Rappels :

(D1) $\exists V : E \to \mathbb{R}_+$ mesurable $\exists \gamma \in [0,1[$ $\exists K < +\infty$ tq

$$\forall x \in E, \quad PV(x) \leq \gamma V(x) + K$$

(D2) $\exists R > \dfrac{2K}{1-\gamma}$, $\exists \alpha \in]0,1]$ tq $\forall x, y \in E$ avec $V(x) + V(y) \leq R$,

alors $P(x,\cdot) \wedge P(y,\cdot)(E) \geq \alpha$

le $d_{TV}(P(x,\cdot), P(y,\cdot)) \leq 1 - \alpha$.

$$\|f\|_\beta = \sup_{x \in E} \frac{|f(x)|}{1 + \beta V(x)} \qquad d_\beta(\mu, \sigma) = \sup_{\|f\|_\beta \leq 1} |\mu(f) - \sigma(f)|$$

distance sur $\mathcal{P}_V(E) = \{\mu \in \mathcal{P}(E) \text{ tq } \mu(V) < +\infty\}$

$$d_0(\mu, \sigma) = 2\, d_{TV}(\mu, \sigma).$$

Thm | Sous (D1) et (D2), P admet une unique proba invariante π.

On a $\pi(V) \leq \dfrac{K}{1-\gamma}$. $\forall \mu \in \mathcal{P}(E)$ $d_\beta(\mu P^n, \pi) \leq \bar{\alpha}^n d_\beta(\mu, \pi)$

avec $\bar{\alpha} = (1 - \alpha + \beta K) \vee \dfrac{2 + \beta\gamma R + 2\beta K}{2 + \beta R} < 1$ si $\beta \in]0, \frac{\alpha}{K}[$.

5) Application à l'algorithme de Metropolis Hastings :

On suppose
- $E = \mathbb{R}^d$ muni de $\xi = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$
- $\lambda(dx) = dx$ Lebesgue
- $\pi(dx) = \dfrac{\eta(x)\,dx}{\int_{\mathbb{R}^d} \eta(y)\,dy}$ où $\eta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ est une fonction mesurable tq $\int_{\mathbb{R}^d} \eta(y)\,dy \in]0,+\infty[$

On s'intéresse à MHMA avec une densité de proposition $\varphi(y-x)$ où φ est une densité de proba sur $\mathbb{R}^d$ paire ($\varphi(z) = \varphi(-z)$, $\forall z \in \mathbb{R}^d$).

Alors le noyau de Metropolis Hastings s'écrit

$$P(x, dy) = \alpha(x,y)\,\varphi(y-x) + R(x)\,\delta_x(dy)$$

où $\alpha(x,y) = \min\left(\dfrac{\eta(y)}{\eta(x)}, 1\right)$ et $R(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \left(1 - \frac{\eta(y)}{\eta(x)}\right)^+ \varphi(y-x)\,dy$

<u>Convention</u> : $\dfrac{\eta(y)}{\eta(x)} = 1$ si $\eta(x) = 0$.

Doeblin n'est pas satisfaite.

Pour $z \neq x$ $\qquad P(x,\cdot) \wedge P(z,\cdot)\,(\mathbb{R}^d)$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\alpha(x,y)\,\varphi(y-x) \wedge \alpha(z,y)\,\varphi(y-z)\right) dy$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y-x) \wedge \varphi(y-z)\, dy$$

$$|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$$

$\Rightarrow$ soit $|x-y| \geq \frac{|x-z|}{2}$

soit $|y-z| \geq \frac{|x-z|}{2}$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\varphi(y-x)\,\mathbb{1}_{\{|y-x| \geq \frac{|x-z|}{2}\}} + \varphi(y-z)\,\mathbb{1}_{\{|y-z| \geq \frac{|x-z|}{2}\}}\right) dy$$

$$= 2 \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(w)\,\mathbb{1}_{\{|w| \geq \frac{|x-z|}{2}\}}\, dw$$

$$\xrightarrow[|x-z| \to +\infty]{} 0 \quad \text{par CVD.}$$

Lemme : Pour Metropolis Hastings avec densité de proposition $q(x,y)$ tq $\forall M>0$, $q_M := \inf_{|x| \vee |y| \leq M} q(x,y) > 0$ et $\bar{\eta}_M = \sup_{|x|\leq M} \eta(x) < +\infty$

alors pour tout M assez grd pour que $\int_{|x|\leq M} \eta(x)\,dx > 0$

on a $\forall |x| \leq M$, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $P(x,A) \geq \frac{q_M}{\bar{\eta}_M}\left(\int_{|y|\leq M} \eta(y)\,dy\right) \eta_M(A)$

où $\eta_M(dy) = \frac{1_{\{|y|\leq M\}}\eta(y)\,dy}{\int_{|z|\leq M}\eta(z)\,dz}$

"Doeblin uniforme" sur la boule centrée en 0 de rayon M.

Preuve : Soit M tq $\int_{|z|\leq M} \eta(z)\,dz > 0$ et $|x| \leq M$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

$$P(x,A) \geq \int_A \alpha(x,y)\, q(x,y)\, dy = \int_A 1_{\{\eta(y)>0\}} \left(\frac{\eta(y) q(y,x)}{\eta(x) q(x,y)} \wedge 1\right) q(x,y)\,dy$$

$$= \int_A 1_{\{\eta(y)>0\}} \left(\frac{q(y,x)}{\eta(x)} \wedge \frac{q(x,y)}{\eta(y)}\right) 1_{\{|y|\leq M\}}\, \eta(y)\,dy \geq \frac{q_M}{\bar{\eta}_M} \int_A 1_{\{|y|\leq M\}}\, \eta(y)\,dy$$

$$\geq \frac{q_M}{\bar{\eta}_M} \int_{|y|\leq M} \eta(y)\,dy \;\; \eta_M(A)$$

(D1) est plus difficile à obtenir

Lemme : $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $P\eta^{-1/2}(x) \leq \frac{5}{4}\eta^{-1/2}(x)$ pour MH avec densité de proposition q symétrique

on voudrait $\gamma < 1$ quitte à ajouter une constante additive K.

$$\alpha(x,y) = \frac{\eta(y)}{\eta(x)} \wedge 1$$

Preuve : On note $A_x = \{y : \eta(y) \geq \eta(x)\}$ l'ensemble des propositions acceptées avec proba 1

$R_x = \{y : \eta(y) < \eta(x)\}$ ensemble des propositions qui peuvent être rejetées avec proba $1 - \frac{\eta(y)}{\eta(x)}$

$$\frac{P\eta^{-1/2}(x)}{\eta^{-1/2}(x)} = \int_{A_x} \underbrace{\frac{\eta^{-1/2}(y)}{\eta^{-1/2}(x)}}_{\leq 1 \text{ par def de } A_x} q(x,y)\,dy + \int_{R_x} \frac{\eta^{-1/2}(y)}{\eta^{-1/2}(x)} \times \frac{\eta(y)}{\eta(x)} q(x,y)\,dy$$

$$+ \int_{R_x} \underbrace{\frac{\eta^{-1/2}(x)}{\eta^{-1/2}(x)}}_{1} \left(1 - \frac{\eta(y)}{\eta(x)}\right) q(x,y)\,dy$$

$$\leq \int_{A_x} q(x,y)\,dy + \int_{R_x} \overbrace{\left(1 - \frac{\eta(y)}{\eta(x)} + \frac{\eta^{1/2}(y)}{\eta^{1/2}(x)}\right)}^{\leq \frac{5}{4}} q(x,y)\,dy$$

$$\leq \frac{5}{4} \int_{\mathbb{R}^d} q(x,y)\,dy = \frac{5}{4}$$

Sur R_x, $\frac{\eta(y)}{\eta(x)} \in [0,1]$.

Soit $f(u) = (1 - u + \sqrt{u})$

$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} - 1$ s'annule en $u = \frac{1}{4}$

≥ 0 avant et négatif après

Donc $\sup_{u \in [0,1]} f(u) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}$

déf : la loi π est dite sous-exponentielle si la densité η est C^1 strictement positive et $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{x}{|x|}\cdot\nabla \ln \eta(x) = -\infty$

NB : Soit $\beta > 0$. On peut trouver $M_\beta < +\infty$ $\forall |y| \geq M_\beta$, $\frac{y}{|y|}\cdot\nabla \ln\eta(y) \leq -\beta$.

Pour $|x| \geq M_\beta$,

$$\ln\left(\frac{\eta(x)}{\eta\left(\frac{x M_\beta}{|x|}\right)}\right) = \int_{M_\beta}^{|x|} \underset{\frac{\frac{tx}{|x|}}{\left|\frac{tx}{|x|}\right|}}{\underset{\parallel}{\frac{x}{|x|}}} \cdot \nabla \ln\eta\left(\frac{tx}{|x|}\right) dt \leq -\beta\left(|x| - M_\beta\right).$$

$$\eta(x) \leq \eta\left(\frac{x M_\beta}{|x|}\right) e^{-\beta(|x|-M_\beta)} \leq e^{-\beta|x|}\left(e^{\beta M_\beta} \sup_{|y|\leq M_\beta} \eta(y)\right)$$

ex :
- les densités gaussiennes sont sous-exponentielles.
- les lois exponentielles ne sont pas sous-exponentielles.

Proposition : On suppose que η est sous-exponentielle et tq $\limsup_{|x|\to+\infty} \varphi'\left(\frac{x}{|x|}\right) \cdot \frac{\nabla\eta(x)}{|\nabla\eta(x)|} < 0$

Tout algorithme MHMA avec φ 1 sure tq $\forall M>0$ $\inf_{|z|\leq M} \varphi(z) > 0$ satisfait (D1) et (D2) avec $V(x)=\eta^{-1/2}(x)$. Il est donc ~~géométriquement~~ ergodique

IV LFGN pour les moyennes ergodiques :

Thm ergodique de Birkhoff : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de proba et $T : \Omega \to \Omega$ une application mesurable qui préserve $\mathbb{P}$ (ie $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(T^{-1}(A)) = \mathbb{P}(A)$) et qui est ergodique au sens où $\forall A \in \mathcal{A}$, $T^{-1}(A) = A \Rightarrow \mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$.

Alors pour toute variable aléatoire $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ intégrable

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} Y(T^\ell(\omega)) \to \mathbb{E}(Y)\right\}\right) = 1$$

$\left(\begin{array}{l} T^0(\omega) = \omega \\ \text{et } T^{\ell+1}(\omega) = T(T^\ell(\omega)) \\ \qquad = T^\ell(T(\omega)) \end{array}\right)$

Soit $(X_n)_n$ chaîne de Markov de noyau P sur (E, ξ).
On note $\mathbb{P}_\mu$ la proba sur l'espace Ω sous-jacent si $X_0 \sim \mu$ (et même $\mathbb{P}_x$ si $\cancel{X_0} = x$). On note $\mathbb{E}_\mu$ et $\mathbb{E}_x$ les espérances associées.

def : Une probabilité π invariante par P est dite extrémale si elle ne peut pas s'écrire $\pi = t\pi_1 + (1-t)\pi_2$ avec $t \in]0,1[$ et π_1, π_2 2 probas invariantes distinctes.

NB : • L'ensemble des probas invariantes est un convexe.
Si π, σ sont invariantes et $t \in [0,1]$,
$(t\pi + (1-t)\sigma) P = t\pi P + (1-t)\sigma P = t\pi + (1-t)\sigma$.
• Mq si π et σ sont 2 probas invariantes extrémales distinctes alors $d_{TV}(\pi, \sigma) = 1$.
$\underbrace{\phantom{d_{TV}(\pi,\sigma)}}_{1 - \pi \wedge \sigma(E)}$

$$(\pi \wedge \sigma) P \leq (\pi P) \wedge (\sigma P) = \pi \wedge \sigma$$

Comme $\forall x \in E$, $P(x, E) = 1$,

$$\underbrace{(\pi \wedge \sigma) P(E)}_{\int_{x \in E} P(x,E)(\pi\wedge\sigma)(dx)} = (\pi \wedge \sigma)(E). \implies (\pi \wedge \sigma) P = \pi \wedge \sigma.$$

Comme $\pi \neq \sigma$, $\pi \wedge \sigma(E) < 1$. Supposons $\pi \wedge \sigma(E) > 0$ et obtenons une contradiction.

$\dfrac{\pi \wedge \sigma}{\pi \wedge \sigma(E)}$ est une proba distincte soit de π soit de σ.

Supposons qu'elle est distincte de π pour fixer les idées

$$\pi = (\pi \wedge \sigma)(E) \frac{\pi \wedge \sigma}{\pi \wedge \sigma(E)} + (1 - \pi \wedge \sigma(E)) \frac{\pi - \pi \wedge \sigma}{1 - \pi \wedge \sigma(E)}$$

par linéarité, $\pi - \pi \wedge \sigma$ invariante par P.

Comme $\pi \neq \pi \wedge \sigma$, $\dfrac{\pi \wedge \sigma}{\pi \wedge \sigma(E)} \neq \dfrac{\pi - \pi \wedge \sigma}{1 - \pi \wedge \sigma(E)}$

π s'écrit donc comme combinaison convexe stricte de 2 probas invariantes distinctes

Contradiction de l'extrémalité de π

Ainsi $\pi \perp \sigma\ (E)$ $\quad d_{TV}(\pi, \sigma) = 1$

et $\exists B \in \mathcal{E}$, tq $\sigma(B) = \pi(B^c) = 0$.

ie $\pi(B) = 1 = \sigma(B^c)$. $\blacksquare$

Prop : Soit π une proba invariante extrémale pour P.

Alors $\mathbb{P}_\pi\left((X_n)_{\in \mathbb{N}} \in A\right) \in \{0,1\}$ pour tout ensemble $A \in \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{N}}$ invariant par l'opérateur de décalage $T\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. En outre pour toute fonction mesurable $f : E \to \mathbb{R}$ tq $\pi(|f|) < +\infty$

alors $\mathbb{P}_\pi\left(\frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} f(X_\ell) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi(f)\right) = 1$

__Corollaire__ : Sous (D1) et (D2), $\forall \mu \in \mathcal{P}(E)$

$$\mathbb{P}_\mu\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \to \pi(f)\right) = 1$$

pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable et tq $\pi(|f|) < +\infty$ où π désigne l'unique proba invariante pour P.

__NB__ : • Comme π est l'unique proba invariante, elle est extrémale.

• Si $f : E \to \mathbb{R}_+$, $\mathbb{P}_\mu\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \to \pi(f)\right) = 1$, $\pi(f) \in [0,+\infty]$

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}_\mu\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)\wedge m \to \pi(f\wedge m)\right) = 1$ par corollaire.

Ainsi $\mathbb{P}_\mu\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \geq \underbrace{\pi(f\wedge m)}_{\downarrow \, \pi(f)}\right) = 1$

__Preuve du corollaire__ : Soit $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable tq $\pi(|f|) < +\infty$.

D'après la proposition, on a $\mathbb{P}_\pi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \to \pi(f)\right) = 1$

Comme $\mathbb{P}_\mu\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \to \pi(f)\right) = \int_E \mathbb{P}_x\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \to \pi(f)\right)\mu(dx)$

il suffit de montrer le résultat pour $\mu = \delta_x$ avec $x \in E$ qcq.

Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$ fixé,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=\ell}^{n+\ell-1} f(X_k) = \underbrace{\frac{n+\ell}{n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1} \times \frac{1}{n+\ell}\sum_{k=0}^{n+\ell-1} f(X_k) - \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\ell-1} f(X_k)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Donc $\mathbb{P}_x\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \to \pi(f)\right) = \mathbb{P}_x\left(\frac{1}{n}\sum_{k=\ell}^{n+\ell-1} f(X_k) \to \pi(f)\right)$

$= P^\ell(x,\cdot)(\varphi)$ par Markov

où $\varphi(y) = \mathbb{P}_y\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \to \pi(f)\right)$

$$\mathbb{P}_x\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \to \pi(f)\right) \geq \underbrace{\pi(\varphi)}_{1} - \left| P^\ell(x,\cdot)(\varphi - \tfrac{1}{2}) - \pi(\varphi - \tfrac{1}{2}) \right|$$

car $|\varphi - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$

$$\geq 1 - d_{TV}(P^\ell(x,\cdot), \pi)$$

$$\geq 1 - d_\beta(P^\ell(x,\cdot), \pi) \quad \text{où } \beta \in \left]0, \tfrac{\alpha}{K}\right[$$

$$\geq 1 - \underbrace{\chi^\ell}_{\in [0,1[} \underbrace{d_\beta(\delta_x, \pi)}_{\leq \delta_x(1+\beta V) + \pi(1+\beta V) \leq 2 + \beta V(x) + \frac{K}{1-\gamma} < +\infty}$$

$$\xrightarrow[\ell \to +\infty]{} 1$$

$\blacksquare$

Preuve de la proposition :

Soit $A \in \xi^{\otimes \mathbb{N}}$ invariant par l'opérateur de décalage T.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $Y_n = \mathbb{E}_\pi\left(\mathbb{1}_A((X_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}) \mid \mathcal{F}_n\right)$ où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$.

$(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une $\mathcal{F}_n$ mart fermée par $\mathbb{1}_A((X_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}})$

Elle converge $\mathbb{P}_\pi$ p.s. vers $\mathbb{1}_A((X_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}})$.

Par invariance de A par décalage

$$Y_n = \mathbb{E}_\pi\left[\mathbb{1}_A((X_\ell)_{\ell \geq n}) \mid \mathcal{F}_n\right] \overset{\text{Markov}}{=} \varphi(X_n) \quad \text{où } \varphi(x) = \mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_A((X_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}})\right)$$

$\varphi(X_n)$ et $Z_n := \sup_{\ell \geq n} \varphi(X_\ell)$ convergent $\mathbb{P}_\pi$ p.s. vers $\mathbb{1}_A((X_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}})$.

Sous $\mathbb{P}_\pi$, par invariance de π ces suites sont constantes en loi et ont même loi que $\mathbb{1}_A((X_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}})$.

$$\mathbb{P}_\pi(\varphi(X_n) \leq Z_n) = 1 = \mathbb{P}_\pi(Z_{n+1} \leq Z_n)$$

Donc $\mathbb{P}_\pi(\varphi(X_n) = Z_n) = 1$
$= \mathbb{P}_\pi(Z_{n+1} = Z_n)$

Donc $\mathbb{P}_\pi(\varphi(X_n)$ ne dépend pas de $n)$
$= 1$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_\pi\left(\varphi(X_n) = 1_A\left((X_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}\right)\right) = 1$.

Soit $B = \varphi^{-1}(1)$ $\quad \mathbb{P}_\pi$ p.s. $\forall n$, $1_B(X_n) = 1_A\left((X_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}\right)$

En particulier $\mathbb{P}_\pi$ p.s. $1_B(X_0) \overset{(\star)}{=} 1_B(X_1)$.

Supposons que $\pi(B) \in]0,1[$ et contredisons l'extrémalité de π :

Soit $\pi(\cdot \mid B)$ et $\pi(\cdot \mid B^c)$ les probas sur $(E, \mathcal{E})$ déf par

$$\pi(C \mid B) = \frac{\pi(C \cap B)}{\pi(B)} \quad \text{et} \quad \pi(C \mid B^c) = \frac{\pi(C \cap B^c)}{\pi(B^c)}$$

$$\pi(\cdot \mid B)P(C) = \frac{\mathbb{E}_\pi\left(1_B(X_0)1_C(X_1)\right)}{\pi(B)} \overset{(\star\star)}{=} \frac{\mathbb{E}_\pi\left(1_B(X_1)1_C(X_1)\right)}{\pi(B)}$$

$$\underset{\text{invariance de } \pi}{=} \frac{\pi(B \cap C)}{\pi(B)} = \pi(C \mid B)$$

Ainsi $\pi(\cdot \mid B)$ et de même $\pi(\cdot \mid B^c)$ sont invariantes par P.

Elles sont distinctes car $\pi(B^c \mid B) = \pi(B \mid B^c) = 0$. $\quad \pi = \pi(B)\pi(\cdot \mid B) + \pi(B^c)\pi(\cdot \mid B^c)$

On a contredit l'extrémalité de π

Ainsi $\pi(B) \in \{0,1\}$

et $\mathbb{P}_\pi \left(\mathbb{1}_A \left((X_k)_{k\in\mathbb{N}} \right) \right) = \pi(B) \in \{0,1\}$.

Par invariance de π, $\mathbb{P}_\pi$ est invariante par l'opérateur de décalage qui est ergodique.

En particulier $\forall F : E^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ mesurable tq $\mathbb{E}_\pi \left(\left| F\left((X_k)_{k\in\mathbb{N}} \right) \right| \right) < +\infty$, par le théorème de Birkhoff,

$$\mathbb{P}_\pi \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} F\left((X_k)_{k\geq j} \right) \longrightarrow \mathbb{P}_\pi(F) \right) = 1.$$

En appliquant cela à $F\left((x_k)_{k\in\mathbb{N}} \right) = f(x_0)$.

on obtient que $\mathbb{P}_\pi \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(X_j) \longrightarrow \pi(f) \right) = 1$ $\blacksquare$

V Théorème de la limite centrale pour les moyennes ergodiques :

Soit $\xi_n = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) - \pi(f)\right)$

Equation de Poisson : $\forall x \in E, \quad F(x) - PF(x) = f(x) - \pi(f)$

Inconnue fonction F, $(I-P)F = f - \pi(f)$

formellement $F = \sum_{k\in\mathbb{N}} P^k (f - \pi(f))$

$$\xi_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(F(X_k) - PF(X_k)\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(F(X_0) - PF(X_{n-1})\right) + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \left(F(X_k) - PF(X_{k-1})\right)}_{M^F_{n-1}}$$

$$M^F_n - M^F_{n-1} = F(X_n) - PF(X_{n-1}) \overset{\text{Markov}}{=} F(X_n) - \mathbb{E}(F(X_n) \mid \mathcal{F}_{n-1})$$

accroissement de mart si assez d'intég sur F.

On va appliquer le TLC pour les martingales.

$$\langle \tfrac{1}{\sqrt{n}} M^F\rangle_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}\left(\left(F(X_k) - PF(X_{k-1})\right)^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \left(PF^2(X_{k-1}) - (PF)^2(X_{k-1})\right)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{LFGN}} \pi\left(PF^2 - (PF)^2\right) = \pi\left(F^2 - (PF)^2\right)$$

Proposition : Supposons que P satisfait (D1) et (D2). Alors pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable tq $\sup_{x\in E} \frac{|f(x)|}{1+V(x)} < +\infty$

$F = \sum_{n\in\mathbb{N}} P^n(f - \pi(f))$ est solution de l'équation de Poisson

et vérifie $\sup_{x\in E} \frac{|F(x)|}{1+V(x)} < +\infty$.

Preuve : Soit $\beta \in \left]0, \frac{\alpha}{K}\right[$ et $x \in E$

$$|P^n f(x) - \pi(f)| \leq \|f\|_\beta \, d_\beta(P^n(x,\cdot), \pi) \leq \|f\|_\beta \, \chi^n \, d_\beta(\delta_x, \pi) \quad \chi \in [0,1[$$

$$\leq \|f\|_\beta \, \chi^n \left(\delta_x(1+\beta V) + \pi(1+\beta V)\right)$$

$$\leq \|f\|_\beta \, \chi^n \left(2 + \beta \frac{K}{1-\gamma} + \beta V(x)\right)$$

$$\|P^n f - \pi(f)\|_1 \leq \|f\|_\beta \left(\left(2 + \frac{\beta K}{1-\gamma}\right) \vee \beta\right) \chi^n$$

La série converge normalement dans $\mathcal{V} = \{g : E \to \mathbb{R} \text{ tq } \sup_{x\in E} \frac{|g(x)|}{1+V(x)} < +\infty\}$ muni de $\| \; \|_1$. Ainsi $F = \sum_{n\in\mathbb{N}} P^n(f - \pi(f))$ est dans $\mathcal{V}$.

Montrons que $g \in \mathcal{V} \to P_g$ est continue si $\mathcal{V}$ est muni de $\| \ \|_1$.

$$|P_g(x)| \leq \|g\|_1 \, P(1+V)(x) \overset{(D1)}{\leq} \left(1 + \gamma V(x) + K\right) \|g\|_1$$

$$\|P_g\|_1 \leq \Big(\underbrace{(1+K) \vee \gamma}_{1+K}\Big) \|g\|_1 .$$

L'application étant linéaire, elle est continue.

Donc
$$PF = \sum_{n \in \mathbb{N}} P\left(P^n(f - \pi(f))\right) = \sum_{n \geq 1} P^n(f - \pi(f))$$
$$= F - (f - \pi(f)).$$
$\square$

NB : $\pi(F) \leq \|F\|_1 \, \pi(1+V) \leq \|F\|_1 \left(1 + \frac{K}{1-\gamma}\right) < +\infty$

Mais il nous faut plutôt $\pi(F^2) < +\infty$.

On va renforcer la condition de dérive pour pouvoir utiliser $\sqrt{V}$ comme fonction de Lyapunov en plus de V.

$$P\sqrt{V}(x) \overset{\text{Jensen}}{\leq} \sqrt{PV(x)} \overset{\text{(D1) et } \sqrt{\ } \text{sous-add}}{\leq} \sqrt{\gamma V(x)} + \sqrt{K} \leq \sqrt{\gamma}\,\sqrt{V(x)} + \sqrt{K}.$$

Si $\sqrt{V(x)} + \sqrt{V(y)} \leq \sqrt{R}$ alors $V(x) + V(y) \leq R$

En supposant $\sqrt{R} > \dfrac{2\sqrt{K}}{1-\sqrt{\gamma}}$, on a (D1) et (D2) pour (V, γ, K, R) remplacé par $(\sqrt{V}, \sqrt{\gamma}, \sqrt{K}, \sqrt{R})$.

On suppose
- (D1) et
- (D2') $\exists R > \dfrac{4K}{(1-\sqrt{\gamma})^2}$, $\exists \alpha \in]0,1]$, $\forall x,y \in E$ $P(x,\cdot) \wedge P(y,\cdot)(E) \geq \alpha$

NB: $(1-\sqrt{\gamma})^2 \leq 1-\sqrt{\gamma} \leq 1-\gamma$ Donc $\dfrac{4K}{(1-\sqrt{\gamma})^2} \geq \dfrac{4K}{1-\gamma} \geq \dfrac{2K}{1-\gamma}$

Ainsi (D2') $\Rightarrow$ (D2)

Corollaire : Sous (D1) et (D2') si $\sup_{x \in E} \frac{|f(x)|}{1+\sqrt{V(x)}} < +\infty$, alors

$F = \sum_{n \in \mathbb{N}} P^n(f - \pi(f))$ est solution de l'équation de Poisson

et vérifie $\sup_{x \in E} \frac{|F(x)|}{1+\sqrt{V(x)}} < +\infty$.

Comme (D2') $\Rightarrow$ (D2) on garde $\pi(V) \leq \frac{K}{1-\gamma}$

Donc $\pi((1+\sqrt{V})^2)$ et $\pi(F^2)$ sont finis

Thm : Soit $(X_n)_n$ chaîne de Markov dont le noyau P satisfait (D1) et (D2'). Alors pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable et tq $\sup_{x \in E} \frac{|f(x)|}{1+\sqrt{V(x)}} < +\infty$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(X_k) - \pi(f)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_1\left(0, \pi(F^2) - \pi((PF)^2)\right).$$

où F est solution de l'équation de Poisson