2} \right) dy - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Lambda}(y) \exp \left(-\frac{(m-y)^2}{2\nu^2} \right) dy + O(\varepsilon) \\ &= \sqrt{2\pi}\nu \left(1 - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \langle \tilde{\Lambda} \rangle + O(\varepsilon) \right), \end{aligned}$$

on a

$$J_* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\nu} \left(1 + \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \langle \tilde{\Lambda} \rangle + O(\varepsilon) \right)$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_*}{\Phi}(y) &= J_* \sqrt{2\pi}\nu \exp \left(-\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \tilde{\Lambda}(y) \right) \\ &= \left(1 + \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \langle \tilde{\Lambda} \rangle + O(\varepsilon) \right) \left(1 - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \tilde{\Lambda}(y) + O(\varepsilon) \right) \\ &= 1 - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \left(\tilde{\Lambda}(y) - \langle \tilde{\Lambda} \rangle \right) + O(\varepsilon) \end{aligned} \tag{40}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\langle g \rangle_* &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \Phi_*(y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \Phi(y) \frac{\Phi_*(y)}{\Phi(y)} dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \Phi(y) - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{\Lambda}(y) - \langle \tilde{\Lambda} \rangle) g(y) \Phi(y) + O(\varepsilon) \\
&= \langle g \rangle - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \left\langle g (\tilde{\Lambda} - \langle \tilde{\Lambda} \rangle) \right\rangle + O(\varepsilon) \\
&= \langle g \rangle - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \left\langle \tilde{\Lambda} (g - \langle g \rangle) \right\rangle + O(\varepsilon),
\end{aligned} \tag{41}$$

puis

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_*^2 &= \langle f^2 \rangle_* \\
&= \langle f^2 \rangle - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \left\langle \tilde{\Lambda} (f^2 - \langle f^2 \rangle) \right\rangle + O(\varepsilon) \\
&= \bar{\sigma}^2 - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \left\langle \tilde{\Lambda} (f^2 - \langle f^2 \rangle) \right\rangle + O(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Comme

$$\mathcal{L}_0 = \frac{\nu^2}{\Phi} \frac{d}{dy} \left(\Phi \frac{d}{dy} \right),$$

on a

$$\begin{aligned}
\left\langle \tilde{\Lambda} (f^2 - \langle f^2 \rangle) \right\rangle &= \left\langle \tilde{\Lambda} (\mathcal{L}_0 \phi) \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\nu^2 \tilde{\Lambda}}{\Phi} \frac{d}{dy} (\Phi \phi') \right\rangle \\
&= \nu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Lambda}(y) (\Phi \phi')'(y) dy \\
&= -\nu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(y) (\Phi \phi')(y) dy \\
&= -\nu^2 \langle \Lambda \phi' \rangle
\end{aligned}$$

où on a intégré par parties. Par conséquent,

$$\bar{\sigma}_*^2 = \bar{\sigma}^2 - \nu \sqrt{2\varepsilon} \langle \Lambda \phi' \rangle + O(\varepsilon),$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}_*) &= \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) + \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_*^2 - \bar{\sigma}^2)x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ &= \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) - \frac{\nu\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \langle \Lambda\phi' \rangle x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + O(\varepsilon).\end{aligned}\tag{42}$$

4.4.2 Développement limité de $H^*(t, x)$

D'après (41), on a

$$\begin{aligned}V_3^* &= \frac{\rho\nu\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \langle f\phi'_* \rangle_* \\ &= \frac{\rho\nu\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \langle f\phi'_* \rangle + O(\sqrt{\varepsilon}).\end{aligned}$$

Mais il est facile de voir en utilisant (40) et (41) que

$$\langle f\phi'_* \rangle = \langle f\phi' \rangle + O(\sqrt{\varepsilon}),$$

d'où

$$V_3^* = \frac{\rho\nu\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \langle f\phi' \rangle + O(\varepsilon) = V_3 + O(\varepsilon).$$

Par ailleurs, la quantité $\Pi_0 = P_0^* - P_0$ vérifie l'EDP

$$\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})\Pi_0 = -\frac{\nu\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \langle \Lambda\phi' \rangle x^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2} + O(\varepsilon)$$

avec une condition terminale nulle, donc $\Pi_0 = O(\sqrt{\varepsilon})$, i.e. $P_0^* = P_0 + O(\sqrt{\varepsilon})$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}H^*(t, x) &= V_3^* \left(2x^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial^3 P_0^*}{\partial x^3} \right) (t, x) \\ &= (V_3 + O(\varepsilon)) \left(2x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) + x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t, x) + O(\sqrt{\varepsilon}) \right) \\ &= V_3 \left(2x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) + x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t, x) \right) + O(\varepsilon)\end{aligned}\tag{43}$$

4.4.3 Conclusion

En mettant bout à bout (42) et (43), on obtient

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) (P_0^* + Q_1^*) \\
&= \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}_*) (P_0^* + Q_1^*) + \frac{\nu\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \langle \Lambda\phi' \rangle x^2 \frac{\partial^2 (P_0^* + Q_1^*)}{\partial x^2} + O(\varepsilon) \\
&= H^*(t, x) + \frac{\nu\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \langle \Lambda\phi' \rangle x^2 \frac{\partial^2 (P_0^* + Q_1^*)}{\partial x^2} + O(\varepsilon) \\
&= V_3 \left(2x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) + x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t, x) \right) + \frac{\nu\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \langle \Lambda\phi' \rangle x^2 \frac{\partial^2 (P_0^* + Q_1^*)}{\partial x^2} + O(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Mais $P_0^* = P_0 + O(\sqrt{\varepsilon})$ et $Q_1^* = O(\sqrt{\varepsilon})$ donc

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) (P_0^* + Q_1^*) \\
&= V_3 \left(2x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) + x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t, x) \right) + \frac{\nu\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \langle \Lambda\phi' \rangle x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) + O(\varepsilon) \\
&= \left(V_2 x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} + V_3 x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3} \right) (t, x) + O(\varepsilon),
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve.

5 Calibration

Le modèle introduit beaucoup de paramètres $(\alpha, \beta, m, \rho, \gamma, f)$ mais seuls trois suffisent à déterminer le prix corrigé et les stratégies de couverture étudiées plus haut : $\bar{\sigma}$, V_2 et V_3 . Ils sont bien sûr fonctions de $(\alpha, \beta, m, \rho, \gamma, f)$. Jean-Pierre FOUQUE, George PAPANICOLAOU et K. Ronnie SIRCAR [1] assurent que tout processus ergodique Y et toute fonction $f \in L^2_\pi$ mènent à l'existence des trois paramètres $\bar{\sigma}$, V_2 et V_3 . En pratique, il est essentiel de pouvoir estimer ces trois paramètres. On pourrait chercher les $\bar{\sigma}$, V_2 et V_3 tels que le prix corrigé

$$\left(P_0 + \tilde{P}_1 \right) (t, x) = P_0(t, x) - (T - t) \left(V_2 x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) + V_3 x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t, x) \right)$$

soit “le plus proche possible” des prix observés, par exemple pour une option d'achat classique. On préférera travailler avec les volatilités implicites, qui ne sont qu'une manière de représenter les prix à travers le prisme Black-Scholes.

5.1 Le prix corrigé de l'option d'achat

Dans ce paragraphe, on étudie le cas particulier du call d'échéance T et de prix d'exercice K : $h(x) = (x - K)_+$. On admet qu'on a le droit d'appliquer les résultats précédents, malgré le fait que h n'est pas de classe C^2 . On souhaite donner le prix corrigé $C_0 + \tilde{C}_1$ du call. C_0 est le prix du call Black-Scholes pour la volatilité $\bar{\sigma}$. Par conséquent,

$$C_0(t, x) = C_{BS}(t, x; K, T; \bar{\sigma}) = xN(d_+) - Ke^{-r(T-t)}N(d_-) \quad (44)$$

où

$$\begin{cases} d_+ = \frac{\ln\left(\frac{x}{Ke^{-r(T-t)}}\right)}{\bar{\sigma}\sqrt{T-t}} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}\sqrt{T-t}, \\ d_- = \frac{\ln\left(\frac{x}{Ke^{-r(T-t)}}\right)}{\bar{\sigma}\sqrt{T-t}} - \frac{1}{2}\bar{\sigma}\sqrt{T-t}, \end{cases} \quad (45)$$

et $N(d) = \int_{-\infty}^d g(u) du$, avec $g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_{\pm}}{\partial x}(t, x) &= \frac{1}{x\bar{\sigma}\sqrt{T-t}} > 0 \\ \frac{\partial C_0}{\partial x}(t, x) &= N(d_+) > 0 \\ \frac{\partial^2 C_0}{\partial x^2}(t, x) &= \frac{1}{x\bar{\sigma}\sqrt{T-t}} g(d_+) > 0 \\ \frac{\partial^3 C_0}{\partial x^3}(t, x) &= -\frac{1}{x^2\bar{\sigma}\sqrt{T-t}} g(d_+) + \frac{1}{x^2\bar{\sigma}^2(T-t)} g'(d_+) \\ &= -\frac{g(d_+)}{x^2\bar{\sigma}^2(T-t)} \left(d_+ + \bar{\sigma}\sqrt{T-t}\right). \end{aligned}$$

Le prix corrigé au premier ordre de l'option d'achat est donc

$$\begin{aligned} (C_0 + \tilde{C}_1)(t, x) &= xN(d_+) - Ke^{-r(T-t)}N(d_-) \\ &\quad - \frac{xg(d_+)}{\bar{\sigma}^2} \left((V_2 - V_3)\bar{\sigma}\sqrt{T-t} - V_3d_+\right) \end{aligned}$$

5.2 Surface de volatilité implicite

On cherche à développer la volatilité implicite sous la forme

$$I(t, x) = I_0(t, x) + \sqrt{\varepsilon}I_1(t, x) + \varepsilon I_2(t, x) + \varepsilon\sqrt{\varepsilon}I_3(t, x) + \dots$$

et on souhaite calculer les deux premiers coefficients I_0 et I_1 . Par définition de la volatilité implicite,

$$C_{BS}(t, x; K, T; I(t, x)) = C^{obs}.$$

Si nous croyons à notre modèle de marché à volatilité stochastique, on a

$$\begin{aligned} C_{BS}(t, x; K, T; I(t, x)) &= C_0(t, x) + \sqrt{\varepsilon} C_1(t, x) \\ &\quad + \varepsilon C_2(t, x) + \varepsilon \sqrt{\varepsilon} C_3(t, x) + \dots \end{aligned}$$

On développe le terme de gauche :

$$\begin{aligned} C_{BS}(t, x; K, T; I(t, x)) &= C_{BS}(t, x; K, T; I_0(t, x)) \\ &\quad + \sqrt{\varepsilon} I_1(t, x) \frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma}(t, x; K, T; I_0(t, x)) + \dots \end{aligned}$$

L'identification des termes donne

$$I_0(t, x) = \bar{\sigma}$$

et

$$I_1(t, x) = \frac{C_1(t, x)}{\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma}(t, x; K, T; \bar{\sigma})}.$$

Il est agréable de travailler avec la quantité $\tilde{I}_1 = \sqrt{\varepsilon} I_1$. Comme

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma}(t, x; K, T; \bar{\sigma}) = x\sqrt{T-t}g(d_+),$$

on a

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1(t, x) &= \frac{\tilde{C}_1(t, x)}{x\sqrt{T-t}g(d_+)} \\ &= -\frac{\frac{xg(d_+)}{\bar{\sigma}^2} ((V_2 - V_3) \bar{\sigma} \sqrt{T-t} - V_3 d_+)}{x\sqrt{T-t}g(d_+)} \\ &= -\frac{1}{\bar{\sigma}} \left((V_2 - V_3) - V_3 \frac{d_+}{\bar{\sigma} \sqrt{T-t}} \right). \end{aligned}$$

Le modèle à volatilité stochastique ergodique génère donc un smile :

$$I(t, x) = \bar{\sigma} - \frac{1}{\bar{\sigma}} \left((V_2 - V_3) - V_3 \frac{d_+}{\bar{\sigma} \sqrt{T-t}} \right) + O(\varepsilon).$$

En explicitant d_+ , on obtient

$$I(t, x) = \bar{\sigma} - \frac{1}{\bar{\sigma}} \left(V_2 - V_3 \left(\frac{r}{\bar{\sigma}^2} + \frac{3}{2} \right) + V_3 \frac{\ln \left(\frac{K}{x} \right)}{\bar{\sigma}^2 (T-t)} \right) + O(\varepsilon).$$

Etudier la surface de volatilité implicite, c'est s'intéresser à la dépendance en (K, T) de cette expression. Elle est du type

$$(K, T) \mapsto a \frac{\ln \left(\frac{K}{x} \right)}{T-t} + b + O(\varepsilon), \quad (46)$$

avec

$$\begin{cases} a = -\frac{V_3}{\bar{\sigma}^3} \\ b = \bar{\sigma} - \frac{1}{\bar{\sigma}} \left(V_2 - V_3 \left(\frac{r}{\bar{\sigma}^2} + \frac{3}{2} \right) \right) \end{cases} \quad (47)$$

V_2 et V_3 sont petits, d'ordre $\sqrt{\varepsilon}$, donc a est petit et b est proche de $\bar{\sigma}$.

En pratique, on observe la "surface" de volatilité implicite empirique (on ne dispose que de quelques points en réalité), on cherche a et b de sorte que (46) colle au mieux à la surface de volatilité implicite empirique et on inverse le système (47) :

$$\begin{cases} V_3 = -a\bar{\sigma}^3 \\ V_2 = \bar{\sigma} \left(\bar{\sigma} - b - a \left(r + \frac{3}{2}\bar{\sigma}^2 \right) \right) \end{cases}$$

Il faut avoir auparavant mesuré la volatilité moyenne $\bar{\sigma}$, par exemple en étudiant statistiquement la variance des rendements empiriques $\frac{\Delta X}{X}$.

On note que si on s'arrête au premier ordre, la volatilité implicite prévue par le modèle à volatilité stochastique est une fonction monotone de K , proportionnelle à $\ln(K)$. L'approximation au premier ordre ne permet pas de générer un sourire, i.e. une courbe convexe décroissante puis croissante. La volatilité implicite (46) est convexe en K si et seulement si $a < 0$, c'est-à-dire $V_3 > 0$. Dans ce cas, l'approximation au premier ordre de la volatilité implicite théorique est une fonction convexe décroissante qui tend vers l'infini quand K tend vers 0. Pour voir apparaître un sourire, il faut pousser le développement limité au second ordre. Jean-Pierre FOUQUE, George PAPANICOLAOU et K. Ronnie SIRCAR assurent que le terme d'ordre ε ne dépend de K qu'à travers la quantité $\left(\ln \left(\frac{K}{x} \right) \right)^2$.

6 Simulations numériques

L'hypothèse $\alpha \gg \frac{1}{T-t}$ permet d'obtenir un développement limité (46) du smile; elle permet d'expliquer des smiles de faible amplitude, de l'ordre de

$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Or, on observe souvent des amplitudes empiriques bien plus importantes. On doit alors considérer des valeurs de α de l'ordre de $\frac{1}{T-t}$. On ne peut alors plus utiliser le développement limite (46) et on ne dispose évidemment pas de formule fermée pour le prix du call. On va donc effectuer des simulations numériques. On cherche à évaluer numériquement des prix d'options et des volatilités implicites, soit par discrétisation de l'EDP d'évaluation, soit par des méthodes de Monte-Carlo.

6.1 Schémas numériques pour l'EDP d'évaluation

6.1.1 Méthode

On rappelle l'EDP vérifiée par le prix $P(t, x, y)$ de l'option européenne de maturité T et de payoff $H = h(X_T) \in L^2(\mathbb{P}^*, \mathcal{F}_T)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} (X_t)^2 f(Y_t)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \rho \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} X_t f(Y_t) \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\nu^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \\ + r \left(X_t \frac{\partial P}{\partial x} - P \right) + \frac{1}{\varepsilon} (m - Y_t) \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} \Lambda \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

avec la condition terminale $P(T, x, y) = h(x)$.

Si on pose $Q(t, x, y) = P(t, e^x, y)$, alors la fonction Q est solution de l'EDP

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{f(y)^2}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \left(r - \frac{f(y)^2}{2} \right) \frac{\partial Q}{\partial x} - rQ + \frac{1}{\varepsilon} (m - y) \frac{\partial Q}{\partial y} \\ + \frac{\nu^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \rho \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} f(y) \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} \Lambda(t, e^x, y) \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

avec la condition terminale $Q(T, x, y) = h(e^x)$.

On suppose dans la suite que $\Lambda = 0$. Quitte à remplacer $f(y)$ par $f(y+m)$, on peut choisir $m = 0$; y est alors centrée autour de 0, et l'EDP s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{f(y)^2}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \left(r - \frac{f(y)^2}{2} \right) \frac{\partial Q}{\partial x} - rQ \\ - \frac{1}{\varepsilon} y \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\nu^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \rho \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} f(y) \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = 0. \end{aligned}$$

On localise dans les deux directions d'espace : on cherche une approximation de $Q(t, x, y)$ pour $x \in]-l_x, l_x[$ et $y \in]-l_y, l_y[$. Il s'agit de choisir convenablement l_x et l_y . On effectue ensuite la discrétisation en espace. On considère N_x points répartis uniformément sur $]-l_x, l_x[$ et N_y points répartis uniformément sur $]-l_y, l_y[$. On appelle $h_x = \frac{2l_x}{N_x+1}$ et $h_y = \frac{2l_y}{N_y+1}$ les pas de discrétisation spatiale et on pose

$$\begin{cases} x_i = -l_x + ih_x \\ y_j = -l_y + jh_y \end{cases}$$

pour $(i, j) \in \{0, 1, \dots, N_x + 1\} \times \{0, 1, \dots, N_y + 1\}$. Alors $x_0 = -l_x$, $x_{N_x+1} = l_x$. Pour $(i, j) \in \{1, \dots, N_x\} \times \{1, \dots, N_y\}$, on pose $[i, j] = (i - 1)N_y + j$. On cherche une famille $u(t)$ de vecteurs de taille $N_x \times N_y$ telle que $u_{[i,j]}(t) \approx Q(t, x_i, y_j)$. Pour ce faire, on utilise des dérivées discrétisées centrées et des dérivées secondes discrétisées, en utilisant les correspondances :

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{u_{[i+1,j]} - u_{[i-1,j]}}{2h_x} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} & \frac{u_{[i+1,j]} - 2u_{[i,j]} + u_{[i-1,j]}}{h_x^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{u_{[i,j+1]} - u_{[i,j-1]}}{2h_y} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} & \frac{u_{[i,j+1]} - 2u_{[i,j]} + u_{[i,j-1]}}{h_y^2} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} & \frac{u_{[i+1,j+1]} - u_{[i-1,j+1]} - u_{[i+1,j-1]} + u_{[i-1,j-1]}}{4h_x h_y} \end{array}$$

L'opérateur spatial discrétisé est alors une matrice A de taille $N_x N_y \times N_x N_y$ tridiagonale par blocs, chacun des blocs des trois diagonales étant lui-même tridiagonal. Plus précisément, si on utilise des conditions au bord de Dirichlet nulles, on peut décomposer la matrice⁶ $A = A^D$ en N_x^2 blocs $(A_{i,k})_{1 \leq i \leq N_x, 1 \leq k \leq N_x}$ de taille $N_y \times N_y$:

$$A = A^D = \begin{pmatrix} A_{1,1}^D & A_{1,2}^D & \cdots & A_{1,N_x}^D \\ A_{2,1}^D & A_{2,2}^D & & A_{2,N_x}^D \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{N_x,1}^D & A_{N_x,2}^D & \cdots & A_{N_x,N_x}^D \end{pmatrix}$$

Si $|i - k| > 1$, $A_{i,k}^D$ est la matrice nulle. $A_{i,i-1}^D$ est tridiagonale et a pour coefficients

$$\begin{aligned} (A_{i,i-1}^D)_{j,j-1} &= \frac{\rho \nu \sqrt{2} f(y_j)}{4\sqrt{\varepsilon} h_x h_y}, \\ (A_{i,i-1}^D)_{j,j} &= \frac{f(y_j)^2}{2h_x^2} - \frac{1}{2h_x} \left(r - \frac{f(y_j)^2}{2} \right), \\ (A_{i,i-1}^D)_{j,j+1} &= -\frac{\rho \nu \sqrt{2} f(y_j)}{4\sqrt{\varepsilon} h_x h_y}. \end{aligned}$$

$A_{i,i}^D$ est tridiagonale et a pour coefficients

$$(A_{i,i}^D)_{j,j-1} = \frac{y_j}{2\varepsilon h_y} + \frac{\nu^2}{\varepsilon h_y^2},$$

⁶ D pour Dirichlet

$$\begin{aligned}(A_{i,i}^D)_{j,j} &= -\frac{f(y_j)^2}{h_x^2} - r - \frac{2\nu^2}{\varepsilon h_y^2}, \\ (A_{i,i}^D)_{j,j+1} &= -\frac{y_j}{2\varepsilon h_y} + \frac{\nu^2}{\varepsilon h_y^2}.\end{aligned}$$

Enfin, $A_{i,i+1}^D$ est tridiagonale et a pour coefficients

$$\begin{aligned}(A_{i,i+1}^D)_{j,j-1} &= -\frac{\rho\nu\sqrt{2}f(y_j)}{4\sqrt{\varepsilon}h_xh_y}, \\ (A_{i,i+1}^D)_{j,j} &= \frac{f(y_j)^2}{2h_x^2} + \frac{1}{2h_x} \left(r - \frac{f(y_j)^2}{2} \right), \\ (A_{i,i+1}^D)_{j,j+1} &= \frac{\rho\nu\sqrt{2}f(y_j)}{4\sqrt{\varepsilon}h_xh_y}.\end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de discrétiser en temps. On se donne $\theta \in [0, 1]$, un entier $M \geq 1$, un pas temporel $k = T/M$ et, en s'inspirant de (33), on cherche une famille de $M + 1$ vecteurs u^n , $0 \leq n \leq M$, de taille $N_x N_y$, telle que $u_{[i,j]}^M = h(e^{x_i})$ et, pour $0 \leq n \leq M - 1$,

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{k} + \theta A u^n + (1 - \theta) A u^{n+1} = 0,$$

ce qui s'écrit

$$B u^n = C u^{n+1}$$

avec

$$B = I - k\theta A, \quad C = I + k(1 - \theta)A.$$

Numériquement, on inverse la matrice B par une méthode itérative. Ceci ne peut se faire⁷ que si $k\theta \|A\| < 1$. Il faudra donc prendre un pas de discrétisation temporelle suffisamment petit.

Dans le cas de conditions de Neumann nulles, la matrice $A = A^N$ s'écrit⁸

$$A = A^N = \begin{pmatrix} A_{1,0}^N + A_{1,1}^N & A_{1,2}^N & \cdots & A_{1,N_x}^N \\ A_{2,1}^N & A_{2,2}^N & & A_{2,N_x}^N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{N_x,1}^N & A_{N_x,2}^N & \cdots & A_{N_x,N_x}^N + A_{N_x,N_x+1}^N \end{pmatrix}$$

⁷On travaille ici avec la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $v \in \mathbb{R}^d$, $\|v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |v_i|$.

⁸ N pour Neumann

où, pour tous i, k ,

$$A_{i,k}^N = \begin{pmatrix} (A_{i,k})_{0,1}^D + (A_{i,k})_{1,1}^D & (A_{i,k})_{1,2}^D & \cdots & (A_{i,k})_{1,N_y}^D \\ (A_{i,k})_{2,1}^D & (A_{i,k})_{2,2}^D & & (A_{i,k})_{2,N_y}^D \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (A_{i,k})_{N_y,1}^D & (A_{i,k})_{N_y,2}^D & \cdots & (A_{i,k})_{N_y,N_y}^D + (A_{i,k})_{N_y,N_y+1}^D \end{pmatrix}.$$

Sous réserve de convergence du schéma numérique, $u_{[i,j]}^0$ est une approximation de $Q(0, x_i, y_j)$.

6.1.2 Résultats

On utilise des conditions au bord de Neumann nulles. On teste les fonctions $f(y) = me^y$, $f(y) = m'(m + y)$ et $f(y) = m'|m + y|$. On teste $\alpha = 0.1, 1, 10$, $\rho = -0.8, 0, 0.8$. Sauf indication contraire, $\nu = 0.5$. On donne la surface des prix et la courbe de smile. Ce travail est malheureusement inachevé, mais le code a été complètement écrit.

6.2 Méthode de Monte-Carlo⁹

6.2.1 Schéma d'Euler

Définition Là aussi on suppose $\Lambda = 0$ et, quitte à changer f , $m = 0$. L'équation différentielle stochastique s'écrit dans ce cas

$$\begin{cases} dX_t = rX_t dt + \sigma_t X_t dW_t^* \\ \sigma_t = f(Y_t) \\ dY_t = -\alpha Y_t dt + \beta d\hat{Z}_t^* \end{cases} \quad (48)$$

On se donne $M \geq 1$ pas de temps : on pose $\Delta t = T/M$ et $t_n = n\Delta t$. Autrement dit, on considère la subdivision régulière

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{M-1} < t_M = T$$

de l'intervalle $[0, T]$. On peut discrétiser (48) de plusieurs façons. La plus simple consiste à considérer le schéma d'Euler $(\bar{X}_{t_n}, \bar{Y}_{t_n})_{0 \leq n \leq M}$ défini par

$$\begin{cases} \bar{X}_{t_{n+1}} - \bar{X}_{t_n} = r\bar{X}_{t_n}\Delta t + f(\bar{Y}_{t_n})\bar{X}_{t_n}\sqrt{\Delta t}\hat{G}_n \\ \bar{Y}_{t_{n+1}} - \bar{Y}_{t_n} = -\alpha\bar{Y}_{t_n}\Delta t + \beta\sqrt{\Delta t}\left(\rho\hat{G}_n + \sqrt{1-\rho^2}\check{G}_n\right) \end{cases} \quad (49)$$

⁹Cette section doit beaucoup à Bernard LAPEYRE qui est à l'origine de plusieurs améliorations.

où $(\hat{G}_n)_{0 \leq n \leq M-1}$ et $(\check{G}_n)_{0 \leq n \leq M-1}$ sont deux suites indépendantes de variables aléatoires indépendantes de même loi gaussienne centrée réduite. Notons que la dynamique de \bar{Y} est autonome.

Erreurs statistique et trajectorielle On lance N simulations de trajectoires (49) et on estime la valeur en $t = 0$ de l'option de payoff $H = h(X_T)$ par la moyenne empirique $e^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(\bar{X}_T^{(i)})$. Ce faisant, on commet deux erreurs :

- une erreur de nature statistique, d'ordre $1/\sqrt{N}$:

$$\frac{\sqrt{N}}{\sigma} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(\bar{X}_T^{(i)}) - \mathbb{E}^* [h(\bar{X}_T)] \right) \longrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

en loi lorsque N tend vers l'infini, où $\sigma^2 = \text{Var}[\bar{X}_T]$. En réalité, on commet aussi une erreur sur σ^2 que l'on estime en même temps que $\mathbb{E}^* [h(\bar{X}_M)]$ par la quantité

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(\bar{X}_T^i)^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(\bar{X}_T^i) \right)^2.$$

Cependant, on constate en pratique que σ_n^2 converge vite vers une limite qui semble *dépendre peu* de la valeur du pas de temps Δt . Ceci permet de bien contrôler le “rayon” $\frac{2\sigma}{\sqrt{N}}$ de l'erreur statistique, uniformément en Δt .

- une erreur de discrétisation temporelle $|\mathbb{E}^* [h(\bar{X}_T)] - \mathbb{E}^* [h(X_T)]|$, d'ordre $\Delta t = T/M$. Comme les coefficients de notre diffusion bidimensionnelle sont lipschitziens, on peut facilement majorer cette erreur de discrétisation par une quantité d'ordre $\sqrt{\Delta t}$ en utilisant les résultats de convergence L^2 et presque sûre [5][8][6] :

$$\begin{aligned} \exists C > 0, \forall M \geq 1, \mathbb{E}^* \left[\sup_{0 \leq i \leq M} |\bar{X}_{t_i} - X_{t_i}|^2 \right] &\leq C \Delta t, \\ \forall \alpha < \frac{1}{2}, M^\alpha \sup_{0 \leq i \leq M} |\bar{X}_{t_i} - X_{t_i}| &\xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0 \quad \mathbb{P}^* - ps. \end{aligned}$$

En réalité, on peut faire beaucoup mieux. Sous des hypothèses de régularité sur les coefficients de la diffusion et sur le payoff, Denis TALAY et Luciano TUBARO [5] montrent que

$$\mathbb{E}^* [h(\bar{X}_T)] - \mathbb{E}^* [h(X_T)] = C \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (50)$$

où C est une constante dépendant des coefficients de la diffusion, des valeurs initiales x et y de X et Y , du payoff h , de T , mais indépendante de Δt . Denis TALAY et Luciano TUBARO introduisent par exemple les hypothèses :

(H0) Les coefficients $b_x(x, y)$, $\sigma_x(x, y)$, $b_y(x, y)$ et $\sigma_y(x, y)$ de la diffusion sont des fonctions C^∞ dont *toutes* les dérivées sont bornées.

(H1) Le payoff¹⁰ $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ et pour tout multiindice γ de dérivation,

$$\exists p \in \mathbb{N}, \exists C_T > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\partial_\gamma h(x, y)| \leq C_T (1 + \|(x, y)\|^p).$$

Alors **(H0)-(H1)** implique (50). Mais pour un call ou un put, **(H1)** n'est pas vérifiée. En outre, **(H0)** n'est pas vérifiée pour le cas $f(y) = me^y$.

Denis TALAY et Luciano TUBARO introduisent une autre hypothèse **(H2)** qui associée à **(H0)** suffit à obtenir (50) pour des payoffs seulement mesurables et bornés. Ceci permet de traiter le cas du put.

Il est donc naturel de choisir N et M de sorte que $N \approx M^2$, i.e. pour que les deux erreurs soient du même ordre¹¹.

Réduction de variance On améliore la vitesse de calcul en proposant des méthodes de réduction de variance :

- L'utilisation de variables antithétiques divise par quatre les appels à la fonction random : on lance $N/4$ simulations de quatre jeux de trajectoires obtenues via les deux suites indépendantes de gaussiennes centrées réduites indépendantes $(\hat{G}_n)_{0 \leq n \leq M-1}$ et $(\check{G}_n)_{0 \leq n \leq M-1}$ en utilisant respectivement les suites $(\hat{G}_n, \check{G}_n)_{0 \leq n \leq M-1}$, $(\hat{G}_n, -\check{G}_n)_{0 \leq n \leq M-1}$, $(-\hat{G}_n, \check{G}_n)_{0 \leq n \leq M-1}$ et $(-\hat{G}_n, -\check{G}_n)_{0 \leq n \leq M-1}$ qui ont toutes même loi.
- Dans le cas où α est grand devant $\frac{1}{T-t}$, on sait que le prix de l'option est proche de la solution P_0 de l'EDP $\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})P_0 = 0$ avec la condition terminale $P_0(T, x) = h(x)$. Si on dispose d'une formule pour P_0 , on peut espérer réduire la variance en introduisant le mouvement brownien géométrique \bar{X} :

$$dX_t^{bs} = rX_t^{bs} dt + \bar{\sigma}X_t^{bs} dW_t^*, \quad \bar{X}_0 = x$$

¹⁰Dans le cas des options financières, h ne dépend que de la variable x . On considère plus généralement des "payoffs" - qui portent alors mal leur nom - fonctions de x et y .

¹¹Reste à estimer la constante $C_{\Delta t}$ en facteur de Δt . Voir ci-dessous le paragraphe sur l'extrapolation de Romberg.

et en notant que

$$\mathbb{E}^* [h(\overline{X}_T)] = \mathbb{E}^* [h(\overline{X}_T) - h(X_T^{bs})] + P_0(0, x).$$

On espère que $\text{Var}[h(\overline{X}_T) - h(X_T^{bs})] < \text{Var}[h(\overline{X}_T)]$. On peut introduire un paramètre q qui minimise $\text{Var}[h(\overline{X}_T) - qh(X_T^{bs})]$ et écrire

$$\mathbb{E}^* [h(\overline{X}_T)] = \mathbb{E}^* [h(\overline{X}_T) - qh(X_T^{bs})] + qP_0(0, x).$$

Le meilleur q possible est

$$q = \frac{\text{cov}(h(\overline{X}_T), h(X_T^{bs}))}{\text{Var}[h(X_T^{bs})]}, \quad (51)$$

on peut l'estimer au cours de la simulation. Attention ! Si on estime q au cours de la simulation, disons par \hat{q}_N , ce dernier est fonction de tous les tirages de gaussiennes, donc corrélé à \overline{X}_T et X_T^{bs} . Par conséquent, les variables aléatoires

$$h(\overline{X}_T^{(i)}) - \hat{q}_N h(X_T^{bs, (i)})$$

ne sont pas forcément indépendantes, l'estimateur

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(h(\overline{X}_T^{(i)}) - \hat{q}_N h(X_T^{bs, (i)}) \right) \quad (52)$$

de $\mathbb{E}^* [h(\overline{X}_T) - qh(X_T^{bs})]$ peut être biaisé, de même que l'estimateur de la variance. Si l'on dispose d'un théorème central limite pour (52), l'écart-type limite est certainement plus large que pour le q déterministe correspondant (51).

On peut estimer (51) d'abord en appelant p fois la fonction `random`, on obtient \hat{q}_p , puis utiliser N nouveaux tirages pour estimer $\mathbb{E}^* [h(\overline{X}_T) - qh(X_T^{bs})]$ via

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(h(\overline{X}_T^{(i)}) - \hat{q}_p h(X_T^{bs, (i)}) \right).$$

Là encore, \hat{q}_p est une variable aléatoire. Il faut tenir compte de sa variance pour déterminer un intervalle de confiance relatif à l'estimateur ci-dessus.

Enfin, on peut - comme dit au début - choisir a priori un q déterministe (par exemple $q = 1$). Dans ce cas, l'estimation de l'intervalle de confiance est aisée - mais on peut être "loin" du meilleur q possible.

Même pour de petites valeurs de α , on peut se donner une valeur de $\bar{\sigma}$ et appliquer la méthode. En pratique, pour $q = 1$ et $\alpha = 1$, on observe que la variance est réduite d'un facteur 8 environ, et pour une large gamme de $\bar{\sigma}$.

Extrapolation de Romberg Sous réserve que l'erreur de discrétisation est d'ordre Δt , c'est-à-dire si l'on a bien le développement (50), alors on peut mettre en oeuvre la méthode d'extrapolation de Romberg : on estime $\mathbb{E}^* [h(\bar{X}_T)]$ pour deux valeurs Δt et $\Delta t/2$ du pas de temps, et on en déduit une estimation de

$$Z_T^{\Delta t} = 2\mathbb{E}^* \left[h \left(\bar{X}_T^{\Delta t/2} \right) \right] - \mathbb{E}^* \left[h \left(\bar{X}_T^{\Delta t} \right) \right].$$

$Z_T^{\Delta t}$ est une approximation d'ordre 2 en temps de $\mathbb{E}^* [h(X_T)]$ car (50) implique

$$Z_T^{\Delta t} - \mathbb{E}^* \left[h \left(\bar{X}_T^{\Delta t} \right) \right] = O(\Delta t^2).$$

Pour mesurer numériquement cette erreur, il est essentiel de pouvoir estimer dans le code informatique la constante en facteur du Δt^2 . Pour ce faire, *supposons* qu'on dispose d'un développement limité

$$\mathbb{E}^* \left[h \left(\bar{X}_T^{\Delta t} \right) \right] - \mathbb{E}^* [h(X_T)] = C_1' \Delta t + C_2' \Delta t^2 + o(\Delta t^2).$$

Alors il existe C_2 tel que

$$Z_T^{\Delta t} - \mathbb{E}^* [h(X_T)] = C_2 \Delta t^2 + o(\Delta t^2),$$

et

$$Z_T^{\Delta t} - Z_T^{\Delta t/2} = \frac{3}{4} C_2 \Delta t^2 + o(\Delta t^2).$$

Ceci permet d'estimer *a posteriori* l'erreur due à la discrétisation temporelle $C_2 \Delta t^2$ par

$$C_2 \Delta t^2 = \frac{4}{3} \left(Z_T^{\Delta t} - Z_T^{\Delta t/2} \right).$$

En pratique, par exemple pour estimer le put européen d'échéance T ,

- on fixe un grand nombre de tirages N ,

- on se donne un pas de temps minimal $\delta > 0$,
- on initialise Δt à T ,
- pour cette valeur de Δt , on estime le put par la moyenne empirique $Z_N^{\Delta t}$ qui estime $Z_T^{\Delta t}$ et on estime le rayon

$$\varepsilon_s^{\Delta t} = 2\sqrt{\frac{\text{Var}[Z_N^{\Delta t}]}{N}}$$

de l'erreur statistique,

- on divise Δt par 2, on recommence les opérations de la ligne précédente, et on calcule

$$C_{2,N}^{\Delta t} \Delta t^2 = \frac{4}{3} \left(Z_N^{\Delta t} - Z_N^{\Delta t/2} \right),$$

- on s'arrête dès que¹² $C_{2,N}^{\Delta t} \Delta t^2 \leq \varepsilon_s^{\Delta t}$ ou quand $\Delta t < \delta$. En effet, des valeurs de $C_{2,N}^{\Delta t} \Delta t^2$ inférieures à $\varepsilon_s^{\Delta t}$ n'ont *aucune signification* puisqu'on ne calcule la valeur de $Z_N^{\Delta t}$ (resp. $Z_N^{\Delta t/2}$) qu'avec une précision $\pm \varepsilon_s^{\Delta t}$ (resp. $\pm \varepsilon_s^{\Delta t/2}$).

Notons que sauf pour quelques grandes valeurs de Δt , on a $\varepsilon_s^{\Delta t} \approx \varepsilon_s^{\Delta t/2}$. On obtient donc une erreur statistique uniforme en Δt .

Au final, on a donc un pas de temps Δt et on a confiance en l'estimation

$$Z_N^{\Delta t} \pm 2\varepsilon_s^{\Delta t}$$

pour le put. Cette estimation de l'erreur est :

- globale,
- non asymptotique.

6.2.2 Amélioration du schéma

Le schéma d'Euler a deux grands avantages : il est universel - il vaut pour toute diffusion - et facile à implémenter. Mais, dans le cas de la diffusion (48) vue à travers les deux browniens indépendants W^1 et W^2 :

$$\begin{cases} dX_t = rX_t dt + f(Y_t)X_t \left(\rho dW_t^2 + \sqrt{1-\rho^2} dW_t^1 \right), & X_0 = x, \\ dY_t = -\alpha Y_t dt + \beta dW_t^2, & Y_0 = y, \end{cases} \quad (53)$$

on peut espérer être plus précis en exploitant les propriétés suivantes :

¹²A priori, $C_{2,N}^{\Delta t} \Delta t^2$ décroît avec Δt . On peut recommencer une ou deux fois les opérations pour s'en assurer.

- la dynamique de Y est autonome - elle ne dépend pas de la dynamique de X ; on peut donc simuler d'abord Y , puis X sachant Y ,
- on sait simuler exactement la loi de Y , car Y est un processus gaussien ; en vue de simuler X , il est en fait nécessaire¹³ de simuler la loi du couple (Y, W^2) ; ça n'est pas plus difficile car (Y, W^2) est également un processus gaussien,
- pour simuler efficacement la loi de (Y, W^2) , on peut exploiter le caractère markovien de ce processus,
- on peut implémenter un schéma d'Euler pour simuler X sachant Y et W^2 . Mais on dispose d'une expression exacte de X_T en fonction des trajectoires de Y , W^2 et W^1 :

$$X_T = xe^{rT} \exp \left(\rho \int_0^T f(Y_t) dW_t^2 + \sqrt{1 - \rho^2} \int_0^T f(Y_t) dW_t^1 - \frac{1}{2} \int_0^T f(Y_t)^2 dt \right).$$

On peut espérer être plus précis en simulant directement l'argument sous l'exponentielle. Cela revient à simuler par un schéma d'Euler $\log(X_T)$ plutôt que X_T .

Revenons point par point sur ces améliorations.

Simulation du couple (Y, W^2) Nous proposons deux méthodes pour simuler la loi du couple (Y, W^2) . Elles sont toutes deux basées sur le résultat suivant : si M est un entier ≥ 1 et si $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_M = T$, alors le vecteur

$$V = (Y_{t_1}, W_{t_1}^2, Y_{t_2}, W_{t_2}^2, Y_{t_3}, W_{t_3}^2, \dots, Y_{t_M}, W_{t_M}^2)$$

est un vecteur gaussien. Pour le prouver, considérons $2M$ réels λ_i et μ_i et montrons que la variable aléatoire réelle

$$G = \sum_{i=1}^M (\lambda_i Y_{t_i} + \mu_i W_{t_i}^2)$$

suit une loi gaussienne. Pour ce faire, posons $R_t = e^{\alpha t} Y_t$; comme $dR_t = \beta e^{\alpha t} dW_t^2$,

$$R_t = y + \beta \int_0^t e^{\alpha s} dW_s^2.$$

¹³sauf dans le cas où $\rho = 0$.

Il est alors facile de trouver des réels c , λ'_i et μ'_i tels que

$$\begin{aligned} G &= c + \sum_{i=1}^M \left(\lambda'_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{\alpha s} dW_s^2 + \mu'_i (W_{t_i}^2 - W_{t_{i-1}}^2) \right) \\ &= c + \sum_{i=1}^M \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\lambda'_i e^{\alpha s} + \mu'_i) dW_s^2. \end{aligned}$$

Or, pour tout i , $I_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\lambda'_i e^{\alpha s} + \mu'_i) dW_s^2$ est une variable gaussienne - car limite dans L^2 d'une suite de variables gaussiennes ; de plus les I_i sont indépendantes. G est donc la somme de v.a. gaussiennes indépendantes, c'est donc elle-même une gaussienne.

Méthode 1 On génère la matrice de variance-covariance Γ du vecteur gaussien V , son vecteur des moyennes m , on calcule une racine carrée A de Γ par la méthode de Cholevsky - i.e. on cherche l'unique A triangulaire inférieure à diagonale strictement positive telle que $\Gamma = AA^t$ - et on génère un vecteur G de $2M$ variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes. Alors le vecteur $AG + m$ a même loi que V .

Pour calculer Γ , il suffit de connaître, pour $1 \leq i \leq j \leq M$:

$$\begin{aligned} \text{cov}(Y_{t_i}, Y_{t_j}) &= \nu^2 (e^{-\alpha(t_i+t_j)} - e^{-\alpha(t_j-t_i)}), \\ \text{cov}(W_{t_i}^2, W_{t_j}^2) &= t_i, \\ \text{cov}(Y_{t_i}, W_{t_j}^2) &= \frac{\beta}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t_i}), \\ \text{cov}(Y_{t_j}, W_{t_i}^2) &= e^{-\alpha(t_j-t_i)} \text{cov}(Y_{t_i}, W_{t_j}^2). \end{aligned}$$

Pour calculer m , il suffit de connaître

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^* [Y_{t_i}] &= ye^{-\alpha t_i}, \\ \mathbb{E}^* [W_{t_i}^2] &= 0. \end{aligned}$$

L'inconvénient de cette méthode est que l'on utilise des matrices de taille $2M$ - deux fois le nombre de pas de temps - donc éventuellement de grande taille.

Méthode 2 Ici on exploite le caractère markovien - *en plus* du caractère gaussien - du couple $(Y_t, W_t^2)_{0 \leq t \leq T}$. Pour cela, on se donne une subdivision régulière $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_M = T$ de $[0, T]$ de pas Δt et on remarque que pour $1 \leq n \leq M$,

$$\begin{aligned} Y_{t_n} &= e^{-\alpha \Delta t} \left(Y_{t_{n-1}} + \beta e^{-\alpha t_{n-1}} \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{\alpha s} dW_s^2 \right), \\ W_{t_n}^2 &= W_{t_{n-1}}^2 + (W_{t_n}^2 - W_{t_{n-1}}^2), \end{aligned}$$

si bien que si l'on pose :

$$\begin{aligned} V_n &= (Y_{t_n}, W_{t_n}^2)^t \\ U_n &= \left(\beta e^{-\alpha t_{n-1}} \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{\alpha s} dW_s^2, W_{t_n}^2 - W_{t_{n-1}}^2 \right)^t \\ g \left(\begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} e^{-\alpha \Delta t} (y + u^1) \\ w + u^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

on a pour pour $n \geq 1$

$$V_n = g(V_{n-1}, U_n).$$

Or on note que $(U_n)_{1 \leq n \leq M}$ est une suite de vecteurs aléatoires gaussiens indépendants de dimension 2 de même loi $\mathcal{N}_2(0, \Gamma)$, où

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \nu^2 (e^{2\alpha \Delta t} - 1) & \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha \Delta t} - 1) \\ \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha \Delta t} - 1) & \Delta t \end{pmatrix},$$

et indépendante de V_0 . Par conséquent, $(V_n)_{0 \leq n \leq M}$ est une chaîne de Markov qu'on peut simuler facilement en générant M lois $\mathcal{N}_2(0, \Gamma)$ indépendantes. Pour ce faire, on applique la méthode 1 - mais en dimension 2 seulement ! Cette méthode est plus rapide, car la méthode de Cholevsky en dimension d nécessite de l'ordre de d^3 opérations.

Simulation de X_T On rappelle que

$$X_T = x e^{rT} \exp \left(\rho \int_0^T f(Y_t) dW_t^2 + \sqrt{1 - \rho^2} \int_0^T f(Y_t) dW_t^1 - \frac{1}{2} \int_0^T f(Y_t)^2 dt \right)$$

et que l'on a déjà simulé le couple (Y, W^2) aux dates $t_n = \frac{nT}{M}$. On décide d'approximer respectivement $I_0 = \int_0^T f(Y_t)^2 dt$, $I_1 = \int_0^T f(Y_t) dW_t^1$ et $I_2 =$

$\int_0^T f(Y_t) dW_t^2$ par

$$\begin{aligned} I_0^{\Delta t} &= \Delta t \sum_{i=0}^{M-1} f(Y_{t_i})^2, \\ I_1^{\Delta t} &= \sum_{i=0}^{M-1} f(Y_{t_i}) \left(W_{t_{i+1}}^1 - W_{t_i}^1 \right), \\ I_2^{\Delta t} &= \sum_{i=0}^{M-1} f(Y_{t_i}) \left(W_{t_{i+1}}^2 - W_{t_i}^2 \right). \end{aligned}$$

Les valeurs des Y_{t_i} et $W_{t_i}^2$ sont connues, il suffit donc à cette étape de générer une suite $W_{t_{i+1}}^1 - W_{t_i}^1$ de gaussiennes indépendantes centrées et de variance Δt . On approxime alors X_T par

$$\bar{X}_T^{\Delta t} = x e^{rT} \exp \left(\rho I_2^{\Delta t} + \sqrt{1 - \rho^2} I_1^{\Delta t} - \frac{1}{2} I_0^{\Delta t} \right) \quad (54)$$

6.2.3 Mise en oeuvre

Détaillons la méthode mise en oeuvre informatiquement pour l'évaluation du put européen - $h(x) = (K - x)_+$ - et de la volatilité implicite :

1. on fixe **NB_TIRAGES** $\equiv N$ le nombre d'appels à la fonction **random**,
2. on entre les paramètres du modèle :
 - pour le sous-jacent :
 - la valeur **SPOT_TODAY** $\equiv x$ du spot aujourd'hui ; par défaut **SPOT_TODAY** vaut 1, c'est-à-dire qu'on raisonne avec un spot unité,
 - le taux court **TAUX** $\equiv r$,
 - la fonction de volatilité f ; on considère souvent $f(y) = m e^y$ ou $f(y) = m' |m + y|$,
 - pour le processus Y qui gouverne la volatilité :
 - la valeur initiale **Y_TODAY** $\equiv y$,
 - la valeur **ALPHA** $\equiv \alpha$ de la force de rappel,
 - la valeur **NU** $\equiv \nu$ de l'écart-type à long terme de Y ,
 - la valeur **RHO** $\equiv \rho$ de la corrélation entre les deux browniens qui gouvernent X et Y ,
3. on fixe **ECHEANCE** $\equiv T$, la maturité de l'option ; par défaut elle vaut 1, c'est-à-dire qu'on raisonne sur une année,

4. on fixe `M_min` et `M_max` les valeurs minimale et maximale autorisées du nombre M de pas de temps,
5. on fixe `strike_min`, `strike_max` et `nb_strike`, qui sont respectivement le plus petit strike, le plus grand strike et le nombre de strikes considérés ; on en déduit `pas_strike`,
6. on fixe une volatilité Black-Scholes `sigmabs`,
7. on fixe le coefficient `q` - déterministe - qui intervient dans la réduction de variance
8. l'exécution commence : on lance un chronomètre,
9. on crée deux matrices et huit vecteurs :
 - `prix[j][0]` contient le prix du put pour le strike `strike_min + j pas_strike`,
 - `prix[j][1]` contient l'erreur statistique sur ce prix,
 - `prixfin[j][0]` et `prixfin[j][1]` sont les analogues pour un pas de temps moitié,
 - `E` est un échantillon de `NB_TIRAGES` spots à la date T ,
 - `e` est son analogue pour un pas de temps moitié,
 - `Ebs` est l'échantillon des `NB_TIRAGES` spots Black-Scholes construits à partir de `sigmabs`, W_T^1 et W_T^2 ,
 - `erreurstat[j]` \equiv `prixfin[j][1]` et `erreurtemps[j]` contiennent respectivement le rayon de l'erreur statistique et le rayon de l'erreur due à la discrétisation temporelle correspondants au strike `strike_min + j pas_strike`,
 - `call[j]` contient le prix du call calculé à partir du prix du put par la relation de parité,
 - `vol[j]` contient la volatilité implicite calculée à partir de `call[j]` en inversant la formule de Black-Scholes,
 - `volsup[j]` est, elle, calculée à partir de `call[j]+erreurstat[j]`,
10. on initialise à zéro l'entier `arret` ; l'exécution cessera quand `arret` vaudra `nb_strike`, signifiant que pour tout j , `erreurtemps[j] < erreurstat[j]`,
11. on initialise M à `M_min`,
12. tant que `arret < nb_strike` et $M \leq M_{\max}$,
 - `NB_PAS_DE_TEMPS` reçoit M ,
 - on met `arret` à zéro,
 - on exécute `moult_spots_v9(e,E,Ebs,sigmabs)` qui remplit `e` pour la valeur $\Delta t/2 = \frac{1}{2M}$ du pas de temps, `E` pour le pas de temps Δt

et Ebs. Plus précisément, on répète `NB_TIRAGES/4` fois l'opération suivante :

- on simule le vecteur $V^{\Delta t/2} = (Y_{t_1}, W_{t_1}^2, Y_{t_2}, W_{t_2}^2, Y_{t_3}, W_{t_3}^2, \dots, Y_{t_{2M}}, W_{t_{2M}}^2)$, où $t_n = n \frac{\Delta t}{2}$; ceci nécessite $4M$ tirages de gaussiennes; on en déduit $I_0^{\Delta t/2}$ et $I_2^{\Delta t/2}$,
- on simule $B^{\Delta t/2} = (W_{t_1}^1, W_{t_2}^1, W_{t_3}^1, \dots, W_{t_{2M}}^1)$; ceci nécessite $2M$ tirages de gaussiennes; on en déduit $I_1^{\Delta t/2}$,
- on en déduit $\overline{X}_T^{\Delta t/2}$ via (54); on remplit ainsi une nouvelle case de **e**,
- en utilisant $V^{\Delta t/2}$ avec $-B^{\Delta t/2}$, puis $-V^{\Delta t/2}$ avec $B^{\Delta t/2}$ et enfin $-V^{\Delta t/2}$ avec $-B^{\Delta t/2}$, on génère trois autres valeurs \overline{X} ; au total on a donc rempli quatre cases de **e**,
- on utilise *les mêmes valeurs* de $V^{\Delta t} = (Y_{t_2}, W_{t_2}^2, Y_{t_4}, W_{t_4}^2, \dots, Y_{t_{2M}}, W_{t_{2M}}^2)$ et de $B^{\Delta t} = (W_{t_2}^1, W_{t_4}^1, \dots, W_{t_{2M}}^1)$ pour calculer $I_0^{\Delta t}$, $I_1^{\Delta t}$, $I_2^{\Delta t}$ et $\overline{X}_T^{\Delta t}$; ceci se fait sans appel à la fonction `random`; par le même jeu sur les signes de $V^{\Delta t}$ et de $B^{\Delta t}$, on remplit quatre cases de **E**,
- enfin on utilise $\pm W_T^1$ et $\pm W_T^2$ pour remplir quatre cases de **Ebs**,
- pour chaque $j \in \{0, 1, \dots, \text{nb_strike} - 1\}$,
 - **STRIKE** reçoit `strike_min + j pas_strike`,
 - **prix** reçoit `prixfin`, et on réactualise `prixfin[prixfin[j] reçoit moyenne_empirique_controle_bs_romberg_v2(e,E,Ebs,sigmabs,q,prixfin[j])`, c'est-à-dire qu'on affecte à `prixfin[j][0]` la quantité

$$qP_{\text{sigmabs}}^{bs} + \frac{1}{\text{NB_TIRAGES}} \sum_{i=0}^{\text{NB_TIRAGES}-1} (2h(\mathbf{e}[i]) - h(\mathbf{E}[i]) - qh(\mathbf{Ebs}[i]))$$

où P_{sigmabs}^{bs} est le prix que donnent **BLACK** et **SCHOLES** au put pour la volatilité `sigmabs`, et à `prixfin[j][0]` l'écart-type correspondant; on place cette dernière valeur dans `erreurstat[j]`,

- si $M \neq \text{M_min}$, on calcule l'erreur temporelle `erreurtemps[j]` par $\frac{4}{3} (\text{prix}[j][0] - \text{prixfin}[j][0])$ et si `erreurtemps[j] < erreurstat[j]`, on incrémente `arret` de 1,
 - on multiplie M par 2,
13. si on est sortis de la boucle précédente sans que `arret=nb_strike`, c'est que `M_max` n'a pas été choisi suffisamment grand; on affiche un message en ce sens,

14. sinon on écrit dans un fichier la valeur des paramètres entrés, la dernière valeur prise par le pas de temps Δt puis, pour chaque j , la valeur du strike correspondant, la valeur du put `prixfin[j][0]`, l'erreur statistique `erreurstat[j]`, l'erreur due à la discrétisation temporelle `erreurtemps[j]` (plus petite), la volatilité implicite `vol[j]` et l'erreur `volsup[j]-vol[j]` sur cette dernière,
15. enfin, on affiche le temps total d'exécution.

6.2.4 Résultats

Un exemple de tableau des résultats On commence par donner l'ensemble des résultats pour les paramètres suivants :

N	250 000
x	1
r	0
$f(y)$	$\sigma_f e^y$
σ_f	0.2
Y_0	0
α	1
ν	0.5
ρ	0
T	1

On souhaite représenter graphiquement la volatilité implicite en fonction de la quantité $\log\left(\frac{K}{x}\right)$. Pour obtenir des points régulièrement espacés sur ce graphe, on considère en fait les strikes

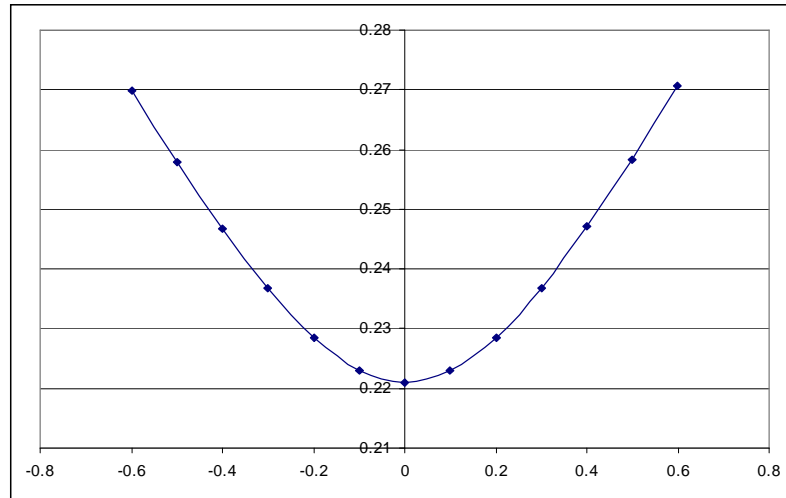
$$K_j = \exp(l_{\min} + jh_l)$$

pour $j \in \{0, 1, \dots, 12\}$, $l_{\min} = -0.6$ et $h_l = 0.1$.

L'exécution prend fin avec le pas de temps $\Delta t = 1/8$ et donne les résultats suivants :

$\log \frac{K}{x}$	put	erreurstat	erreurtemps	vol	erreurvol
-0.6	0.000906	0.000046	-0.000022	0.269799	0.003624
-0.5	0.001997	0.000069	-0.000038	0.257973	0.002861
-0.4	0.004440	0.000106	-0.000026	0.24672	0.002408
-0.3	0.009887	0.000161	0.000017	0.236683	0.002098
-0.2	0.021635	0.000234	0.000114	0.228493	0.001907
-0.1	0.045294	0.000292	0.000181	0.223003	0.001711
0	0.088006	0.000309	0.000116	0.221048	0.001559
0.1	0.155243	0.000343	0.000166	0.223039	0.001821
0.2	0.247806	0.000409	0.000075	0.228421	0.002724
0.3	0.363213	0.000473	-0.000073	0.23673	0.004518
0.4	0.498493	0.000523	-0.000186	0.247078	0.007701
0.5	0.652046	0.000558	-0.000108	0.258379	0.013041
0.6	0.82381	0.000580	-0.000109	0.270705	0.021148

On donne ci-dessous la volatilité implicite I en fonction de $\log \frac{K}{x}$.



volatilité implicite I en fonction de $\log \frac{K}{x}$

On constate que :

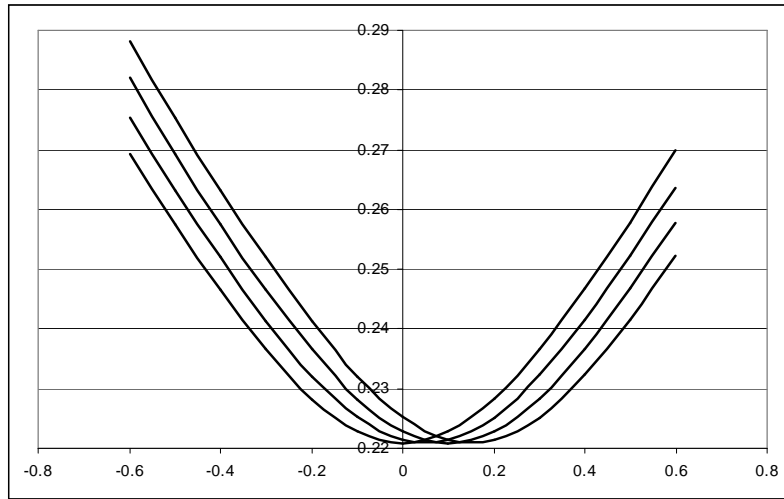
- le smile est convexe, décroissant puis croissant, avec un minimum autour de la monnaie ($K = x$ ici car $r = 0$),
- le smile *vu comme fonction de $\log \frac{K}{x}$* est remarquablement symétrique
- la valeur minimale $I_{\min} \approx 0.221$ est supérieure à $\sigma_f \exp(\mathbb{E}[Y_{\bullet}]) \equiv \sigma_f = 0.2$ mais inférieure à $\bar{\sigma} = \sqrt{\langle f^2 \rangle}$, i.e. si $G \sim \mathcal{N}(0, 1)$,

$$\bar{\sigma}^2 = \mathbb{E}[f(\nu G)^2] = \sigma_f^2 \mathbb{E}[e^{2\nu G}] = \sigma_f^2 e^{2\nu^2}$$

d'où $\bar{\sigma} \approx 0.2568$.

A partir de cette courbe prise comme référence, nous allons étudier l'influence de chacun des paramètres sur le smile. On fait successivement varier $r, \sigma_f, y, \alpha, \nu, \rho$ et T , toutes choses égales par ailleurs.

Influence de r



De gauche à droite : $r = 0, 0.05, 0.1, 0.15$

Augmenter r revient à translater de rT le smile sur la droite. Cela se

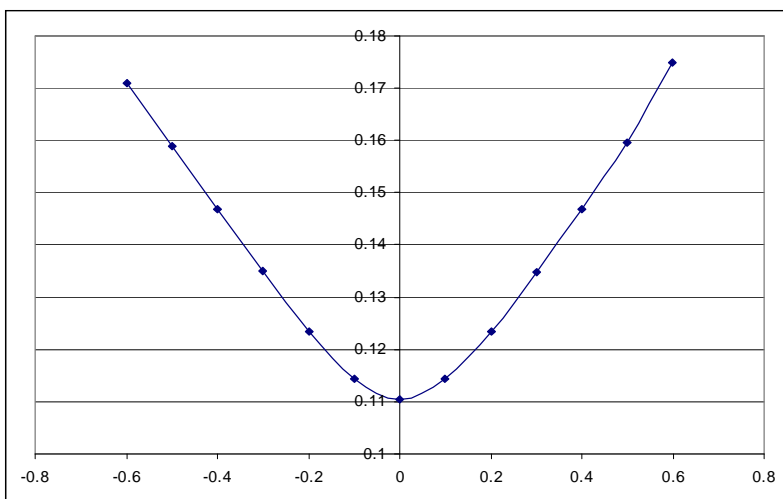
vérifie exactement numériquement :

$\log \frac{K}{x}$	$r = 0$	$r = 0.1$
-0.6	0.2700	0.2801
-0.5	0.2583	0.2700
-0.4	0.2478	0.2583
-0.3	0.2377	0.2478
-0.2	0.2295	0.2377
-0.1	0.2238	0.2295
0	0.2213	0.2238
0.1	0.2237	0.2213
0.2	0.2292	0.2237
0.3	0.2370	0.2292
0.4	0.2459	0.2370
0.5	0.2555	0.2459
0.6	0.2645	0.2555

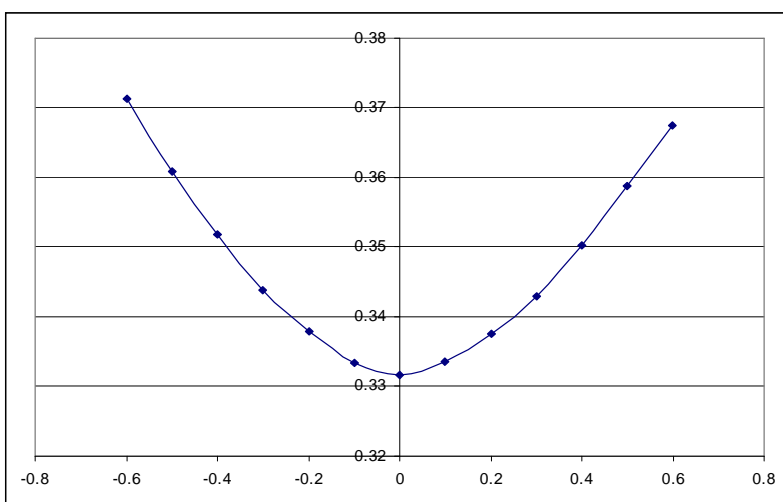
En effet,

$$X_T = e^{rT} \times x \exp \left(\rho \int_0^T f(Y_t) dW_t^2 + \sqrt{1 - \rho^2} \int_0^T f(Y_t) dW_t^1 - \frac{1}{2} \int_0^T f(Y_t)^2 dt \right).$$

Influence de σ_f



$$\sigma_f = 0.1$$



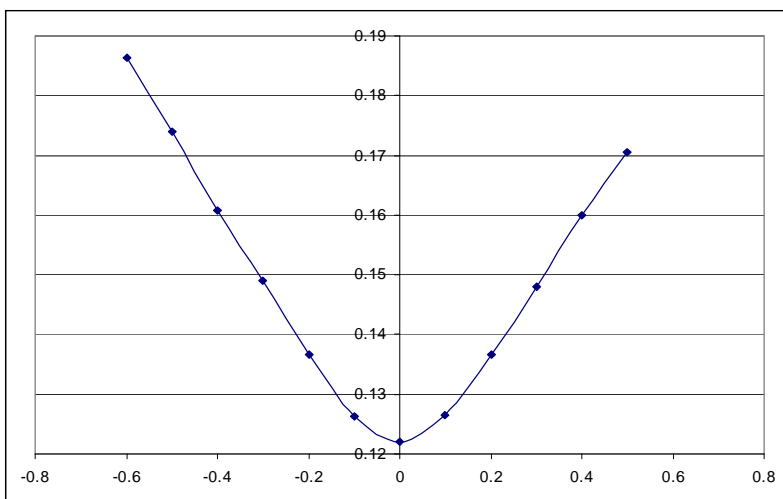
$$\sigma_f = 0.3$$

On donne ci-dessous les valeurs de I pour les trois valeurs testées de σ_f :

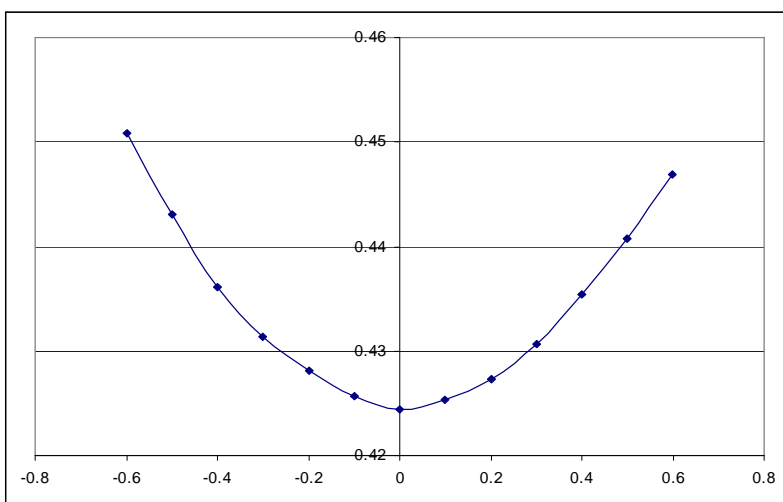
$\log \frac{K}{x}$	$\sigma_f = 0.1$	$\sigma_f = 0.2$	$\sigma_f = 0.3$
-0.6	0.1710	0.2700	0.3714
-0.5	0.1573	0.2583	0.3609
-0.4	0.1454	0.2478	0.3518
-0.3	0.1345	0.2377	0.3439
-0.2	0.1237	0.2295	0.3378
-0.1	0.1143	0.2238	0.3334
0	0.1104	0.2213	0.3317
0.1	0.1144	0.2237	0.3335
0.2	0.1234	0.2292	0.3375
0.3	0.1335	0.2370	0.3430
0.4	0.1441	0.2459	0.3503
0.5	0.1535	0.2555	0.3587
0.6	0.1618	0.2645	0.3674

Autour de la monnaie, σ_f semble jouer proportionnellement ; loin de la monnaie, σ_f semble jouer plutôt additivement.

Influence de y Pour des grandes valeurs de α , l'effet de moyenne masque $y = Y_0$. Par contre, pour des valeurs de αT proches de 1, comme c'est le cas ici ($\alpha = T = 1$), on n'oublie pas la condition initiale du processus Y .

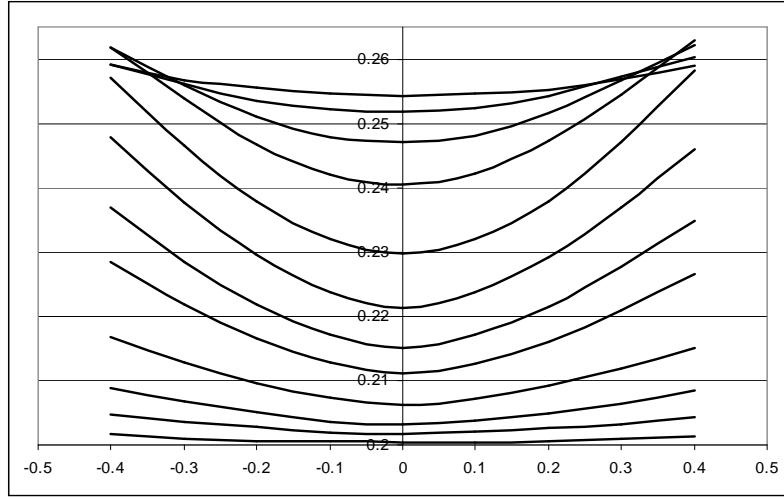


$$y = -1$$



$$y = 1$$

Influence de α



De bas en haut pour l'abscisse 0 :

$$\alpha = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 1, 2, 5, 10, 20, 40.$$

On peut faire les observations suivantes :

- quand α est proche de 0, le smile s'applatit sur la valeur $\sigma_f = 0.2$; on rappelle qu'ici $y = 0$; dans ce cas en effet, les trajectoires sur $[0, 1]$ de Y restent proches de l'axe des abscisses (cf. la figure (??)), donc $\sigma_t = f(Y_t) = \sigma_f e^{Y_t}$ reste proche de σ_f ; quantitativement, la variance de Y_t vaut $\nu^2 (1 - e^{-2\alpha t})$ est petite,
- quand α augmente, la variance de Y_t aussi, la volatilité de la volatilité augmente, ce qui tend à augmenter la courbure - ou convexité - du smile,
- quand α tend vers $+\infty$, le smile s'applatit sur la valeur $\bar{\sigma} \approx 0.2568$, conformément à l'analyse asymptotique développée plus haut ; c'est l'effet de moyenne : moralement, toutes les trajectoires de Y sur $[0, 1]$ visitent tous les états possibles selon la probabilité stationnaire ; pour le sous-jacent X , il y a donc *trajectoire par trajectoire* un effet de moyenne sur les valeurs possibles de Y ; de ce fait, quelle que soit la *trajectoire* $(X_t, Y_t)_{t \in [0, 1]}$, le variable aléatoire X_T est proche d'une variable log-normale pour la valeur $\bar{\sigma}$ qui est à la fois :

- la moyenne spatiale des volatilités $f(Y)$ contre la probabilité stationnaire de Y ,
- la moyenne temporelle de $\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f(Y_t)^2 dt}$ sur chaque trajectoire – la même pour chaque trajectoire.

C'est caractéristique de la propriété d'*ergodicité*.

Il existe donc une valeur critique α_c de α qui maximise la courbure du smile à la monnaie ; sur notre exemple où $T = 1$, $\alpha_c \approx 1$. Rappelons que α est l'inverse d'un temps, aussi est-il raisonnable de rechercher α_c de la forme $\frac{k_\alpha}{T}$. Cette valeur de α marque l'équilibre entre deux mécanismes :

- **Mécanisme 1** : quand α augmente, $\text{Var}[Y_t] = \nu^2 (1 - e^{-2\alpha t})$ augmente et la courbure du smile aussi : l'incertitude sur la volatilité est plus grande et la distribution de X_T est d'autant plus loin d'une log-normale.
- **Mécanisme 2** : quand α augmente, les trajectoires de Y tendent à visiter *chacune en particulier* tous les états possibles de Y suivant la probabilité $\pi = \mathcal{N}(0, \nu^2)$, si bien que la quantité $\frac{1}{T} \int_0^T f(Y_t) dt$ tend à être la même pour toutes les trajectoires, de même pour $\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f(Y_t)^2 dt}$ qui tend à être $\bar{\sigma}$ sur toutes les trajectoires, et X_T est proche d'une distribution Black-Scholes pour la valeur $\bar{\sigma}$. On peut mesurer la variance de la moyenne temporelle $M_T = \frac{1}{T} \int_0^T f(Y_t) dt$ de la volatilité $f(Y)$ sur $[0, T]$ dans le cas où $f(y) = \sigma_- \mathbf{1}_{\{y \leq 0\}} + \sigma_+ \mathbf{1}_{\{y > 0\}}$, $Y_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*[M_T] &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E}^* [\sigma_- \mathbf{1}_{\{Y_t \leq 0\}} + \sigma_+ \mathbf{1}_{\{Y_t > 0\}}] dt \\
&= \frac{1}{2T} \int_0^T (\sigma_- + \sigma_+) dt \\
&= \frac{\sigma_- + \sigma_+}{2} \\
\mathbb{E}^*[M_T^2] &= \frac{1}{T^2} \mathbb{E}^* \left[\int \int_{[0, T]^2} f(Y_s) f(Y_t) ds dt \right] \\
&= \frac{1}{T^2} \int \int_{[0, T]^2} \mathbb{E}^* [f(Y_s) f(Y_t)] ds dt \\
&= \frac{2}{T^2} \int \int_{\{0 \leq s \leq t \leq T\}} \mathbb{E}^* [f(Y_s) f(Y_t)] ds dt.
\end{aligned}$$

Si on note $\Pi_+ = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 y_2 > 0\}$ le nord-est et le sud-ouest de \mathbb{R}^2 et $\Pi_- = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 y_2 \leq 0\}$ le nord-ouest et le sud-est de

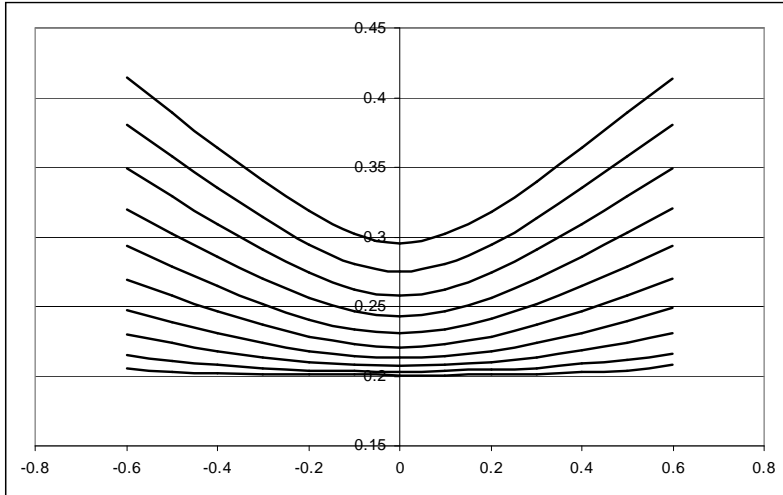
\mathbb{R}^2 ,

$$\mathbb{E}^*[M_T^2] = \frac{2}{T^2} \int \int_{\{0 \leq s \leq t \leq T\}} \left\{ \frac{\sigma_-^2 + \sigma_+^2}{2} \mathbb{P}((Y_s, Y_t) \in \Pi_+) + \sigma_- \sigma_+ \mathbb{P}((Y_s, Y_t) \in \Pi_-) \right\} ds dt.$$

Lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$, pour $0 \leq s < t \leq T$, $\text{cov}(Y_s, Y_t) \rightarrow 0$, (Y_s, Y_t) tend en loi vers un couple de gaussiennes centrées indépendantes, si bien que $\mathbb{P}((Y_s, Y_t) \in \Pi_+)$ et $\mathbb{P}((Y_s, Y_t) \in \Pi_-)$ tendent vers $\frac{1}{2}$; par conséquent $\mathbb{E}^*[M_T^2]$ tend vers $\frac{(\sigma_- + \sigma_+)^2}{4} = \mathbb{E}^*[M_T]^2$, ce qui prouve que $\text{Var}[M_T]$ tend vers 0 quand $\alpha \rightarrow +\infty$: dans cette limite, la moyenne temporelle du processus de volatilité $(f(Y_t))_{0 \leq t \leq T}$ tend vers une quantité déterministe.

Notons aussi que la volatilité implicite $I^{ATM}(\alpha)$ à la monnaie¹⁴ semble une fonction croissante de α , telle que $I^{ATM}(0^+) = \sigma_f$ et $I^{ATM}(+\infty) = \bar{\sigma}$. Nous verrons en outre plus loin que I^{ATM} semble ne dépendre de α et T que *via* le produit αT . Elle est donc aussi d'autant plus grande que T est petit.

Influence de ν



De bas en haut : $\nu = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1$

On remarque que :

¹⁴ATM pour "at the money"

- lorsque ν tend vers 0, le smile s’applatit sur la valeur $\sigma_f = 0.2$; en effet, à la limite où ν tend vers 0, vu que $Y_0 = 0$, Y vaut identiquement 0,
- lorsque ν augmente, la volatilité implicite augmente et la courbure du smile à la monnaie aussi ; les smiles semblent avoir des asymptotes quand $\log \frac{K}{x}$ tend vers $-\infty$ ou $+\infty$, dont les pentes augmentent - en valeur absolue - avec ν .

Ceci peut se comprendre de la façon suivante : lorsque ν augmente, c’est la volatilité de la volatilité qui augmente, on fait payer un risque de volatilité, les prix d’option - et donc la volatilité implicite - sont donc plus élevés ; par ailleurs, la distribution de X_T s’éloigne de plus en plus d’une log-normale car on donne de plus en plus d’importance au bruit dans Y ,

- numériquement, il semble que la pente asymptotique soit proportionnelle à ν . En effet, si pour la fonction $I(\log \frac{K}{x})$ on note $\Delta_g = I(-0.6) - I(-0.5)$ et $\Delta_d = I(0.6) - I(0.5)$, on a :

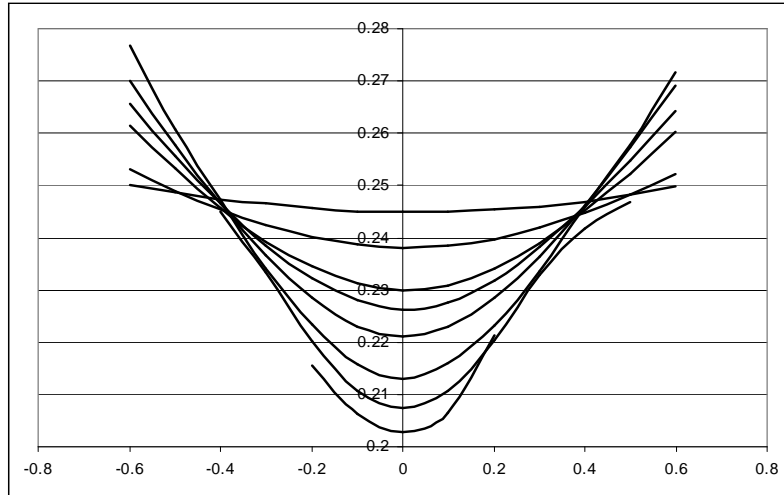
ν	$\frac{\Delta_g}{\nu}$	$\frac{\Delta_d}{\nu}$
0.2	0.0192	0.0232
0.3	0.0206	0.0223
0.4	0.0217	0.0242
0.5	0.0235	0.0243
0.6	0.0239	0.0244
0.7	0.0248	0.0248
0.8	0.0250	0.0251
0.9	0.0247	0.0251
1.0	0.0250	0.0251

Influence de ρ On note que :

- les volatilités à la monnaie sont à peu près toutes les mêmes,
- lorsque $\rho \neq 0$, la courbe de smile n’est plus symétrique par rapport à la monnaie ; ceci signifie que la distribution de X_T n’est plus symétrique autour de x . On peut décrire ce phénomène par la caricature suivante. Lorsque $\rho < 0$, imaginons un bruit discret $\Delta W_{t_n}^2 > 0$. Le bruit $\rho \Delta W_{t_n}^2 + \sqrt{1 - \rho^2} \Delta W_{t_n}^1$ sur le spot a alors tendance à être négatif, donc le spot (actualisé) a tendance à être plus petit en t_{n+1} qu’en t_n . Ainsi, les queues de distribution de X_T sont dissymétriques : la queue de distribution de gauche est plus large que celle de droite ; par conséquent, par

rapport à la situation où $\rho = 0$, on donne plus de poids aux événements du type $X_T \in [x_1, x_2]$, où $x_1 < x_2 < x$. Pour les strikes en-dessous de x , les calls - et la volatilité implicite - sont donc plus bas. C'est l'inverse pour les strikes au-dessus de x . Financièrement, à une volatilité plus grande correspond des prix de sous-jacents plus bas. On peut bien sûr faire un raisonnement analogue dans le cas où $\rho > 0$.

Influence de T



Du plus courbé au plus plat : $T = 0.1, 0.25, 0.5, 1, 2, 4, 8$

On remarque que :

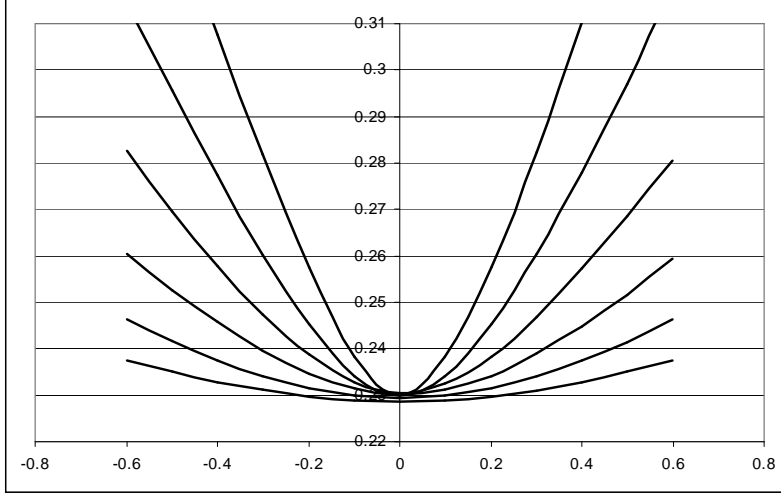
- lorsque T tend vers $+\infty$, le smile tend à s'aplatir sur la valeur $\bar{\sigma} \approx 0.2568$; de ce point de vue, il y a équivalence formelle entre les limites $\alpha \rightarrow +\infty$ et $T \rightarrow +\infty$; l'interprétation est la même que dans l'asymptotique $\alpha \rightarrow +\infty$,
- lorsque T tend vers 0, en revanche, le smile semble se courber de plus en plus.

Certes la loi de Y_t ne dépend de t que *via* αT , mais la loi de X_T dépend de toute la trajectoire de Y jusqu'à T , qui elle dépend de α et T de manière plus complexe que simplement *via* le produit αT . En revanche, moralement,

aussi bien dans la limite où $T \rightarrow +\infty$ que dans la limite où $\alpha \rightarrow +\infty$, on peut remplacer $(f(Y_t))_{0 \leq t \leq T}$ par $\bar{\sigma}$.

Pour comprendre le fait qu'on accroît la pente du smile quand on diminue T , on peut considérer la fonction $f(y) = a\mathbf{1}_{\{y < 0\}} + b\mathbf{1}_{\{y \geq 0\}}$.

Influence de α et T à αT constant



$\alpha T = 2$; de bas en haut : $\alpha = 0.25, 0.5, 1, 2, 4, 8$

Il semble que :

- le prix de l'option à la monnaie - et donc la volatilité implicite I^{ATM} - ne dépend de α et T que *via* le produit αT ,
- à αT constant, la courbure est d'autant plus grande que T est petit, donc que α est grand.

Cas où $f(y) = \sigma_- \mathbf{1}_{\{y \leq 0\}} + \sigma_+ \mathbf{1}_{\{y > 0\}}$ Nous reprenons en partie l'étude ci-dessus dans le cas où $f(y) = \sigma_- \mathbf{1}_{\{y \leq 0\}} + \sigma_+ \mathbf{1}_{\{y > 0\}}$. On prend $\sigma_- = 0.1$, $\sigma_+ = 0.2$. La fonction f est dans ce cas discontinue en 0 ; pour cette raison on distinguera le cas $Y_0 = 0$ du cas $Y_0 \neq 0$.

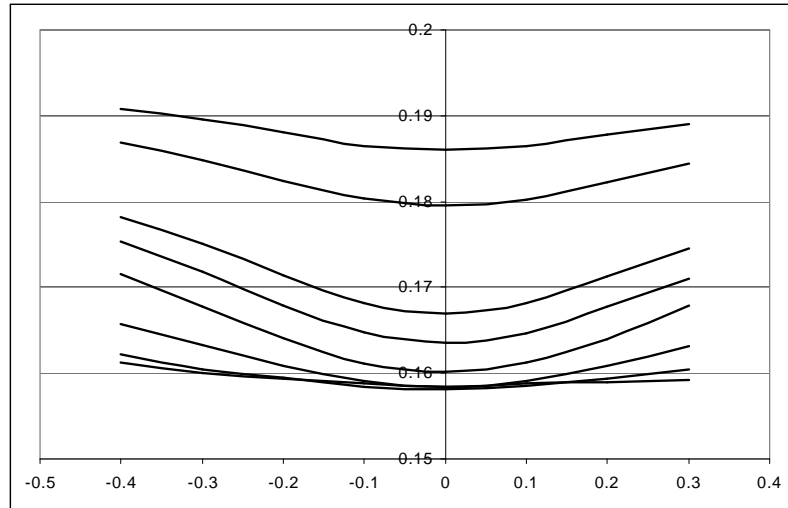
On commence par traiter ce dernier cas, en choisissant $Y_0 = 0.1$. Dans ce cas, $f(Y)$ commence par valoir σ_+ . Si la force de rappel α est petite devant $\frac{1}{T}$,

les trajectoires $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ ont de bonnes chances de rester dans les positifs et on s'attend à voir un smile qui s'applatit sur σ_+ quand $\alpha \rightarrow 0^+$. En revanche, si α est grand devant $\frac{1}{T}$, les trajectoires $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ perdent la mémoire de la condition initiale et, quand $\alpha \rightarrow +\infty$, pour tout t , la loi de Y_t tend vers la loi normale centrée autour de 0 et de variance ν^2 . Au vu de la théorie ergodique détaillée plus haut, on s'attend donc à voir dans cette limite un smile qui s'applatit sur

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{\sigma_-^2 + \sigma_+^2}{2}} < \sigma_+.$$

On vérifie ces prédictions sur le graphe ci-dessous, construit pour les valeurs suivantes des paramètres :

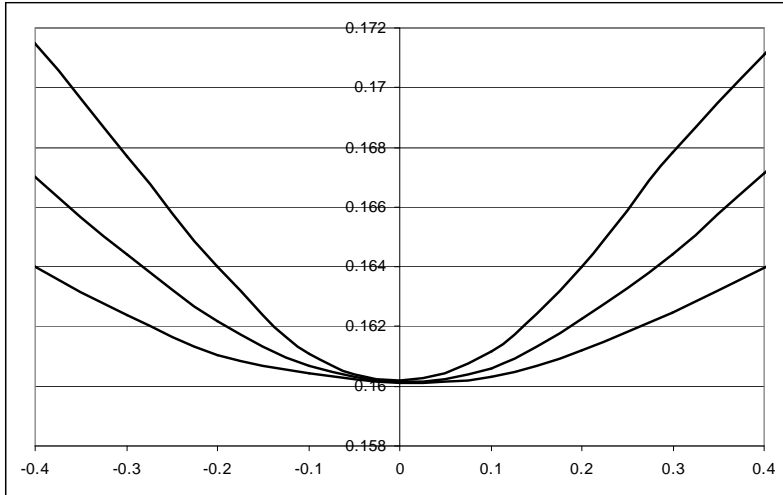
N	250 000
x	1
r	0
$f(y)$	$\sigma_- \mathbf{1}_{\{y \leq 0\}} + \sigma_+ \mathbf{1}_{\{y > 0\}}$
σ_+	0.2
σ_-	0.1
Y_0	0.1
ν	0.5
ρ	0
T	1



De bas en haut : $\alpha = 20, 10, 5, 2, 1, 0.5, 0.1, 0.05$

De nouveau il existe une valeur critique α_c pour laquelle la courbure à la monnaie est maximale.

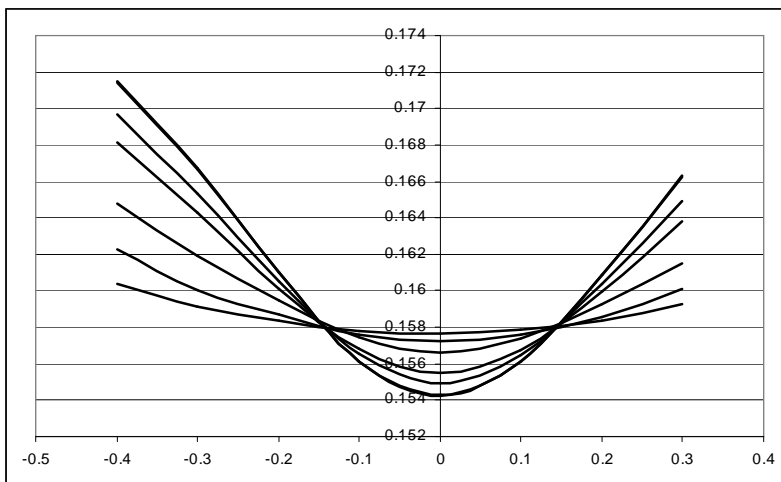
On fait maintenant varier α et T de sorte que αT reste égal à 2 :



$\alpha T = 2$; de bas en haut : $T = 4, 2, 1$

La volatilité implicite à la monnaie semble un invariant de αT .

Dans le cas où $Y_0 = 0$, même pour des α très petits, les trajectoires $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ quittent l'état 0, soit par le haut, soit par le bas, ni σ_+ ni σ_- n'est privilégiée ; il n'y a donc aucune raison pour que le smile s'applatisse quand $\alpha \rightarrow 0^+$. Au contraire, plus α est petit, plus les trajectoires qui commencent par grimper dans les $y > 0$ vont avoir tendance à y rester, de même pour celles qui commencent par descendre dans les $y < 0$. Ce phénomène a tendance à accroître l'écart de la loi de X_T à une log-normale, même si la variance de Y_t est de plus en plus petite. On observe bien ceci sur le graphe suivant :



A la monnaie, de bas en haut : $\alpha = 0.05, 0.1, 1, 2, 5, 10, 20$; les deux courbes pour $\alpha = 0.05$ et $\alpha = 0.1$ sont presque confondues.

On semble avoir atteint le smile limite quand $\alpha \rightarrow 0^+$ puisque les deux smiles générés pour les valeurs $\alpha = 0.1$ et $\alpha = 0.05$ sont confondus ; ce sont ceux qui ont la plus grande courbure ; on peut dire ici que $\alpha_c = 0^+$.

7 Perspectives

La vraie grande question en suspend est celle de la calibration du modèle. C'est certainement un problème mathématique délicat. Nous avons montré comment calibrer le modèle dans le cas où α est grand - à travers les trois paramètres $\bar{\sigma}, V_2$ et V_3 . Mais bien souvent les smiles empiriques invalident cette hypothèse sur α . Il faut donc, après avoir supposé $\Lambda = 0$ par exemple, trouver les valeurs de $\alpha, m, \nu, \rho, Y_0$ et la fonction f qui permettent, une fois entrés dans le code informatique, de retrouver - d'approcher en fait - le smile empirique observé aujourd'hui. On pourra en fait fixer ν et f - donc m - et chercher les trois paramètres α, ρ et Y_0 qui permettent d'approcher au mieux - en un sens à définir - le smile lu aujourd'hui.

Par ailleurs, des propriétés du modèle restent mal comprises ; notamment, Joe et moi n'expliquons pas que la volatilité implicite en dehors de la monnaie

tende vers plus l'infini quand la maturité tend vers 0 (c'est ce que montrent les simulations). Nous n'avons pas non plus su démontrer que la volatilité implicite à la monnaie ne dépend de α et T que *via* le produit αT .

Il reste aussi à jouer avec les schémas aux différences finies que nous avons implementés, mais pas encore testés.

Enfin, d'un point de vue théorique, on peut s'intéresser au terme d'ordre 2 dans le développement en $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ du prix du call et de la volatilité implicite correspondante, et en particulier à sa dépendance en (T, K) .

Références

- [1] J.-P. FOUQUE, G. PAPANICOLAOU, K.R. SIRCAR, *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*, Cambridge University Press, 2000.
- [2] F. BLACK, M. SCHOLES, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, 81 : 635-654, 1973.
- [3] B. DUPIRE, *Arbitrage Pricing with Stochastic Volatility*, preprint, 1993.
- [4] D. REVUZ, M. YOR, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer, 1994.
- [5] D. TALAY, L. TUBARO, *Probabilistic Numerical Methods for Partial Differential Equations : Elements of Analysis*, publié dans Probabilistic Models for Nonlinear Partial Differential Equations, Lectures Notes in Mathematics 1627, 1996.
- [6] O. FAURE, *Simulation du mouvement brownien et des diffusions*, Thèse de doctorat, 1992.
- [7] J. NEVEU, N. EL KAROUI, *Introduction aux probabilités*, Cours de l'Ecole polytechnique, 1998.
- [8] H. REGNIER, *Interprétation probabiliste des EDP linéaires paraboliques et applications à la finance*, Cours du DEA de probabilités et finances de l'Université Paris VI, 2001-2002.
- [9] D. LAMBERTON, B. LAPEYRE, *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Ellipses.
- [10] B. OKSENDAL, *Stochastic Differential Equations*, Springer.
- [11] S. DURRETT, *Brownian Motion and Martingales in Analysis*, 1984.