(D1) $\exists V : E \to \mathbb{R}_+$ mes, $\exists \gamma \in [0,1[$, $\exists K < +\infty$ tq

$$\forall x \in E, \quad PV(x) \leq \gamma V(x) + K$$

(D2') $\exists R > \frac{4K}{(1-\sqrt{\gamma})^2}$, $\exists \alpha \in]0,1]$, $\forall x, y \in E$ tq $V(x) + V(y) \leq R$,

$$P(x,\cdot) \wedge P(y,\cdot) \; (E) \geq \alpha \quad \Leftrightarrow \quad d_{TV}(P(x,\cdot), P(y,\cdot)) \leq 1-\alpha.$$

__Thm__ : Soit $(X_n)_n$ chaîne de Markov dont le noyau P satisfait (D1) et (D2'). Alors pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable tq $\sup_{x \in E} \frac{|f(x)|}{1+\sqrt{V(x)}} < +\infty$ et toute loi $\mu \in \mathcal{P}(E)$ de X_0, on a

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} f(X_\ell) - \pi(f)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_1(0, \sigma^2(f)) \quad \text{où } \sigma^2(f) = \pi(F^2 - (PF)^2)$$

avec $F - PF = f - \pi(f)$.

<u>NB:</u> $\sigma^2(f) = \pi\left((F - PF)(F - PF + 2PF)\right) = \pi\left((f - \pi(f))(f - \pi(f) + 2PF)\right)$

$$= \mathrm{Var}_\pi(f) + 2\,\pi\Big((f - \pi(f)) \sum_{k \geq 1} P^k (f - \pi(f))\Big)$$

$$= \mathrm{Var}_\pi(f) + 2 \sum_{k \geq 1} \underbrace{\mathbb{E}_\pi\Big((f(X_0) - \pi(f))(f(X_k) - \pi(f))\Big)}_{\mathrm{Cov}_\pi(f(X_0), f(X_k))}.$$

$$\mathrm{Var}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (f(X_k) - \pi(f))\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Var}(f(X_k)) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \mathrm{Var}_\pi(f)$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{\substack{k,l=0 \\ k \neq l}}^{n-1} \mathrm{Cov}(f(X_k), f(X_l))}_{\frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \underbrace{\sum_{l=k+1}^{n-1} \mathrm{Cov}(f(X_k), f(X_l))}_{\sum_{l=1}^{n-1-k} \mathrm{Cov}(f(X_k), f(X_{k+l}))}}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \overbrace{\mathrm{Var}(f(X_k))}^{\xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{Var}_\pi(f)} + 2 \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1-l} \underbrace{\mathrm{Cov}(f(X_k), f(X_{k+l}))}_{\xrightarrow[k \to +\infty]{} \mathrm{Cov}_\pi(f(X_0), f(X_l))}$$

preuve : étape 1 Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée et

$$\xi_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(f(X_\ell) - \pi(f) \right)$$

réduction à $\mu = \delta_x$

$$\mathbb{E}_\mu(\varphi(\xi_n)) = \int_E \mathbb{E}_x(\varphi(\xi_n)) \, \mu(dx)$$

Par CVD il suffit de montrer le résultat pour $\mu = \delta_x$ $\forall x \in E$.

étape 2 : On suppose F bornée par $m < +\infty$.

$$\xi_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(F(X_\ell) - PF(X_\ell) \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\ell=1}^{n-1} \left(F(X_\ell) - PF(X_{\ell-1}) \right) + \frac{F(X_0) - PF(X_{n-1})}{\sqrt{n}}$$

$|PF| \leq P|F| \leq m$. Donc $\left| \frac{F(X_0) - PF(X_{n-1})}{\sqrt{n}} \right| \leq \frac{2m}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Par Slutsky, il suffit de

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(F(X_\ell) - PF(X_\ell) \right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_1(0, \sigma^2(f))$$

sous $\mathbb{P}_x$.

Soit $u \in \mathbb{R}$.

On pose $a_\ell^n = \mathbb{E}_x\left(e^{\frac{iu}{\sqrt{n}}(F(X_\ell)-PF(X_{\ell-1}))} \mid \mathcal{F}_{\ell-1}\right)$ pour $1 \leq \ell \leq n-1$.

$$\left|e^{\frac{iu}{\sqrt{n}}(F(X_\ell)-PF(X_{\ell-1}))} - 1 - \frac{iu}{\sqrt{n}}(F(X_\ell)-PF(X_{\ell-1})) + \frac{u^2}{2n}(F(X_\ell)-PF(X_{\ell-1}))^2\right| \leq \frac{|u|^3}{6n^{3/2}} \times (2m)^3 = \frac{4|u|^3 m^3}{3n^{3/2}}$$

$$\left|a_\ell^n - 1 + \frac{u^2}{2n}\overbrace{\mathbb{E}_x\left((F(X_\ell)-PF(X_{\ell-1}))^2 \mid \mathcal{F}_{\ell-1}\right)}^{PF^2(X_{\ell-1}) - (PF)^2(X_{\ell-1})}\right|$$

$$\mathbb{E}_x(\cdot \mid \mathcal{F}_{\ell-1}) = 0$$

$$= \left|\mathbb{E}_x\left(e^{\frac{iu}{\sqrt{n}}(F(X_\ell)-PF(X_{\ell-1}))} - 1 - \frac{iu}{\sqrt{n}}(F(X_\ell)-PF(X_{\ell-1})) + \frac{u^2}{2n}(F(X_\ell)-PF(X_{\ell-1}))^2 \mid \mathcal{F}_{\ell-1}\right)\right|$$

$$\leq \mathbb{E}_x\left(\left| \qquad \right| \mid \mathcal{F}_{\ell-1}\right) \leq \frac{4|u|^3 m^3}{3n^{3/2}}$$

En particulier $|a_\ell^n| \geq 1 - \frac{C}{n}$ où $C < +\infty$.

Pour $n > C$, $\prod_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{|a_\ell^n|} \leq \left(1 - \frac{C}{n}\right)^{-(n-1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^C$.

$$\mathbb{E}_x\left(\frac{e^{\frac{iu}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n-1}(F(X_j)-PF(X_{j-1}))}}{\prod_{\ell=1}^{n-1} a_\ell^n} \right) = \mathbb{E}_x\left(\underbrace{\frac{e^{\frac{iu}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n-2}(F(X_j)-PF(X_{j-1}))}}{\prod_{\ell=1}^{n-1} a_\ell^n}}_{\mathcal{F}_{n-2}\text{ mes}} \underbrace{\mathbb{E}_x\left(e^{\frac{iu}{\sqrt{n}}F(X_{n-1})-PF(X_{n-2})} \middle| \mathcal{F}_{n-2}\right)}_{a_{n-1}^n} \right)$$

$\prod_{\ell=1}^{n-1} a_\ell^n$: $\mathcal{F}_{n-2}$ mes

$$= \mathbb{E}_x\left(\frac{e^{\frac{iu}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n-2}(F(X_j)-PF(X_{j-1}))}}{\prod_{\ell=1}^{n-2} a_\ell^n} \right) \underset{\text{~~en~~ itérant}}{=} 1$$

Donc

$$\mathbb{E}_x\left(e^{\frac{iu}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n-1}(F(X_j)-PF(X_{j-1}))} \right) - e^{-\frac{u^2\sigma^2(f)}{2}}$$

$$= \mathbb{E}_x\left(e^{\frac{iu}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n-1}(F(X_j)-PF(X_{j-1}))} \left(1 - \frac{e^{-\frac{u^2\sigma^2(f)}{2}}}{\prod_{\ell=1}^{n-1} a_\ell^n}\right)\right)$$

$$\left| \mathbb{E}_x\left(e^{\frac{iu}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n-1}(F(X_j)-PF(X_{j-1}))} \right) - e^{-\frac{u^2\sigma^2(f)}{2}} \right|$$

$$\leq \mathbb{E}_x\left| 1 - \frac{e^{-\frac{u^2\sigma^2(f)}{2}}}{\prod_{\ell=1}^{n-1} a_\ell^n} \right| \leq \mathbb{E}_x\left(\frac{\left|\prod_{\ell=1}^{n-1} a_\ell^n - e^{-\frac{u^2\sigma^2(f)}{2}}\right|}{\left|\prod_{\ell=1}^{n-1} a_\ell^n\right|} \right)$$

$|\prod_{\ell=1}^{n-1} a_\ell^n| \geq \left(1-\frac{C}{n}\right)^n$ si $n>C$

$$\leq \left(1-\frac{C}{n}\right)^{-n} \mathbb{E}_x\left(\left|\prod_{\ell=1}^{n-1} a_\ell^n - e^{-\frac{u^2\sigma^2(f)}{2}}\right| \right)$$

Soit $b_\ell^n = e^{-\frac{u^2}{2n}\left(PF^2(X_{\ell-1})-(PF)^2(X_{\ell-1})\right)}$ pour $1 \leq \ell \leq n-1$

$$\mathbb{E}_x\left|\prod_{\ell=1}^{n-1} a_\ell^n - e^{-\frac{u^2\sigma^2(f)}{2}}\right| \leq \mathbb{E}_x\left|\prod_{\ell=1}^{n-1} a_\ell^n - \prod_{\ell=1}^{n-1} b_\ell^n\right| + \mathbb{E}_x\left|e^{-\frac{u^2}{2n}\sum_{\ell=1}^{n-1}\left(PF^2(X_{\ell-1})-(PF)^2(X_{\ell-1})\right)} - e^{-\frac{u^2\sigma^2(f)}{2}}\right|$$

LFGN ergodique $\Rightarrow$ $\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n-1}\left(PF^2(X_{\ell-1}) - (PF)^2(X_{\ell-1})\right)$

$$= \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(PF^2(X_j) - (PF)^2(X_j)\right)}_{\xrightarrow[p\text{-}s.]{LFGN} \pi\left(PF^2 - (PF)^2\right) = \sigma^2(f)} + \underbrace{\frac{1}{n}\left((PF)^2(X_{n-1}) - PF^2(X_{n-1})\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

comme F borné

Par CVD, on en déduit que $\mathbb{E}_x\left|e^{-\frac{u^2}{2n}\sum_{\ell=1}^{n-1}\left(PF^2(X_{\ell-1})-(PF)^2(X_{\ell-1})\right)} - e^{-\frac{u^2}{2}\sigma^2(f)}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$\prod_{\ell=1}^{n-1} a_\ell^n - \prod_{\ell=1}^{n-1} b_\ell^n = \sum_{\ell=1}^{n-1}\left(\prod_{j=1}^{\ell-1} a_j^n\right)\left(a_\ell^n - b_\ell^n\right)\left(\prod_{j=\ell+1}^{n-1} b_j^n\right)$$

$$\left|b_\ell^n - 1 + \frac{u^2}{2n}\left(PF^2(X_{\ell-1}) - (PF)^2(X_{\ell-1})\right)\right| \leq \frac{1}{2}\frac{u^4}{4n^2}m^4 = \frac{u^4 m^4}{8n^2}$$

$$\left|a_\ell^n - b_\ell^n\right| \leq \frac{4|u|^3 m^3}{3n^{3/2}} + \frac{u^4 m^4}{8n^2}$$

$$|a_\ell^n| \vee |b_\ell^n| \leq \left(1+\frac{c}{n}\right) \quad \text{avec} \quad c<+\infty$$

$$\mathbb{E}_x \left|\prod_{\ell=1}^{n-1} a_\ell^n - \prod_{\ell=1}^{n-1} b_\ell^n\right| \leq \left(1+\frac{c}{n}\right)^{n-2} \sum_{\ell=1}^{n-1} |a_\ell^n - b_\ell^n|$$

$$\leq e^C (n-1) \times \left(\frac{4|u|^3 m^3}{3\, n^{3/2}} + \frac{u^4 m^4}{8 n^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc $\mathbb{E}_x\left(e^{\frac{iu}{\sqrt{n}}\sum_{\ell=1}^{n-1}(F(X_\ell)-PF(X_{\ell-1}))}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\frac{u^2\sigma^2(f)}{2}}$ et le TLC est établi si F est supposée bornée.

étape 3 : relaxation de l'hypothèse de bornitude de F.

reste $\dfrac{F(X_0)-PF(X_{n-1})}{\sqrt{n}}$ $\qquad \dfrac{F(X_0)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[p.s.]{} 0$

$$\mathbb{E}_x\left(\left(\frac{PF(X_{n-1})}{\sqrt{n}}\right)^2\right) \leq \frac{1}{n}\,\mathbb{E}_x\left(PF^2(X_{n-1})\right)$$

car par Jensen $(PF)^2 \leq PF^2$.

$$\overset{\text{Markov}}{=} \frac{1}{n}\,\mathbb{E}_x\left(F^2(X_n)\right)$$

$$\leq \underbrace{\sup_{y\in E}\frac{F^2(y)}{1+V(y)}}_{<\infty \text{ d'après séance préc}} \;\frac{1}{n}\;\underbrace{\mathbb{E}_x\left(1+V(X_n)\right)}_{\overset{(D1)}{\leq} 1+\gamma^n V(x) + K\underbrace{\sum_{j=0}^{n-1}\gamma^j}_{\leq \frac{1}{1-\gamma}}}.$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc $\frac{PF(X_{n-1})}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}_x} 0$ sous $\mathbb{P}_x$.

Avec Slutsky, il suffit de m.q. $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\ell=1}^{n-1}\left(F(X_\ell)-PF(X_{\ell-1})\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_1(0,\sigma^2(f))$.

On pose $F_m = -m \vee F \wedge m$ et $G_m = F - F_m$

$$M_{n-1}^{F} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(F(X_k) - PF(X_{k-1}) \right) \qquad M_{n-1}^{G_m} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(G_m(X_k) - PG_m(X_{k-1}) \right)$$

$$M_{n-1}^{F_m} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(F_m(X_k) - PF_m(X_{k-1}) \right)$$

On a $M_{n-1}^{F} = M_{n-1}^{F_m} + M_{n-1}^{G_m}$

$$\mathbb{E}_x\left(\left(\frac{M_{n-1}^{G_m}}{\sqrt{n}} \right)^2 \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}_x \left(PG_m^2(X_{k-1}) - (PG_m)^2(X_{k-1}) \right)$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} P^k G_m^2(x).$$

Comme $G_m^2 \leq F^2$, $\sup_{y \in E} \frac{G_m^2(y)}{1+V(y)} < +\infty$, $\lim_{k \to +\infty} P^k G_m^2(x) = \pi(G_m^2)$

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \, \mathbb{E}_x\left(\left(\frac{M_{n-1}^{G_m}}{\sqrt{n}} \right)^2 \right) \leq \pi(G_m^2) \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0 \text{ par CVD.}$$

$$\overline{\lim_{m \to +\infty}} \; \overline{\lim_{n \to +\infty}} \; \mathbb{E}_x\left(\left(\frac{M_{n-1}^{F} - M_{n-1}^{F_m}}{\sqrt{n}} \right)^2 \right) = 0.$$

On sait aussi que $\frac{M^{F_m}}{\sqrt{m}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_1(0, \sigma^2_{F_m})$ d'après étape 2

avec $\sigma^2_{F_m} = \pi\left(F_m^2 - (PF_m)^2\right)$.

$\pi(F_m^2) \xrightarrow[m \to +\infty]{} \pi(F^2)$ par cv monotone ou dominée.

$PF_m(y) \xrightarrow[m \to +\infty]{} PF(y)$ par CVD.

$\pi\left((PF_m)^2\right) \xrightarrow[m \to +\infty]{} \pi\left((PF)^2\right)$ par cvD car $(PF_m)^2 \overset{\text{Jensen}}{\leq} PF_m^2 \leq PF^2$ et $\pi(PF^2) = \pi(F^2) < +\infty$

Ainsi $\sigma^2_{F_m} \xrightarrow[m \to +\infty]{} \sigma^2(f) = \pi\left(F^2 - (PF)^2\right)$.

$$\left| \mathbb{E}_x\left(e^{iu\frac{M^F_{n-1}}{\sqrt{n}}}\right) - e^{-\frac{u^2\sigma^2(f)}{2}} \right|$$

$$\leq \left| \mathbb{E}_x\left(e^{iu\frac{M^F_{n-1}}{\sqrt{n}}}\right) - \mathbb{E}_x\left(e^{iu\frac{M^{F_m}_{n-1}}{\sqrt{n}}}\right) \right| \leq |u| \sqrt{\mathbb{E}\left(\left(\frac{M^{G_m}_{n-1}}{\sqrt{n}}\right)^2\right)}$$

$$+ \left| \mathbb{E}_x\left(e^{iu\frac{M^{F_m}_{n-1}}{\sqrt{n}}}\right) - e^{-\frac{u^2}{2}\sigma^2_{F_m}} \right| \xrightarrow[\substack{n\to+\infty \\ \text{à } m \text{ fixé}}]{} 0 \quad \text{d'après étape 2}$$

$$+ \left| e^{-\frac{u^2}{2}\sigma^2_{F_m}} - e^{-\frac{u^2\sigma^2(f)}{2}} \right| \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$$

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit m_ε assez grd pour que lorsque $u \neq 0$

$$\left| e^{-\frac{u^2}{2}\sigma^2_{F_{m_\varepsilon}}} - e^{-\frac{u^2}{2}\sigma^2(f)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$ et pour que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\left(\frac{M^{G_{m_\varepsilon}}_{n-1}}{\sqrt{n}}\right)^2\right) \leq \frac{\varepsilon^2}{36u^2}$$

$\exists\, n^1_\varepsilon$ tq $\forall\, n \geq n^1_\varepsilon$, $\left| \mathbb{E}_x\left(e^{iu\frac{M^{F_{m_\varepsilon}}_{n-1}}{\sqrt{n}}}\right) - e^{-\frac{u^2}{2}\sigma^2_{F_{m_\varepsilon}}} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

$\exists\, n^2_\varepsilon$ tq $\forall n \geq n^2_\varepsilon$, $\mathbb{E}\left(\left(\frac{M^{G_{m_\varepsilon}}_{n-1}}{\sqrt{n}}\right)^2\right) \leq \frac{\varepsilon^2}{9u^2}$

$$\forall n \geq n^1_\varepsilon \vee n^2_\varepsilon, \quad \left| \mathbb{E}_x\left(e^{iu \frac{M^F_{n-1}}{\sqrt{n}}}\right) - e^{-\frac{u^2\sigma^2(f)}{2}} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

$\boxtimes$

VI Comparaison des variances asymptotiques :

P_0 et P_1 2 noyaux markoviens

Prop : Supposons que π est reversible pour P_0 et P_1 et que $\pi(g(P_1-P_0)g) \geq 0$ pour toute fonction $g : E \to \mathbb{R}$ mes tq $\pi(g^2) < +\infty$. Supposons également

$\exists\, V : E \to \mathbb{R}_+$ mes, $\exists K < +\infty$, $\exists \gamma \in [0,1[$, $\forall x \in E$
$$P_0V(x) \vee P_1V(x) \leq \gamma V(x) + K$$

$\exists R > \frac{4K}{(1-\sqrt{\gamma})^2}$, $\exists \alpha \in]0,1]$, $\forall x, y \in E$ tq $V(x)+V(y) \leq R$
$$\left(P_0(x,\cdot) \wedge P_0(y,\cdot)\,(E)\right) \wedge \left(P_1(x,\cdot) \wedge P_1(y,\cdot)\,(E)\right) \geq \alpha.$$

Alors $\sigma_0^2(f) \leq \sigma_1^2(f)$ pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$ mes tq $\sup_{x \in E} \frac{f^2(x)}{1+V(x)} < +\infty$

NB : Si Π invariante par P et $\Pi(g^2) < +\infty$.

$$(\Pi(|g\,Pg|))^2 \overset{CS}{\leq} \Pi(g^2)\,\Pi((Pg)^2) \overset{\text{Jensen}}{\leq} \Pi(g^2)\,\Pi(Pg^2) = (\Pi(g^2))^2 < +\infty$$

En particulier sous les hyp de la proposition,

$$\Pi(|g\,(P_1-P_0)g|) \leq \Pi(|g\,P_1 g| + |g\,P_0 g|) < +\infty.$$

Lemme : Soit P_0 et P_1 2 noyaux admettant Π comme proba invariante. On suppose $\forall x \in E, \forall A \in \mathcal{E}$ tq $x \notin A$
$$P_0(x, A) \geq P_1(x, A)$$

Alors $\Pi(g\,(P_1-P_0)g) \geq 0 \quad \forall g$ tq $\Pi(g^2) < \infty$.

Sous l'hypothèse du lemme P_0 favorise les transitions hors de l'état courant par rapport à P_1

Preuve du lemme :

On pose $P(x, dy) = \delta_x(dy) + P_0(x, dy) - P_1(x, dy)$

Pour $A \in \mathcal{E}$, $P(x, A) = \begin{cases} 1 + P_0(x, A) - P_1(x, A) \geq P_0(x, A) & \text{si } x \in A \\ P_0(x, A) - P_1(x, A) \underset{\text{hyp}}{\geq} 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$

Ainsi $P(x, A) \geq 0$.

$P(x, E) = 1 + 1 - 1 = 1$

Ainsi P est un noyau markovien qui laisse π invariante car $\delta_x(dy)$, $P_0(x, dy)$, $P_1(x, dy)$ la laissent invariante.

$P_1(x, dy) - P_0(x, dy) = \delta_x(dx) - P(x, dx)$

$$\pi(g(P_1 - P_0)g) = \pi(g^2 - gPg)$$

$$= \frac{1}{2}\pi(g^2 + Pg^2 - 2gPg) = \frac{1}{2}\int_{E^2} \underbrace{(g^2(x) + g^2(y) - 2g(x)g(y))}_{(g(x) - g(y))^2} P(x, dy)\,\pi(dx) \geq 0$$

invariance de π par P

$\square$

NB : retour sur Metropolis Hastings

$$\pi(dx) = \frac{\eta(x)\lambda(dx)}{\int_E \eta(y)\lambda(dy)} \quad \text{avec } \eta : E \to \mathbb{R}_+ \text{ mes tq } \int_E \eta(y)\lambda(dy) \in]0,+\infty[$$

noyau de proposition $q(x,y)\lambda(dy)$.

$$P_0(x,dy) = \alpha_0(x,y)\,q(x,y)\,\lambda(dy) + R_0(x)\,\delta_x(dy)$$

où $\alpha_0(x,y) = \begin{cases} 1 \wedge \frac{\eta(y)q(y,x)}{\eta(x)q(x,y)} & \text{si } \eta(x)q(x,y) > 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

et $R_0(x) = \int_{y\in E} (1-\alpha_0(x,y))\,q(x,y)\,\lambda(dy)$

π est reversible pour P_0.

autre choix possible $P_1(x,dy) = \alpha_1(x,y)\,q(x,y)\lambda(dy) + R_1(x)\delta_x(dy)$

avec $\alpha_1(x,y) = \begin{cases} a\left(\frac{\eta(y)q(y,x)}{\eta(x)q(x,y)}\right) & \text{si } \eta(x)q(x,y) > 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

et $a : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$

tq $\forall u > 0$ $a(u) = u\,a\left(\frac{1}{u}\right)$

$R_1(x) = \int_E (1-\alpha_1(x,y))\,q(x,y)\,\lambda(dy)$,

π reversible aussi pour P_1.

Metropolis Hastings correspond à $\alpha(u) = 1 \wedge u$.

Comme α à valeurs dans $[0,1]$ et vérifie $\alpha(u) = u\,\alpha(\frac{1}{u})$ pour $u > 0$

la fonction α est toujours majorée par $1 \wedge u$.

Donc $\alpha_1(x,y) \leq \alpha_0(x,y)$.

Pour $A \in \mathcal{E}$ tq $x \notin A$

$$P_0(x, A) = \int_A \alpha_0(x,y)\, q(x,y)\, \lambda(dy) \geq \int_A \alpha_1(x,y)\, q(x,y)\, \lambda(dy)$$
$$= P_1(x, A).$$

D'après le lemme $\pi(g\,(P_1 - P_0)\,g) \geq 0$ pour g mes tq $\pi(g^2) < +\infty$

et sous les conditions (D1) et (D2') de la proposition, on

en déduit que $\sigma_0^2(f) \leq \sigma_1^2(f)$ pour $f : E \to \mathbb{R}$ mes tq $\sup_{x \in E} \frac{f^2(x)}{1 + V(x)} < +\infty$

preuve de la proposition :

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ mes tq $\sup_{x \in E} \frac{f^2(x)}{1+V(x)} < +\infty$.

Comme les variances asympt sont les mêmes pour f et $f - \pi(f)$

on suppose sans restriction que $\pi(f) = 0$.

Pour $t \in [0,1]$ on pose $P_t = (1-t) P_0 + t P_1$

$$P_t V = (1-t) P_0 V + t P_1 V \leq \gamma V + K$$

$$P_t(x,\cdot) \wedge P_t(y,\cdot) \, (E) \geq (1-t) \, P_0(x,\cdot) \wedge P_0(y,\cdot) \, (E) + t \, P_1(x,\cdot) \wedge P_1(y,\cdot)(E)$$

$$\geq \alpha \quad \text{si} \quad V(x) + V(y) \leq R.$$

(D1) et (D2′) sont vérifiées par P_t avec V, α, K, R unif en $t \in [0,1]$.

Comme π est réversible pour P_1 et P_0, π est réversible pour P_t

et c'est l'unique proba invariante pour P_t.

On a le TLC avec variance asympt

$$\sigma_t^2(f) = \pi\left(F_t^2 - (P_t F_t)^2\right) \quad \text{sous } P_t \text{ où}$$

$$F_t = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} P_t^\ell f \quad \text{solution de l'équation de Poisson}$$

$$F_t - P_t F_t = f$$

On va montrer que $\frac{d}{dt}\sigma_t^2(f) \geq 0$. $\left(\Rightarrow \sigma_1^2(f) \geq \sigma_0^2(f)\right)$.

$$\| $$

$$2\pi\left(F_t (P_1 - P_0) F_t\right) \geq 0 \quad \text{par hyp.}$$

D'après la preuve du thm qui donne la cv de μP^n vers l'unique proba invariante π sous (D1) et (D2)

pour $\beta = \frac{\alpha}{2\sqrt{K}}$ il existe $\chi \in]0,1[$ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t_1, \dots, t_n \in [0,1]$

$$\sup_{x \in E} \frac{|P_{t_1} P_{t_2} \cdots P_{t_n} f(x)|}{1 + \sqrt{V(x)}} \leq \chi^n \underbrace{\max\left(2 + \frac{\beta\sqrt{K}}{1-\sqrt{\gamma}}, \beta\right) \sup_{x \in E} \frac{|f(x)|}{1 + \beta\sqrt{V(x)}}}_{\text{notée } C} \quad (*)$$

$t \to P_t^n f(x) = ((1-t)P_0 + tP_1)^n f(x)$ est un polynôme de degré n. C'est donc une fonction C^∞.

Soit $t \in [0,1]$ et $h \neq 0$ tq $t+h \in [0,1]$.

$$\frac{1}{h}\left(P_{t+h}^n f(x) - P_t^n f(x)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} P_{t+h}^k \underbrace{\frac{1}{h}\left(P_{t+h} - P_t\right)}_{= P_1 - P_0} P_t^{n-1-k} f(x)$$

$$\xrightarrow[h \to 0]{} \sum_{k=0}^{n-1} P_t^k (P_1 - P_0) P_t^{n-1-k} f(x) = \frac{d}{dt} P_t^n f(x)$$

$$\sup_{\substack{y \in E \\ t \in [0,1]}} \frac{\left|\frac{d}{dt} P_t^n f(y)\right|}{1 + \sqrt{V(y)}} \overset{(*)}{\leq} 2C\, X^n n$$

On en déduit que $\frac{d}{dt} F_t = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{d}{dt} P_t^n f$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{\ell=0}^{n-1} P_t^\ell (P_1 - P_0) P_t^{n-1-\ell} f.$$

$$\sigma_t^2(f) = \pi\left(F_t^2 - (P_t F_t)^2\right) = \pi\Big(\underbrace{(F_t - P_t F_t)}_{f}\ \underbrace{(F_t + P_t F_t)}_{\substack{2F_t + P_t F_t - F_t \\ \| \\ 2F_t - f}}\Big)$$

$$\frac{d}{dt} \sigma_t^2(f) = 2\pi\left(f \frac{d}{dt} F_t\right).$$

$$= 2\pi\left((F_t - P_t F_t) \frac{d}{dt} F_t\right)$$

$$\pi\left(P_t F_t \frac{d}{dt} F_t\right) = \int_{E^2} F_t(y) \frac{d}{dt} F_t(x) \underbrace{P_t(x, dy)\, \pi(dx)}_{\overset{\text{rev}}{=} P_t(y, dx)\, \pi(dy)}$$

$$= \pi\left(F_t\ P_t \frac{d}{dt} F_t\right)$$

$$F_t - P_t F_t = f \qquad \frac{d}{dt} P_t$$

$$\frac{d}{dt} \sigma_t^2(f) = 2\pi\left(F_t\left(\frac{d}{dt} F_t - P_t \frac{d}{dt} F_t\right)\right)$$

$$= 2\pi\left(F_t (P_1 - P_0) F_t\right) \geq 0$$

Formellement

$$\frac{d}{dt} F_t - P_t \frac{d F_t}{dt} - (P_1 - P_0) F_t = 0$$

Rendons le calcul rigoureux.

$$\frac{dF_t}{du} - P_t \frac{dF_t}{du} \quad \text{avec} \quad \frac{dF_t}{du} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sum_{\ell=0}^{n-1} P_t^{\ell} (P_1 - P_0) P_t^{n-1-\ell} f$$

$$P_t \frac{dF_t}{du} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sum_{\ell=0}^{n-1} P_t^{\ell+1} (P_1 - P_0) P_t^{n-1-\ell} f$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sum_{j=1}^{n} P_t^{j} (P_1 - P_0) P_t^{n-j} f$$

$$= \sum_{n\geq 2} \sum_{j=0}^{n-1} P_t^{j} (P_1 - P_0) P_t^{n-1-j} f - \sum_{n\geq 2} (P_1 - P_0) P_t^{n-1} f$$

$$\frac{dF_t}{du} - P_t \frac{dF_t}{du} = (P_1 - P_0) f + \sum_{n\geq 2} (P_1 - P_0) P_t^{n-1} f$$

$$= (P_1 - P_0) \sum_{n\in\mathbb{N}} P_t f = (P_1 - P_0) F_t$$