Ch II Systèmes de particules en interaction

Calculer $\mathbb{E}(f_n(X_{0:n}))$ où $X_{0:n} = (X_0, X_1, \dots, X_n)$
avec $(X_k)_{k \geq 0}$ chaîne de Markov à valeurs dans E.

Si $\mathbb{P}(f_n(X_{0:n}) \neq 0) \ll 1$, événement rare $\to$ problème de variance pour l'estimateur Monte Carlo usuel

<u>réduction de variance par échantillonnage préférentiel :</u>

$$\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}} = \frac{\prod_{p=0}^{n-1} g_p(X_{0:p})}{\mathbb{E}\left(\prod_{p=0}^{n-1} g_p(X_{0:p})\right)}$$

avec $g_p : E^{p+1} \to \mathbb{R}_+^*$ bornée

$$\mathbb{E}(f_n(X_{0:n})) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^n}\left(\hat{f}_n(X_{0:n})\right) \times \mathbb{E}\left(\prod_{p=0}^{n-1} g_p(X_{0:p})\right)$$

avec $\hat{f}_n = \dfrac{f_n}{\prod_{p=0}^{n-1} g_p}$

$\underline{\text{ex}}$: Si $E = \mathbb{R}$ et $f_n(x_{0:n}) = \Psi(x_n)$ avec non nulle seulement pour de grandes valeurs de x_n, on peut choisir $g_p(x_{0:p})$ de la forme $h_p(x_p)$ avec h_p croissante ou de la forme $h_p(x_p - x_{p-1})$ $(p \geqslant 1)$ pour privilégier les trajectoires déjà hautes à l'instant p ou qui montent entre $p-1$ et p.

Implémentation ? • savoir simuler suivant $\mathbb{Q}_n$
• savoir calculer $\mathbb{E}\left(\prod_{p=0}^{n-1} g_p(X_{0:p})\right)$

On note η_0 la loi de X_0 sous $\mathbb{P}$.
On pose $\gamma_0 = \eta_0$ et pour $p \geqslant 1$ on introduit la mesure positive γ_p définie par $\forall\, h_p : E^{p+1} \to \mathbb{R}$ mesurable $\geqslant 0$: $\gamma_p(h_p) = \mathbb{E}\left(h_p(X_{0:p}) \prod_{k=0}^{p-1} g_k(X_{0:k})\right)$.

ainsi que la probabilité η_p obtenue par normalisation :

$$\boxed{\eta_p(h_p) = \frac{\gamma_p(h_p)}{\gamma_p(1)}}$$

$$\mathbb{E}(f_n(X_{0:n})) = \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_n}\left(\tilde{f}_n(X_{0:n})\right)}_{\eta_n(\tilde{f}_n)} \underbrace{\mathbb{E}\left(\prod_{k=0}^{n-1} g_k(X_{0:k})\right)}_{\gamma_n(1)}.$$

$$\gamma_p(1) = \mathbb{E}\left(\prod_{\ell=0}^{p-1} g_\ell(X_{0:\ell})\right) = \gamma_{p-1}(g_{p-1}) = \eta_{p-1}(g_{p-1})\,\gamma_{p-1}(1)$$

$$\overset{\text{récurrence}}{=} \prod_{\ell=0}^{p-1} \eta_\ell(g_\ell) \quad \text{car} \quad \gamma_0(1) = \eta_0(1) = 1.$$

$$\boxed{\gamma_p(1) = \prod_{\ell=0}^{p-1} \eta_\ell(g_\ell)}$$

$$\mathbb{E}(f_n(X_{0:n})) = \eta_n(\tilde{f}_n) \prod_{\ell=0}^{n-1} \eta_\ell(g_\ell)$$

$$\gamma_p(h_p) = \eta_p(h_p)\,\gamma_p(1) = \eta_p(h_p) \prod_{\ell=0}^{p-1} \eta_\ell(g_\ell)$$

On va approcher les η_p par $\eta_p^M = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \delta_{X_{0:p}^{p,m}}$

<u>Filtrage</u>: signal (ex: position d'un avion dans le ciel) donné par une chaîne de markov $(X_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$.
On observe $Y_\ell = \varphi_\ell(X_\ell) + V_\ell$ où $\varphi_\ell : E \to \mathbb{R}^d$ mesurable et les bruits $(V_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ sont indep de densités resp. q_ℓ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et indep de $(X_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$.
La densité condit de $Y_{0:p}$ sachant $X_{0:p+1} = x_{0:p+1}$ est $\prod_{\ell=0}^{p} q_\ell(y_\ell - \varphi_\ell(x_\ell))$. Par la formule de Bayes

$$\mathbb{P}(X_{0:p+1} \in dx_{0:p+1} \mid Y_{0:p} = y_{0:p}) \propto \prod_{\ell=0}^{p} q_\ell(y_\ell - \varphi_\ell(x_\ell)) \, \mathbb{P}(X_{0:p+1} \in dx_{0:p+1})$$

Ainsi la loi condit de $X_{0:p+1}$ sachant $Y_{0:p} = y_{0:p}$ est η_{p+1} pour le choix $g_\ell(x_{0:\ell}) = q_\ell(y_\ell - \varphi_\ell(x_\ell))$ $0 \le \ell \le p$

La loi condit de $X_{0:p}$ sachant $Y_{0:p} = y_{0:p}$ est $\hat{\eta}_p$ déf par

$$\hat{\eta}_p(h_p) = \frac{\gamma_p(h_p g_p)}{\gamma_p(g_p)} = \frac{\eta_p(h_p g_p)}{\eta_p(g_p)}.$$

Construction de la suite $\quad \eta_p^M = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \delta_{X_{0:p}^{p,m}}$

- initialisation : On choisit $(X_0^{0,m})_{1 \leq m \leq M}$ iid $\sim \eta_0$

- passage de η_p^M à η_{p+1}^M :

  - sélection : on choisit $(X_{0:p}^{p+1,m})_{1 \leq m \leq M}$ condit indep sachant $\mathcal{F}_p = \sigma\left((X_{0:\ell}^{\ell,m})_{\substack{1 \leq m \leq M \\ 0 \leq \ell \leq p}} \right)$ et tq

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \delta_{X_{0:p}^{p+1,m}} \,\middle|\, \mathcal{F}_p \right) = \frac{\sum_{m=1}^{M} g_p(X_{0:p}^{p,m}) \, \delta_{X_{0:p}^{p,m}}}{\sum_{m=1}^{M} g_p(X_{0:p}^{p,m})}$$

$$\sum_{m=1}^{M} g_p(X_{0:p}^{p,m}) \sim M \eta_p^M(g_p)$$

- mutation :

On génère $\left(X^{p+1,m}_{p+1}\right)_{1\leq m\leq M}$ condit indep sachant

$$\mathcal{G}_{p+1} = \sigma\left(\left(X^{\ell,m}_{0:\ell}\right)_{\substack{1\leq m\leq M\\ 0\leq \ell\leq p}}, \left(X^{p+1,m}_{0:p}\right)_{1\leq m\leq M} \right)$$

et resp des tributées suivant $P_{p+1}\left(X^{p+1,m}_{p}, \cdot\right)$ avec P_{p+1} le noyau de la chaîne entre l'instant p et l'instant $p+1$ (ie $\mathbb{P}\left(X_{p+1}\in A \mid X_{0:p}\right) = P_{p+1}(X_p, A)$).

On pose $X^{p+1,m}_{0:p+1} = \left(X^{p+1,m}_{0:p}, X^{p+1,m}_{p+1}\right)$.

<u>NB</u> : $\hat{\eta}^M_p = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \delta_{X^{p+1,m}_{0:p}}$ est une approximation de $\hat{\eta}_p$ introduite dans le pb de filtrage

Retour sur l'étape de sélection :

Comment générer $(Y_m)_{1\leq m\leq M}$ à valeurs dans $\mathcal{Y}$ tq

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\delta_{Y_m}\right)=\sum_{m=1}^{M}p_m\,\delta_{y_m}$$

où les $p_m\in[0,1]$ tq $\sum_{m=1}^{M}p_m=1$.

$\Leftrightarrow\ \mathbb{E}\left(\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\varphi(Y_m)\right)=\sum_{m=1}^{M}p_m\varphi(y_m)\ \forall\ \varphi:\mathcal{Y}\to\mathbb{R}$ mes bornée

et les $y_m\in\mathcal{Y}$.

- échantillonnage multinomial :

on tire $(Y_m)_{1\leq m\leq M}$ iid $\sim\sum_{\ell=1}^{M}p_\ell\,\delta_{y_\ell}$

- échantillonnage résiduel :

Pour $\sum_{j=1}^{\ell-1}\lfloor Mp_j\rfloor+1\leq m\leq\sum_{j=1}^{\ell}\lfloor Mp_j\rfloor$ on pose $Y_m=y_\ell$

NB : si $p_\ell\geq\frac{1}{M}$ on réplique au moins une fois y_ℓ.

Si $r=M-\sum_{j=1}^{M}\lfloor Mp_j\rfloor>0$, on génère $(Y_m)_{M-r+1\leq m\leq M}$

iid $\sim\frac{1}{r}\sum_{\ell=1}^{M}\{Mp_\ell\}\,\delta_{y_\ell}$

$\lfloor x\rfloor$ partie entière de x

ie l'entier n tq $n\leq x<n+1$

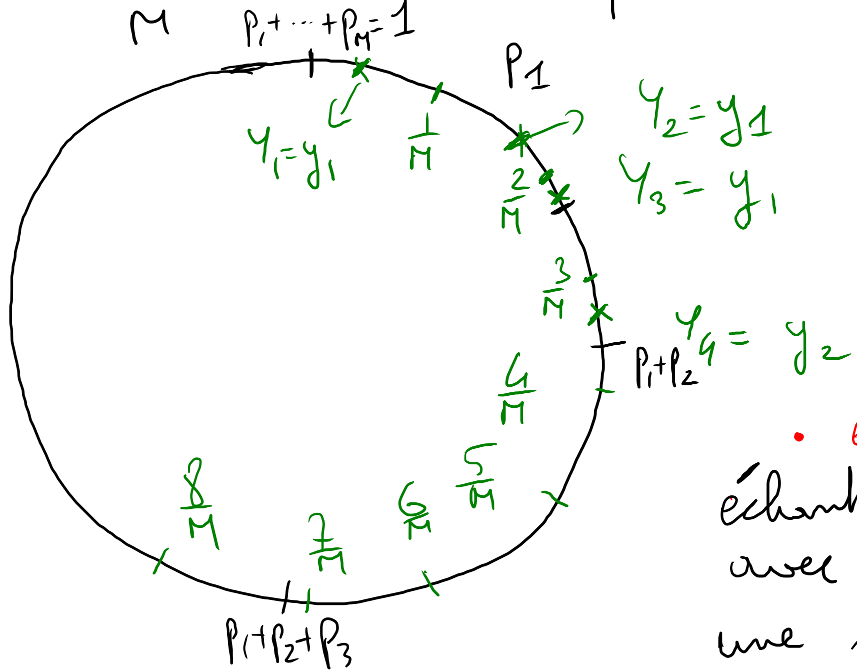
et $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$ partie fractionnaire

• échantillonnage stratifié

Pour $1 \le m \le M$, on pose $Y_m = \sum_{\ell=1}^{M} y_\ell \, \mathbb{1}_{\left\{\sum_{j=1}^{\ell-1} p_j \le \frac{m-U_m}{M} < \sum_{j=1}^{\ell} p_j\right\}}$

où les $(U_m)_{1\le m\le M}$ sont ind $\sim \mathcal{U}[0,1]$

$\Rightarrow$ les $\frac{m-U_m}{M}$ sont indep et resp distribuées $\sim \mathcal{U}\left[\frac{m-1}{M}, \frac{m}{M}\right]$



• échantillonnage systématique:

échantillonnage stratifié mais avec $U_m = U_1$ pour $2 \le m \le M$

une seule va $\sim \mathcal{U}[0,1]$

y_ℓ est répliquée $\left\lfloor M \sum_{j=1}^{\ell} p_j + U_1 \right\rfloor - \left\lfloor M \sum_{j=1}^{\ell-1} p_j + U_1 \right\rfloor$ fois

⚠ dans l'échantillonnage systématique on perd l'indép des Y_m à moins que $\forall \ell \in [\![1, M]\!]$ Mp_ℓ entier auquel cas dans les échantillonnages résiduel, stratifié et systématique on réplique Mp_ℓ fois y_ℓ.

ie $\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \delta_{Y_m} = \sum_{\ell=1}^{M} p_\ell \delta_{y_\ell}$

Approximation des mesures non normalisées :

$\gamma_0 = \eta_0$ et $\gamma_p(h_p) = \eta_p(h_p) \prod_{\ell=0}^{p-1} \eta_\ell(g_\ell)$ pour $p \geq 1$.

$\gamma_0^M = \eta_0^M$ et $\boxed{\gamma_p^M(h_p) = \eta_p^M(h_p) \prod_{\ell=0}^{p-1} \eta_\ell^M(g_\ell)}$ pour $p \geq 1$

Prop : On suppose que pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$
$g_p : E^{p+1} \to]0,+\infty[$ est mesurable bornée.
Alors pour tout $p \in [\![0,n]\!]$ et $h_p : E^{p+1} \to \mathbb{R}$
mes bornée
$$\boxed{\mathbb{E}(\gamma_p^M(h_p)) = \gamma_p(h_p)}$$

NB : • estimation sans biais de $\gamma_p(h_p)$.

En particulier $\mathbb{E}(f_n(X_{0:n})) = \eta_n(\tilde{f}_n)\prod_{k=0}^{n-1}\eta_k(g_k)$
$$= \gamma_n(\tilde{f}_n)$$

Ainsi $\gamma_n^M(\tilde{f}_n)$ est un estimateur sans biais de $\mathbb{E}(f_n(X_{0:n}))$.

• pas besoin d'indep à l'initialisation ni lors les étapes de sélection ($\Rightarrow$ echantillonnage systématique possible) et de mutation pour ce résultat.

Preuve : récurrence sur p.

Initialisation : $\gamma_0^M = \eta_0^M = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \delta_{X_0^{0,m}}$ avec les

$X_0^{0,m}$ distribuées suivant $\eta_0 = \gamma_0$

Pour $\varphi : E \to \mathbb{R}$ mesurable bornée $\mathbb{E}(\gamma_0^M(\varphi)) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \underbrace{\mathbb{E}(\varphi(X_0^{0,m}))}_{\gamma_0(\varphi)}$

Supposons l'hypothèse vraie au rang p et montrons la au rang $p+1$:

$\mathbb{E}(\eta_{p+1}^M (h_{p+1}) \mid \mathcal{F}_p)$?

$\mathbb{E}(\eta_{p+1}^M (h_{p+1}) \mid \mathcal{G}_{p+1}) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} h_{p+1}(X_{0:p+1}^{p+1,m}) \mid \mathcal{G}_{p+1}\right)$

$\stackrel{\text{mutation}}{=} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} P_{p+1} h_{p+1}(X_{0:p}^{p+1,m})$ où $P_{p+1} h_{p+1}(x_{0:p}) = \int_E h_{p+1}(x_{0:p}, y) P_{p+1}(x_p, dy)$

$$\mathbb{E}\left(\eta^M_{p+1}(h_{p+1}) \mid \mathcal{F}_p\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\eta^M_{p+1}(h_{p+1}) \mid \mathcal{G}_{p+1}\right) \mid \mathcal{F}_p\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} P_{p+1} h_{p+1}(X^{p+1,m}_{0:p}) \mid \mathcal{F}_p\right)$$

$$\overset{\text{selection}}{=} \frac{\eta^M_p(g_p P_{p+1} h_{p+1})}{\eta^M_p(g_p)}$$

$$\mathbb{E}\left(\gamma^M_{p+1}(h_{p+1})\right) = \mathbb{E}\Big(\eta^M_{p+1}(h_{p+1}) \underbrace{\prod_{\ell=0}^{p} \eta^M_\ell(g_\ell)}_{\mathcal{F}_p\text{ mes}}\Big)$$

$$= \mathbb{E}\Big(\underbrace{\eta^M_p(g_p P_{p+1} h_{p+1}) \prod_{\ell=0}^{p-1} \eta^M_\ell(g_\ell)}\Big)$$

$$= \mathbb{E}\left(\gamma^M_p(g_p P_{p+1} h_{p+1})\right) \overset{\text{hyp récurrence}}{=} \gamma_p(g_p P_{p+1} h_{p+1})$$

$$= \mathbb{E}\Big(g_p(X_{0:p}) \underbrace{P_{p+1} h_{p+1}(X_{0:p})}_{\mathbb{E}(h_{p+1}(X_{0:p+1}) \mid X_{0:p})} \prod_{\ell=0}^{p-1} g_\ell(X_{0:\ell})\Big) = \mathbb{E}\Big(h_{p+1}(X_{0:p+1}) \prod_{\ell=0}^{p} g_\ell(X_{0:\ell})\Big)$$

$$= \gamma_{p+1}(h_{p+1})$$

NB: $\gamma_{p+1}(h_{p+1}) = \gamma_p(g_p P_{p+1} h_{p+1})$

$\gamma_{p+1}(1) = \gamma_p(g_p)$

- $$\eta_{p+1}(h_{p+1}) = \frac{\gamma_p(g_p P_{p+1} h_{p+1})}{\gamma_p(g_p)} = \frac{\eta_p(g_p P_{p+1} h_{p+1})}{\eta_p(g_p)}$$

- $$\mathbb{E}\left(\eta^M_{p+1}(h_{p+1}) \mid \mathcal{F}_p\right) = \frac{\eta^M_p(g_p P_{p+1} h_{p+1})}{\eta^M_p(g_p)}$$

Pendant au niveau particulaire

Thm : On suppose que pour $p \in [\![0, n-1]\!]$

$$0 < \underline{g}_p = \inf_{x_{0:p} \in E^{p+1}} g_p(x_{0:p}) \leq \sup_{x_{0:p} \in E^{p+1}} g_p(x_{0:p}) = \overline{g}_p < +\infty .$$

et que l'indépendance est vérifiée à l'initialisation et l'indépendance condit. à chaque étape de selection (=) ~~systematique~~ et de mutation.

Alors pour tout $p \in [\![0, n]\!]$ et toute fonction $h_p : E^{p+1} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée $\overline{|h_p|} < +\infty$,

$$\sup_{M \geq 1} \sqrt{M}\, \mathbb{E}^{1/4}\left[\left(\eta_p^M(h_p) - \eta_p(h_p)\right)^4 \right] < +\infty$$

$$\sup_{M \geq 1} \sqrt{M}\, \mathbb{E}^{1/4}\left[\left(\gamma_p^M(h_p) - \gamma_p(h_p)\right)^4 \right] < +\infty$$

En outre $\mathbb{P}\left(\lim_{M \to +\infty} \eta_p^M(h_p) = \eta_p(h_p) \right) = 1 = \mathbb{P}\left(\lim_{M \to +\infty} \gamma_p^M(h_p) = \gamma_p(h_p) \right).$

Corollaire : Sous les hypothèses du théorème si $f_n : E^{n+1} \to \mathbb{R}$

est bornée $\sup_{M \geq 1} \sqrt{M}\, \mathbb{E}^{1/4}\left(\left(\gamma_n^M(f_n) - \mathbb{E}[f_n(X_{0:n})]\right)^4\right) < +\infty$

et $\mathbb{P}\left(\lim_{M \to +\infty} \gamma_n^M(\hat{f}_n) = \mathbb{E}[f_n(X_{0:n})]\right) = 1$

Preuve du théorème :

- Déduisons la cv p.s. des bornes sur moments d'ordre 4.

$$\mathbb{E}\left[\left(\eta_p^M(h_p) - \eta_p(h_p)\right)^4\right] \leq \frac{C}{M^2} \quad \text{avec } C < +\infty$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[\sum_{M \geq 1} \left(\eta_p^M(h_p) - \eta_p(h_p)\right)^4\right] < +\infty$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\sum_{M \geq 1} \left(\eta_p^M(h_p) - \eta_p(h_p)\right)^4 < +\infty\right) = 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\lim_{M \to +\infty} \eta_p^M(h_p) - \eta_p(h_p) = 0\right) = 1$$

car le terme général d'une série cv tend vers 0.

- Montrons $\sup_{M \geq 1} M^2 \mathbb{E}\left[\left(\eta_p^M(h_p) - \eta_p(h_p)\right)^4\right] < +\infty$

par récurrence sur p.

Initialisation : $\eta_0^M = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \delta_{X_0^{0,m}}$ avec les $(X_0^{0,m})_{1 \leq m \leq M}$ iid $\sim \eta_0$

$$\mathbb{E}\left[\left(\eta_0^M(h_0) - \eta_0(h_0)\right)^4\right] = \frac{1}{M^4} \sum_{m_1,m_2,m_3,m_4=1}^{M} \mathbb{E}\left[\prod_{\ell=1}^{4}\left(h_0(X_0^{0,m_\ell}) - \eta_0(h_0)\right)\right]$$

Dès que l'un des m_ℓ est distinct des trois autres l'espérance dans la somme est nulle du fait du caractère iid $\sim \eta_0$ des $X_0^{0,m}$.

- Restent les termes correspondant
  - aux 4 indices égaux, M termes en $\mathbb{E}\left(\left(h_0(X_0^{0,1}) - \eta_0(h_0)\right)^4\right)$
  - à 2 couples d'indices égaux et prenant des valeurs différentes.

$\underset{\substack{\text{choix parmi } m_2,m_3,m_4 \\ \text{le celui égal à } m_1}}{3} \times M \times (M-1)$ termes en $\left(\mathrm{Var}(h_0(X_0^{0,1}))\right)^2$

$$\mathbb{E}\left(\left(\eta_0^M(h,) - \eta_0(h,)\right)^4\right) = \frac{1}{M^3}\mathbb{E}\left(\left(h,(X_0^{i,1}) - \eta_0(h,)\right)^4\right) + \frac{3(M-1)}{M^3}\left(\mathrm{Var}\, h,(X_0^{i,1})\right)^2$$

$$\leq \frac{C}{M^2} \quad \text{avec } C < \text{cte}.$$

Supposons l'hypothèse au rang p et montrons la au rang $p+1$

$$\left(\eta_{p+1}^M(h_{p+1}) - \eta_{p+1}(h_{p+1})\right)^4 \leq 8\left(\eta_{p+1}^M(h_{p+1}) - \mathbb{E}(\eta_{p+1}^M(h_{p+1}) \mid \mathcal{F}_p)\right)^4$$
$$+ 8\left(\frac{\eta_p^M(g_p P_{p+1} h_{p+1})}{\eta_p^M(g_p)} - \frac{\eta_p(g_p P_{p+1} h_{p+1})}{\eta_p(g_p)}\right)^4.$$

$$\left(\frac{\eta_p^M(g_p P_{p+1} h_{p+1})}{\eta_p^M(g_p)} - \frac{\eta_p(g_p P_{p+1} h_{p+1})}{\eta_p(g_p)}\right)^4 \leq 8\,\frac{\left(\eta_p^M(g_p P_{p+1} h_{p+1}) - \eta_p(g_p P_{p+1} h_{p+1})\right)^4}{\left(\eta_p^M(g_p)\right)^4}$$
$$+ 8\left(\eta_p(g_p P_{p+1} h_{p+1})\right)^4 \left(\frac{\eta_p(g_p) - \eta_p^M(g_p)}{\eta_p(g_p)\,\eta_p^M(g_p)}\right)^4$$

$$\leq \frac{8}{g_p^4}\left(\eta_p^M(g_p P_{p+1} h_{p+1}) - \eta_p^M(g_p)\right) + \frac{8}{g_p^8}\, \overline{g_p}^4 \, \overline{|h_{p+1}|}^4 \left(\eta_p^M(g_p) - \eta_p(g_p)\right)^4$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à $h_p = g_p P_{p+1} h_{p+1}$ et $h_p = g_p$, on obtient

que $$\mathbb{E}\left(\left(\frac{\eta_p^M(g_p P_{p+1} h_{p+1})}{\eta_p^M(g_p)} - \frac{\eta_p(g_p P_{p+1} h_{p+1})}{\eta_p(g_p)}\right)^4\right) \leq \frac{C}{M^2}.$$

$$\mathbb{E}\left(\left(\eta_{p+1}^M(h_{p+1}) - \mathbb{E}\left(\eta_{p+1}^M(h_{p+1}) \mid \mathcal{F}_p\right)\right)^4\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{M}\sum_{m=1}^M \left(h_{p+1}(X_{0:p+1}^{p+1,m}) - \mathbb{E}(h_{p+1}(X_{0:p+1}^{p+1,m}) \mid \mathcal{F}_p)\right)\right)^4 \middle| \mathcal{F}_p\right)\right)$$

$$= \frac{1}{M^4}\sum_{m_1,m_2,m_3,m_4=1}^M \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\underbrace{\prod_{\ell=1}^4 \left\{h_{p+1}(X_{0:p+1}^{p+1,m_\ell}) - \mathbb{E}(h_{p+1}(X_{0:p+1}^{p+1,m_\ell}) \mid \mathcal{F}_p)\right\}}_{\text{même phénomène qu'à l'initialisation car les}} \middle| \mathcal{F}_p\right)\right) \leq \frac{C}{M^2}$$

$X_{0:p+1}^{p+1,m}$ sont condit indep sachant $\mathcal{F}_p$.

Ainsi $\mathbb{E}\left(\prod_{\ell=1}^4 \cdots \mid \mathcal{F}_p\right) = 0$ dès lors que l'un des m_ℓ est distinct des 3 autres

Ainsi $\sup_{M\geq 1} M^2\,\mathbb{E}\left(\left(\eta^M_{p+1}(h_{p+1})-\eta_{p+1}(h_{p+1})\right)^4\right)<+\infty$.

• passage aux mesures non normalisées

On pose $h_\ell = g_\ell$ pour $\ell\in[\![0,p-1]\!]$

$$\gamma_p^M(h_p)=\eta_p^M(h_p)\prod_{\ell=0}^{p-1}\eta_\ell^M(g_\ell)$$
$$=\prod_{\ell=0}^{p}\eta_\ell^M(h_\ell).$$

$$\gamma_p(h_p)=\eta_p(h_p)\prod_{\ell=0}^{p-1}\eta_\ell(g_\ell)=\prod_{\ell=0}^{p}\eta_\ell(h_\ell).$$

$$\gamma_p^M(h_p)-\gamma_p(h_p)=\sum_{\ell=0}^{p}\left(\prod_{j=0}^{\ell-1}\eta_j^M(h_j)\right)\left(\eta_\ell^M(h_\ell)-\eta_\ell(h_\ell)\right)\prod_{j=\ell+1}^{p}\eta_j(h_j)$$

$$\left(\gamma_p^M(h_p)-\gamma_p(h_p)\right)^4\leq(p+1)^3\underbrace{\left(\prod_{j=0}^{\ell-1}\eta_j^M(h_j)\right)^4\left(\prod_{j=\ell+1}^{p}\eta_j(h_j)\right)^4}_{\leq\prod_{j=0,\,j\neq\ell}^{p}\|h\|_j^4}\left(\eta_\ell^M(h_\ell)-\eta_\ell(h_\ell)\right)^4$$

Donc $\sup_{M\geq 1} M^2\,\mathbb{E}\left(\left(\gamma_p^M(h_p)-\gamma_p(h_p)\right)^4\right)<+\infty$ d'après le résultat sur mesures de proba.