Rappels :

Pour $\mu, \sigma \in \mathcal{P}(E)$ espace des probas sur $(E, \mathcal{E})$

on note $d_{TV}(\mu, \sigma) = \sup_{A \in \mathcal{E}} |\mu(A) - \sigma(A)| = 1 - \mu \wedge \sigma(E)$

$$= \sup_{|\varphi| \leq \frac{1}{2}} |\mu(\varphi) - \sigma(\varphi)| = \frac{1}{2} \int_E \left| \frac{d\mu}{d\lambda}(x) - \frac{d\sigma}{d\lambda}(x) \right| \lambda(dx)$$

si $\mu, \sigma \ll \lambda$

P noyau de Markov : $E \times \mathcal{E} \to [0,1]$ tq

$\forall x \in E$, $\mathcal{E} \ni A \to P(x, A)$ proba sur E

$\forall A \in \mathcal{E}$, $x \to P(x, A)$ est mesurable

<u>Doeblin</u> : $\exists \alpha > 0$ tq $\forall x, y \in E$, $P(x, \cdot) \wedge P(y, \cdot)(E) \geq \alpha$

$\Leftrightarrow d_{TV}(P(x, \cdot), P(y, \cdot)) \leq 1 - \alpha$

Sous Doeblin P admet une unique proba invariante $\pi \in \mathcal{P}(E)$ et $\forall \mu \in \mathcal{P}(E)$, $d_{TV}(\underset{\sim}{\mu P^n}, \pi) \leq (1-\alpha)^n \underbrace{d_{TV}(\mu, \pi)}_{\leq 1}$

loi à l'instant n de la chaîne de noyau P partie de $X_0 \sim \mu$

| Doeblin pour une itérée P^m de $P \Leftrightarrow \exists \pi \in \mathcal{P}(E)$,
| $\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in E} d_{TV}(P^n(x, \cdot), \pi) = 0$ (ergodicité uniforme).

<u>NB</u>: | $\forall P$ noyau, $d_{TV}(\mu P, \sigma P) \leq d_{TV}(\mu, \sigma)$

<u>Recuit simulé</u>: $V : E \to \mathbb{R}$ mes tq

$v_* = \inf\{v \in \mathbb{R}, \lambda(\{x : V(x) \leq v\}) > 0\} > -\infty$ (ess inf$_\lambda$ V)

Pour $\beta \geq 0$, on pose $\hat{Z}_\beta = \int_E e^{-\beta(V(x) - v_*)} \lambda(dx)$. $\searrow$ en β

On suppose $\mathcal{B} = \{\beta \geq 0 : \hat{Z}_\beta < +\infty\} \neq \emptyset$. Alors $\mathcal{B} = [\underline{\beta}, +\infty[$ ou $]\underline{\beta}, +\infty[$ avec $\underline{\beta} \geq 0$.

Pour $\beta \in \mathcal{B}$, on pose $\pi_\beta = \dfrac{e^{-\beta(V(x) - v_*)}}{\hat{Z}_\beta} \lambda(dx)$

<u>Lemme</u> : $\forall \varepsilon > 0, \lim_{\beta \to +\infty} \pi_\beta(\{x : V(x) \geq v_* + \varepsilon\}) = 0$

On note $\bar{v} = \sup\{v \in \mathbb{R}, \lambda(\{x : V(x) \geq v\}) > 0\}$

ess sup$_\lambda$ V

Si $\bar{v} < \infty$, $\hat{Z}_\beta \geq e^{-\beta(\bar{v} - v_*)} \lambda(E)$

et donc pour $\beta \in \mathcal{B}$, $\lambda(E) < +\infty$ et donc $\mathcal{B} = \mathbb{R}_+$.

<u>Lemme</u> : On suppose que $\bar{v} < +\infty$ Alors $\forall \beta, \tilde{\beta} \in \mathbb{R}_+$

$d_{TV}(\pi_\beta, \pi_{\tilde{\beta}}) \leq |\beta - \tilde{\beta}|(\bar{v} - v_*)$

preuve : Supposons $\tilde{\beta} \geq \beta$. Alors $\hat{Z}_{\tilde{\beta}} \leq \hat{Z}_\beta$.

$$2\, d_{TV}(\pi_\beta, \pi_{\tilde{\beta}}) = \int_E \left| \frac{e^{-\beta(V(x)-v_*)}}{\hat{Z}_\beta} - \frac{e^{-\tilde{\beta}(V(x)-v_*)}}{\hat{Z}_{\tilde{\beta}}} \right| \lambda(dx)$$

$$\leq \int_E e^{-\tilde{\beta}(V(x)-v_*)} \left(\frac{1}{\hat{Z}_{\tilde{\beta}}} - \frac{1}{\hat{Z}_\beta} \right) \lambda(dx) + \frac{1}{\hat{Z}_\beta} \int \left(e^{-\beta(V(x)-x_*)} - e^{-\tilde{\beta}(V(x)-v_*)} \right) \lambda(dx)$$

$$= 1 - \frac{\hat{Z}_{\tilde{\beta}}}{\hat{Z}_\beta} + 1 - \frac{\hat{Z}_{\tilde{\beta}}}{\hat{Z}_\beta}$$

Donc $d_{TV}(\pi_\beta, \pi_{\tilde{\beta}}) \leq 1 - \frac{\hat{Z}_{\tilde{\beta}}}{\hat{Z}_\beta}$

$$\hat{Z}_\beta - \hat{Z}_{\tilde{\beta}} = \int_E \left(1 - e^{-(\tilde{\beta}-\beta)(V(x)-v_*)} \right) e^{-\beta(V(x)-v_*)} \lambda(dx).$$

Or $\forall y \geq 0 \quad 1 - e^{-y} \leq y$.

$$\leq \int_E (\tilde{\beta}-\beta) \underbrace{(V(x)-v_*)}_{\leq \bar{v}} e^{-\beta(V(x)-v_*)} \lambda(dx) \text{ p.p.}$$

$$\leq (\tilde{\beta}-\beta)(\bar{v}-v_*) \hat{Z}_\beta$$

Donc $1 - \frac{\hat{Z}_{\tilde{\beta}}}{\hat{Z}_\beta} \leq (\tilde{\beta}-\beta)(\bar{v}-v_*)$ ∎

On suppose que la densité de proposition q est symétrique :
$\forall\, x, y \in E,\quad q(x,y) = q(y,x)$.

noyau de Metropolis Hastings pour simuler $\sim \pi_\beta$ $(\beta \in B)$

$$P_\beta(x, dy) = e^{-\beta(V(y)-V(x))^+} q(x,y)\lambda(dy) + R_\beta(x)\,\delta_x(dy)$$

avec $R_\beta(x) = \int_E \left(1 - e^{-\beta(V(y)-V(x))^+}\right)\lambda(dy)$

<u>Proposition</u> : On suppose $\bar{v} < +\infty$. Alors

$K := \sup\left\{v : \int_{E\times E} \mathbb{1}_{\{(V(y)-V(x))^+ \geq v\}}\,\lambda(dx)\lambda(dy) > 0\right\} < \bar{v} - v_*$

On suppose également l'existence de $m \in \mathbb{N}^*$ tq $Q(x,dy) = q(x,y)\,\lambda(dy)$ satisfait Doeblin pour $\alpha > 0$.

Soit $(\beta_n = h \ln n)_{n \geq 1}$. Alors pour tout $h \in \left]0, \frac{1}{mK}\right[$, et toute $\mu_0 \in \mathcal{P}(E)$, la suite $\mu_n = \mu_0 P_{\beta_1} \cdots P_{\beta_n}$ vérifie

$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to+\infty} \mu_n(\{x : V(x) \geq v_* + \varepsilon\}) = 0$

NB : Si $(X_n)_{n\geq 0}$ chaîne de Markov inhomogène tq $X_0 \sim \mu_0$

et $\mathbb{P}(X_{n+1} \in A \mid \mathcal{F}_n) = P_{\beta_{n+1}}(X_n, A)$ alors la loi de X_n est μ_n et $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(V(X_n) \geq v_* + \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$\beta_1 = h \ln 1 = 0 \qquad P_{\beta_1} = Q.$

$$\mu_1(dy) = \int_{x \in E} q(x,y)\lambda(dy)\mu_0(dx)$$

μ_1 admet la densité $\int_{x \in E} q(x,y)\mu_0(dx) / \lambda$.

Par récurrence on vérifie que $\forall n \geq 2$, μ_n possède la densité f_n/λ donnée par

$$f_n(y) = \int_{x \in E} e^{-\beta_n (V(y)-V(x))^+} q(x,y)\mu_{n-1}(dx) + R_{\beta_n}(y) f_{n-1}(y)$$

$\Rightarrow$ On peut modifier la définition de P_β en

$$P_\beta(x, dy) = e^{-\beta[(V(y)-V(x))^+ \wedge K]} q(x,y)\lambda(dy) + \int \left(1 - e^{-\beta[(V(z)-V(x))^+ \wedge K]}\right) q(x,z)\lambda(dz) \, \delta_x(dy)$$

sans rien changer à $(\mu_n)_{n\geq 1}$

En effet $\lambda\left(\left\{x : \int_E 1_{\{V(y)\geq V(x)+K\}}\, q(x,y)\lambda(dy) > 0\right\}\right) = 0$.

On a modifié $x \to P_\beta(x,\cdot)$ sur un ensemble de mesure λ nulle.

Bien sûr comme $\mu_1(dx) = f_1(x)\lambda(dx)$, on va garder $\forall n \geq 2$, $\mu_n = \mu_1 P_{\beta_2}\cdots P_{\beta_n}$ (recurrence)

Comme $\mu_1 = \mu_0 Q$, la modification n'a pas d'effet sur cette égalité

Ainsi on préserve $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mu_n = \mu_0 P_{\beta_1}\cdots P_{\beta_n}$.

<u>Lemme</u> : Pour tous $\beta_1, \dots, \beta_m \geq 0$ $P_{\beta_1}\cdots P_{\beta_m}$ satisfait

sous hyp Prop | Doeblin pour la constante $\alpha e^{-(\beta_1+\dots+\beta_m)K}$

Preuve : $P_\beta(x, dy) \geq e^{-\beta((V(y)-V(x))^+ \wedge K)} Q(x, dy)$

$\geq e^{-\beta K} Q(x, dy)$

Donc $P_{\beta_1} P_{\beta_2} (x, dy) \geq e^{-(\beta_1+\beta_2)K} Q^2(x, dy)$

et $P_{\beta_1} \cdots P_{\beta_n} (x, dy) \geq e^{-(\beta_1+\cdots+\beta_n)K} Q^n(x, dy)$. ∎

Preuve de la proposition :

On a vu que $d_{TV}(\mu_n, \pi_{\beta_n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Bien sûr pour $A_\varepsilon = \{x : V(x) \geq v_* + \varepsilon\}$ où $\varepsilon > 0$,

$$\mu_n(A_\varepsilon) \leq \underbrace{|\mu_n(A_\varepsilon) - \pi_{\beta_n}(A_\varepsilon)|}_{\leq d_{TV}(\mu_n, \pi_{\beta_n}) \to 0} + \underbrace{\pi_{\beta_n}(A_\varepsilon)}_{\to 0}$$

par le lemme des rappels car $\beta_n = h \ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Pour $\ell \in \{1, \dots, k\}$

$$\Pi_{\beta_{n+\ell}} P_{\beta_{n+\ell}} = \Pi_{\beta_{n+\ell}}$$

$$\left(\Pi_{\beta_{n+\ell}} - \Pi_{\beta_{n+\ell-1}}\right) P_{\beta_{n+\ell}} \cdots P_{\beta_{n+k}} = \Pi_{\beta_{n+\ell}} P_{\beta_{n+\ell+1}} \cdots P_{\beta_{n+k}} - \Pi_{\beta_{n+\ell-1}} P_{\beta_{n+\ell}} \cdots P_{\beta_{n+k}}$$

télescopique

$$\Pi_{\beta_{n+k}} = \sum_{\ell=1}^{k} \left(\Pi_{\beta_{n+\ell}} - \Pi_{\beta_{n+\ell-1}}\right) P_{\beta_{n+\ell}} \cdots P_{\beta_{n+k}} + \Pi_{\beta_n} P_{\beta_{n+1}} \cdots P_{\beta_{n+k}}$$

$$\mu_{n+k} = \mu_n P_{\beta_{n+1}} \cdots P_{\beta_{n+k}}$$

$$d_{TV}\left(\Pi_{n+k}, \mu_{n+k}\right) \leq \sum_{\ell=1}^{k} d_{TV}\left(\Pi_{\beta_{n+\ell}} P_{\beta_{n+\ell}} \cdots P_{\beta_{n+k}}, \Pi_{\beta_{n+\ell-1}} P_{\beta_{n+\ell}} \cdots P_{\beta_{n+k}}\right)$$

$$+ d_{TV}\left(\Pi_{\beta_n} P_{\beta_{n+1}} \cdots P_{\beta_{n+k}}, \mu_n P_{\beta_{n+1}} \cdots P_{\beta_{n+k}}\right)$$

$$\leq \underbrace{\sum_{\ell=1}^{k} \underbrace{d_{TV}\left(\Pi_{\beta_{n+\ell}}, \Pi_{\beta_{n+\ell-1}}\right)}_{\substack{\text{Lemme} \\ \leq (\bar{v} - v_*)(\beta_{n+\ell} - \beta_{n+\ell-1}) \\ = (\bar{v} - v_*)\, h \ln \frac{n+\ell}{(n+\ell-1) \vee 1}}}}_{\leq (\bar{v} - v_*)\, h \ln\left(\frac{n+k}{n \vee 1}\right)} + d_{TV}\left(\Pi_{\beta_n}, \mu_n\right)$$

si $k = n$

$$\leq (1-\alpha)\, \underbrace{e^{-K(\beta_{n+1} + \cdots + \beta_{n+n})}}_{\leq e^{-Kn\beta_{n+n}}} d_{TV}\left(\Pi_{\beta_n}, \mu_n\right)$$

$$\leq (\bar{v} - v_*)\, h \ln\left(\frac{n+k}{n \vee 1}\right) + d_{TV}\left(\Pi_{\beta_n}, \mu_n\right)$$

Pour $k \in \{1, \dots, m-1\}$ et $\ell \in \mathbb{N}$

$$d_{TV}(\pi_{\beta_{\ell m+k}}, \mu_{\ell m+k}) \leq d_{TV}(\pi_{\beta_{\ell m}}, \mu_{\ell m}) + (\bar{v} - v_*) h \underbrace{\ln\left(\frac{\ell m+k}{\ell m \vee 1}\right)}_{\leq \ln\left(\frac{\ell m+m-1}{\ell m \vee 1}\right) \xrightarrow[\ell \to +\infty]{} 0}$$

Il suffit donc de mq. $d_{TV}(\pi_{\beta_{\ell m}}, \mu_{\ell m}) \xrightarrow[\ell \to +\infty]{} 0$.

Inégalité renforcée grâce à Doeblin

$$d_{TV}(\pi_{\beta_{(\ell+1) m}}, \mu_{(\ell+1) m}) \leq \left(1 - \alpha e^{-m \beta_{(\ell+1) m} K}\right) d_{TV}(\pi_{\beta_{\ell m}}, \mu_{\ell m})$$
$$+ (\bar{v} - v_*) h \ln\left(\frac{(\ell+1) m}{\ell m \vee 1}\right)$$

On pose $z_\ell = d_{TV}(\pi_{\beta_{\ell m}}, \mu_{\ell m})$ $\quad \alpha_{\ell+1} = \alpha e^{-m \beta_{(\ell+1) m} K}$

et $b_{\ell+1} = (\bar{v} - v_*) h \ln\left(\frac{(\ell+1) m}{\ell m \vee 1}\right)$

$$z_{\ell+1} \leq (1 - \alpha_{\ell+1}) z_\ell + b_{\ell+1}$$

Pour $\ell \geq 2$, $b_\ell = (\bar{v} - v_*) h \ln\left(1 + \frac{1}{\ell}\right) \underset{\ell \to +\infty}{\sim} (\bar{v} - v_*) \frac{h}{\ell}$ $\quad \alpha_\ell = \alpha e^{-m h K \ln(\ell m)} = \alpha (\ell m)^{-m h K}$

Comme $m h K \leq 1$, $\sum_\ell \alpha_\ell = +\infty$

Par ailleurs comme $m h K < 1$,

$$\frac{b_\ell}{\alpha_\ell} \sim c\, \ell^{m h K - 1} \xrightarrow[\ell \to +\infty]{} 0$$

Lemme : Soit $(z_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_+$ qui vérifie

$$\forall \ell\in\mathbb{N},\quad z_{\ell+1} \leq (1-\alpha_{\ell+1})\, z_\ell + b_{\ell+1} \quad (*)$$

avec $(\alpha_{\ell+1})_{\ell\in\mathbb{N}}$ suite de $[0,1[$ tq $\sum_{\ell\geq 1}\alpha_\ell = +\infty$

et $(b_{\ell+1})_{\ell\in\mathbb{N}}$ suite de $\mathbb{R}_+$ tq $\frac{b_\ell}{\alpha_\ell} \xrightarrow[\ell\to+\infty]{} 0$

Alors $z_\ell \xrightarrow[\ell\to+\infty]{} 0$

Preuve : On pose $A_k = \prod_{\ell=1}^{k} \frac{1}{(1-\alpha_\ell)}$ pour $k\in\mathbb{N}^*$ et $A_0 = 1$.

$$-\ln A_k = \sum_{\ell=1}^{k} \ln(1-\alpha_\ell) \leq -\sum_{\ell=1}^{k}\alpha_\ell \xrightarrow[k\to+\infty]{} -\infty$$

Donc $A_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$.

$(*)\times A_{\ell+1}$ / $\quad A_{\ell+1} z_{\ell+1} \leq \overbrace{A_{\ell+1}(1-\alpha_{\ell+1})}^{A_\ell} z_\ell + A_{\ell+1} b_{\ell+1}$

Ainsi $\quad A_k z_k \leq A_0 z_0 + \sum_{\ell=1}^{k} A_\ell b_\ell = A_0 z_0 + \sum_{\ell=1}^{k} (A_\ell - A_{\ell-1}) \frac{b_\ell}{\alpha_\ell}$

car $\frac{A_\ell - A_{\ell-1}}{\alpha_\ell} = A_\ell \Leftrightarrow A_{\ell-1} = (1-\alpha_\ell)A_\ell$

Soit $\ell_0 \in \mathbb{N}^*$,

Pour $k \geq \ell_0$,
$$z_k = \frac{1}{A_k}\left(A_0 z_0 + \sum_{\ell=1}^{\ell_0}(A_\ell - A_{\ell-1})\frac{b_\ell}{\alpha_\ell} + \sum_{\ell=\ell_0+1}^{k}(A_\ell - A_{\ell-1})\frac{b_\ell}{\alpha_\ell}\right)$$
$$\leq \frac{1}{A_k}\left(A_0 z_0 + \sum_{\ell=1}^{\ell_0}(A_\ell - A_{\ell-1})\frac{b_\ell}{\alpha_\ell}\right) + \underbrace{\frac{A_k - A_{\ell_0}}{A_k}}_{\leq 1} \max_{\ell \geq \ell_0+1} \frac{b_\ell}{\alpha_\ell}$$

Comme $\frac{b_\ell}{\alpha_\ell} \xrightarrow[\ell \to +\infty]{} 0$, en choisissant ℓ_0 assez grand le second terme du 2^{nd} membre est arbitrairement petit.

A ℓ_0 fixé, le 1^{er} terme $\xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ car $A_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$.

Ainsi $z_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

$\square$

<u>Lemme</u> : On suppose $E = \mathbb{R}^d$ muni de λ = Lebesgue

Soit $Q(x,dy) = q(x,y)\,dy$ un noyau markovien à densité q symétrique. Alors $\sup_{m \in \mathbb{N}^*} \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} (Q^m(x,\cdot)\wedge Q^m(y,\cdot))(\mathbb{R}^d) = 0$

i.e aucune itérée de Q ne satisfait Doeblin

<u>Preuve</u> : $Q^m(x,dy) = q_m(x,y)\,dy$ pour $m \geq 2$

avec $q_m(x,y) = \int_{(\mathbb{R}^d)^{m-1}} q(x,z_1)\,q(z_1,z_2)\cdots q(z_{m-1},y)\,dz_1\cdots dz_{m-1}$

$= \int_{(\mathbb{R}^d)^{m-1}} q(y,z_{m-1})\,q(z_{m-1},z_{m-2})\cdots q(z_1,x)\,dz_{m-1}\cdots dz_1$

$= q_m(y,x)$.

Ainsi les itérées de Q possèdent également une densité symétrique.

Il suffit de montrer que $\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} P(x,\cdot)\wedge P(y,\cdot)\,(\mathbb{R}^d) = 0$

pour tout noyau $P(x,dy) = p(x,y)\,dy$ avec p symétrique.

Soit $x \in \mathbb{R}^d$ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\{|z-x| \geq M\}}(x,z)\, dz \xrightarrow[M \to +\infty]{\text{(VD)}} 0$

Supposons que $\exists\, \alpha > 0$, $\displaystyle\inf_{y \in \mathbb{R}^d} P(x,\cdot) \wedge P(y,\cdot)\, (\mathbb{R}^d) \geq \alpha$.

Il existe $M_x > 0$ tq $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\{|z-x| \geq M_x\}}\, p(x,z)\, dz \leq \frac{\alpha}{2}$.

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\{|z-x| \leq M_x\}}\, p(y,z)\, dz \geq \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\{|z-x| \leq M_x\}} \big(p(y,z) \wedge p(x,z)\big)\, dz$$

$$\geq \int_{\mathbb{R}^d} p(y,z) \wedge p(x,z)\, dz - \int \mathbb{1}_{\{|z-x| \geq M_x\}}\, p(x,z)\, dz$$

$$= P(x,\cdot) \wedge P(y,\cdot)\, (\mathbb{R}^d) - \int \mathbb{1}_{\{|z-x| \geq M_x\}}\, p(x,z)\, dz \geq \frac{\alpha}{2}$$

Donc $\displaystyle\int_{y \in \mathbb{R}^d} \int_{z \in \mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\{|z-x| \leq M_x\}}\, p(y,z)\, dz\, dy = +\infty$

|| Fubini et p sym

$$\int_{z \in \mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\{|z-x| \leq M_x\}} \underbrace{\int p(z,y)\, dy}_{1}\, dz < +\infty$$

contradiction

Donc $\displaystyle\inf_{y \in \mathbb{R}^d} P(x,\cdot) \wedge P(y,\cdot)\, (\mathbb{R}^d) = 0$ $\blacksquare$

4) Ergodicité géométrique sous condition de dérive :

Condition de dérive :

$\exists V : E \to \mathbb{R}_+$ mesurable tq

(D1) $\exists \gamma \in [0,1[$ $\exists K \in [0,+\infty[$, $\forall x \in E$, $PV(x) \leq \gamma V(x) + K$

(D2) $\exists R > \frac{2K}{1-\gamma}$, $\exists \alpha \in]0,1]$, $\forall x,y \in E$ avec $V(x)+V(y) \leq R$,

$P(x,\cdot) \wedge P(y,\cdot)(E) \geq \alpha$.

(D2) Doeblin "restreint à l'ensemble $\{x : V(x) \leq \frac{R}{2}\}$"

V s'appelle fonction de Lyapunov.

(D1) assure que quand $V(x)$ est grand l'application du noyau ramène vers les points où V est plus petit et donc vers la zone où Doeblin est satisfaite

Si $V(x) > \frac{R}{2}$, comme $K < (1-\gamma)\frac{R}{2}$, $PV(x) < \gamma V(x) + (1-\gamma)\frac{R}{2} < \gamma V(x) + (1-\gamma)V(x)$

$< V(x)$

déf : Pour $\beta \geq 0$ et $\varphi : E \to \mathbb{R}$ mesurable on note $\|\varphi\|_\beta = \sup_{x \in E} \frac{|\varphi(x)|}{1+\beta V(x)}$

Soit $\mathcal{P}_V(E) = \{\mu \in \mathcal{P}(E) \text{ tq } \mu(V) < +\infty\}$.

Pour $\mu, \sigma \in \mathcal{P}_V(E)$ on note $d_\beta(\mu,\sigma) = \sup_{\|\varphi\|_\beta \leq 1} |\mu(\varphi) - \sigma(\varphi)|$

NB : • Pour $\mu, \sigma \in \mathcal{P}(E)$ on note hyp $d_\beta(\mu,\sigma) = \sup_{\|\varphi\|_\beta \leq 1} |\mu(\varphi) - \sigma(\varphi)|$ même si cela peut valoir $+\infty$.

• d_β est une distance sur $\mathcal{P}_V(E)$ (exo : le montrer)

• Pour $0 \leq \beta \leq \tilde{\beta}$, $\|\varphi\|_{\tilde{\beta}} \leq \|\varphi\|_\beta$

$d_{\tilde{\beta}}(\mu,\sigma) \geq d_\beta(\mu,\sigma)$

• $d_0(\mu,\sigma) = 2\, d_{TV}(\mu,\sigma)$

Prop : Pour $\beta > 0$, $\mathcal{P}_V(E)$ muni de d_β est complet.

Si généralise le fait que $\mathcal{P}(E)$ muni de d_{TV} est complet.

$\mu, \sigma \ll \lambda$

$$d_\beta(\mu, \sigma) = \int \left| \frac{d\mu}{d\lambda}(x) - \frac{d\sigma}{d\lambda}(x) \right| (1 + \beta V(x)) \lambda(dx)$$

$$= \left\| \frac{d\mu}{d\lambda} - \frac{d\sigma}{d\lambda} \right\|_{L^1((1+\beta V(x))\lambda(dx))}$$

On reprend la preuve effectuée pour d_{TV}

Thm : Sous (D1) et (D2), P admet une unique proba invariante π. On a $\pi(V) \leq \frac{K}{1-\gamma}$.

En outre $\forall \beta > 0$, $\forall \mu \in \mathcal{P}(E)$,

$$d_\beta(\mu P^n, \pi) \leq \alpha^n d_\beta(\mu, \pi)$$

où $\alpha = (1 - \alpha + \beta K) \vee \underbrace{\frac{2 + \beta\gamma R + 2\beta K}{2 + \beta R}}_{f(R)\ \text{f} \ \rho \text{ suivante}} \in]0,1[$ si $\beta \in]0, \frac{\alpha}{K}[$

<u>Lemme</u> | Sous (D1) et (D2) pour toute $\varphi : E \to \mathbb{R}$ mesurable tq $\|\varphi\|_1 < +\infty$

$\forall \beta > 0, \forall x, y \in E, \ |P\varphi(x) - P\varphi(y)| \leq \alpha \left(2 + \beta(V(x) + V(y))\right) \|\varphi\|_\beta$

et $\forall \mu, \sigma \in \mathcal{P}(E), \ d_\beta(\mu P, \sigma P) \leq \alpha \, d_\beta(\mu, \sigma)$

<u>Preuve</u> : Soit φ tq $\|\varphi\|_1 < +\infty$.

<u>cas 1</u> : $V(x) + V(y) \geq R$

$$
\begin{aligned}
|P\varphi(x) - P\varphi(y)| &\leq |P\varphi(x)| + |P\varphi(y)| \\
&\leq \|\varphi\|_\beta \left(P(1+\beta V)(x) + P(1+\beta V)(y) \right) \\
&\overset{(D1)}{\leq} \|\varphi\|_\beta \left(2 + \beta \gamma \left(V(x) + V(y)\right) + 2\beta K \right). \\
&\leq \|\varphi\|_\beta \left(2 + \beta (V(x) + V(y)) \right)
\end{aligned}
$$

$$\frac{2 + \beta \gamma (V(x) + V(y)) + 2\beta K}{2 + \beta (V(x) + V(y))}$$

Soit $f(x) = \dfrac{2 + \beta \gamma x + 2\beta K}{2 + \beta x} = \gamma + \dfrac{2(1-\gamma) + 2\beta K}{2 + \beta x} \searrow$ sur $\mathbb{R}_+$.

vers $f(+\infty) = \gamma$

$\gamma R + 2K < \gamma R + (1-\gamma) R = R$ Donc $f(R) < \dfrac{2 + \beta R}{2 + \beta R} = 1$

$$|P\varphi(x) - P\varphi(y)| \leq \|\varphi\|_\beta \underbrace{f(R)}_{\frac{2+\gamma\beta R+2\beta K}{2+\beta R}} \left(2 + \beta\left(V(x)+V(y)\right)\right).$$

Cas 2 : Si $V(x)+V(y) \leq R$.

$$|P\varphi(x) - P\varphi(y)| = \left|\int_E \varphi(z)\left(P(x,\cdot) - P(x,\cdot)\wedge P(y,\cdot)\right)(dz) - \int_E \varphi(z)\left(P(y,\cdot) - P(x,\cdot)\wedge P(y,\cdot)\right)(dz)\right|$$

$$\leq \|\varphi\|_\beta \left(\int_E (1+\beta V(z))\left(P(x,\cdot) - P(x,\cdot)\wedge P(y,\cdot)\right)(dz) + \int_E (1+\beta V(z))\left(P(y,\cdot) - P(x,\cdot)\wedge P(y,\cdot)\right)(dz)\right)$$

(D2) pour l'integ de 1

(D1) pour l'integ de V

$$\leq \|\varphi\|_\beta \left(2(1-\alpha) + \beta \underbrace{\left(PV(x) + PV(y)\right)}_{\gamma(V(x)+V(y)) + 2\beta K}\right)$$

$$\leq \|\varphi\|_\beta \left(2\left((1-\alpha) + \beta K\right) + \gamma\beta\left(V(x)+V(y)\right)\right)$$

$$\leq \|\varphi\|_\beta \left(\left((1-\alpha + \beta K\right) \vee \gamma\right)\left(2 + \beta\left(V(x)+V(y)\right)\right)$$

$f(+\infty) \leq f(R)$

bilan $\quad |P\varphi(x) - P\varphi(y)| \leq \|\varphi\|_\beta \underbrace{(2+\beta(V(x)+V(y)))(1-\alpha+\beta K) \vee f(R)}_{X}$ (*)

Soit φ tq $\|\varphi\|_\beta \leq 1$

et $c_\varphi = \inf_{y \in E} \left(X(1+\beta V(y)) - P\varphi(y) \right)$

$$P\varphi(x) + c_\varphi \leq \cancel{P\varphi(x)} + X(1+\beta V(x)) - \cancel{P\varphi(x)}$$

$$P\varphi(x) + c_\varphi \geq \inf_{y \in E} \left(X(1+\beta V(y)) + P\varphi(x) - P\varphi(y) \right)$$

$$\overset{(*)}{\geq} -X(1+\beta V(x)). \quad \left(\text{en particulier } c_\varphi > -\infty\right).$$

$$\|P\varphi(x) + c_\varphi\|_\beta \leq X$$

$$d_\beta(\mu P, \sigma P) = \sup_{\|\varphi\|_\beta \leq 1} |\mu P(\varphi) - \sigma P(\varphi)| = \sup_{\|\varphi\|_\beta \leq 1} |\mu(P\varphi) - \sigma(P\varphi)|$$

$$= \sup_{\|\varphi\|_\beta \leq 1} |\mu(P\varphi + c_\varphi) - \sigma(P\varphi + c_\varphi)| \leq \sup_{\|\psi\|_\beta \leq X} |\mu(\psi) - \sigma(\psi)|$$

$$\leq X d_\beta(\mu, \sigma) \quad \blacksquare$$

Preuve du théorème :

On choisit $\beta \in]0, \frac{\alpha}{K}[$ tel que $\chi < 1$.

L'application $\mu \in \mathcal{P}_V(E)_{\text{muni de } d_\beta} \longrightarrow \mu P$ est une contraction d'après le lemme.

Comme $\mathcal{P}_V(E)$ muni de d_β est complet, cette application admet un unique point fixe $\pi \in \mathcal{P}_V(E)$ qui est invariant.

En intégrant (D1) contre π, il vient $\underbrace{\pi(PV)}_{\pi(V)} \leq \gamma \pi(V) + K$

i.e. $\pi(V) \leq \dfrac{K}{1-\gamma}$.

$d_\beta(\mu P^n, \pi) = d_\beta(\mu P^n, \pi P^n) \leq \chi^n d_\beta(\mu, \pi)$ d'après lemme.

Reste à démontrer l'unicité de la proba invariante dans $\mathcal{P}(E)$ qui peut contenir strictement $\mathcal{P}_V(E)$ si V n'est pas bornée.

Pour $\beta \in \left]0, \frac{\alpha}{K}\right[$, $x \in E$

$$d_{TV}(P^n(x,\cdot), \pi) = \frac{1}{2} d_0 (P^n(x,\cdot), \pi) \leq d_\beta (\delta_x P^n, \pi)$$

$$\leq \gamma^n \underbrace{d_\beta(\delta_x, \pi)}_{\leq 1+\beta V(x) + 1 + \beta \pi(V) < +\infty} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Soit $\tilde{\pi}$ une proba invariante par P et $A \in \xi$.

$$\tilde{\pi}(A) = \tilde{\pi} P^n (A) = \int_E \underbrace{P^n(x, A)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi(A) \text{ en étant borné par } 1} \tilde{\pi}(dx)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{CVD} \int_E \pi(A) \tilde{\pi}(dx) = \pi(A).$$