$\pi(dx) = \eta(x)\,\lambda(dx)$ proba cible $\eta : E \to \mathbb{R}_+$ densité de proba par rapport à λ

$(E_i)_{i \in g}$ partition mesurable de E.

$$I : x \in E \longrightarrow \sum_{i=1}^{g} i\, \mathbb{1}_{E_i}(x)$$

$$\pi_\theta^\alpha(dx) = \frac{\eta(x)}{Z_\theta^\alpha\, \theta^\alpha(I(x))}\,\lambda(dx)$$ où $\theta \in \Theta$

ie $(\theta(1), \dots, \theta(g)) \in]0,1[^g$ et $\sum_{i=1}^{g} \theta(i) = 1$.

$$Z_\theta^\alpha = \sum_{i=1}^{g} \frac{\theta_*(i)}{\theta^\alpha(i)}$$ où $\theta_*(i) = \pi(E_i)$ et $\alpha \in [0,1]$.

SHUS$^\alpha$ $\alpha \in [0,1]$

SHUS$_\alpha$: $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1]$

partant de $(\tilde{\theta}_0, X_0)$ dans $(\mathbb{R}_+^*)^d \times E$ on déduit les $(\tilde{\theta}_n, X_n)$ à $(\tilde{\theta}_{n+1}, X_{n+1})$

3 étapes suivantes pour passer de

1) normalisation $S_n = \sum_{i=1}^{d} \tilde{\theta}_n(i)$ $\theta_n = \frac{\tilde{\theta}_n}{S_n} \in \Theta$.

2) génération de $X_{n+1} \sim P^\alpha_{\theta_n}(X_n, \cdot)$ où $P^\alpha_\theta(x, \cdot)$

noyau MH cible π^α_θ.

3) mise à jour des poids

$$\tilde{\theta}_{n+1}(i) = \tilde{\theta}_n(i) + \frac{\gamma}{g_\alpha(S_n)} S_n \, \theta_n^\alpha(i) \, \mathbb{1}_{E_i}(X_{n+1}) \text{ pour } i \in \{1, \dots, d\}$$

où $\gamma > 0$

$$g_\alpha(s) = \begin{cases} s & \text{si } \alpha = 1 \\ (\ln(1+s))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} & \text{si } \alpha \in]\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$$

On pose $\gamma_{n+1} = \dfrac{\gamma}{g_\alpha(S_n)}$.

$$\theta_{n+1}(i) = \theta_n(i) + \gamma_{n+1} H_i(\theta_n, X_{n+1}) + \gamma_{n+1}^2 \frac{\theta_n^{2\alpha}(I(X_{n+1}))\left(\theta_n(i) - 1_{E_i}(X_{n+1})\right)}{1+\gamma_{n+1}\theta_n^{\alpha}(I(X_{n+1}))}$$

$$H_i(\theta, x) = \theta^\alpha(i)\, 1_{E_i}(x) - \theta(i)\,\theta^\alpha(I(x))$$

$$h_i(\theta) = \int_E H_i(\theta, x)\, \pi_\theta^\alpha(dx) = \frac{\cancel{\theta^\alpha(i)}\,\theta_*(i)}{Z_\theta^\alpha\,\cancel{\theta^\alpha(i)}} - \theta(i) \sum_{j=1} \frac{\cancel{\theta^\alpha(j)}\,\theta_*(j)}{Z_\theta^\alpha\,\cancel{\theta^\alpha(j)}}$$

$$= \frac{1}{Z_\theta^\alpha}\left(\theta_*(i) - \theta(i)\right).$$

$$\hat{H}_\theta(x) - P_\theta^\alpha \hat{H}_\theta(x) = H(\theta, x) - h(\theta)$$

$$H(\theta_n, X_{n+1}) = h(\theta_n) + \hat{H}_{\theta_n}(X_{n+1}) - P_{\theta_n}^\alpha \hat{H}_{\theta_n}(X_{n+1})$$

$$= h(\theta_n) + \underbrace{\hat{H}_{\theta_n}(X_{n+1}) - P_{\theta_n}^\alpha \hat{H}_{\theta_n}(X_n)}_{\text{accroiss mart}} + \underbrace{P_{\theta_n}^\alpha \hat{H}_{\theta_n}(X_n) - P_{\theta_{n+1}}^\alpha \hat{H}_{\theta_{n+1}}(X_{n+1})}_{\text{telescopique} + P_{\theta_{n+1}}^\alpha \hat{H}_{\theta_{n+1}}(X_{n+1}) - P_{\theta_n}^\alpha \hat{H}_{\theta_n}(X_{n+1})}$$

petit

$\theta \to P_\theta^\alpha \hat{H}_\theta(x)$ est regulier

Régularité de $\theta \to P_\theta^\alpha \hat{H}_\theta$?

Hypothèses : (A1) $\sup_{x \in E} \eta(x) < +\infty$ $\quad (\forall i \quad \theta_*(i) = \pi(E_i) > 0)$.

(A2) P_θ^α noyau de MH qui cible π_θ^α avec une densité de proposition $q(x,y)$ symétrique (i.e. $\forall x,y \in E \quad q(x,y) = q(y,x)$) et vérifiant $\inf_{(x,y) \in E^2} q(x,y) > 0$.

Prop : Sous (A1) et (A2), $\exists\, \tilde{\alpha} \in (0,1)$ tq $\forall \theta \in \Theta, \forall x \in E$

$$P_\theta^\alpha(x, \cdot) \geq \tilde{\alpha}\, \pi_\theta^\alpha(\cdot)$$

Preuve : Soit $x \in E$, $\theta \in \Theta$, $A \in \mathcal{E}$

$$P_\theta^\alpha(x, A) \geq \int_A q(x,y) \left(1 \wedge \frac{\eta_\theta^\alpha(y)}{\eta_\theta^\alpha(x)} \right) \lambda(dy)$$

$$\left(1 \wedge \frac{\eta_\theta^\alpha(y)}{\eta_\theta^\alpha(x)}\right) \leq \frac{\eta_\theta^\alpha(y)}{\sup_{z \in E} \eta_\theta^\alpha(z)} \quad \text{où} \quad \eta_\theta^\alpha(z) = \frac{\eta(z)}{Z_\theta^\alpha\, \theta^\alpha(I(z))}.$$

$$\geq \frac{\inf_{(x,y) \in E^2} q(x,y)}{\sup_{x \in E} \eta_\theta^\alpha(x)} \int_A \eta_\theta^\alpha(y)\, \lambda(dy) = \frac{\overbrace{\inf_{(x,y) \in E^2} q(x,y)}^{>0 \text{ par (A2)}}}{\sup_{x \in E} \eta_\theta^\alpha(x)}\, \pi_\theta^\alpha(A).$$

$$\eta_\theta^\alpha(x) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{g} 1_{E_i}(x) \frac{\eta(x)}{\theta^\alpha(i)}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{g} \frac{\theta_*(j)}{\theta^\alpha(j)}} \le \sum_{i=1}^{g} 1_{E_i}(x) \frac{\eta(x)\,\cancel{\theta^\alpha(i)}}{\cancel{\theta^\alpha(i)}\,\theta_*(i)}$$

$$\le \frac{\sup_{z\in E} \eta(z)}{\min_{1\le i\le g} \theta_*(i)}.$$

Conclusion avec

$$\alpha = \frac{\inf_{(x,y)\in E^2} q(x,y) \times \min_{1\le i \le g} \theta_*(i)}{\sup_{z\in E} \eta(z)}$$

$\blacksquare$

<u>Lemme</u>

$\forall\, \theta_1, \theta_2 \in \Theta$

$$d_{TV}\left(\pi^\alpha_{\theta_1}, \pi^\alpha_{\theta_2}\right) \le (g-1) \sum_{i=1}^{g} \left| 1 - \frac{\theta_2^\alpha(i)}{\theta_1^\alpha(i)} \right|$$

On peut bien sûr remplacer

$$\sum_{i=1}^{g} \left| 1 - \frac{\theta_2^\alpha(i)}{\theta_1^\alpha(i)} \right| \text{ par } \sum_{i=1}^{g} \left| 1 - \frac{\theta_2^\alpha(i)}{\theta_1^2(i)} \right| \wedge \sum_{i=1}^{g} \left| 1 - \frac{\theta_1^\alpha(i)}{\theta_2^\alpha(i)} \right|$$

preuve :

$$\eta_\theta^\alpha(x) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{g} \frac{1_{E_i}(x)}{\theta_*(i)} \, \frac{\eta(x)\,\theta_*(i)}{\theta^\alpha(i)}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{g} \frac{\theta_*(j)}{\theta^\alpha(j)}}$$

$$2\, d_{TV}\left(\pi^\alpha_{\theta_1}, \pi^\alpha_{\theta_2}\right) = \int_E \left| \eta^\alpha_{\theta_1}(x) - \eta^\alpha_{\theta_2}(x) \right| \lambda(dx)$$

$$= \sum_{i=1}^{g} \int_{E_i} \left| \frac{\frac{\theta_*(i)}{\theta_1^\alpha(i)}}{\sum_{j=1}^{g} \frac{\theta_*(j)}{\theta_1^\alpha(j)}} - \frac{\frac{\theta_*(i)}{\theta_2^\alpha(i)}}{\sum_{j=1}^{g} \frac{\theta_*(j)}{\theta_2^\alpha(j)}} \right| \frac{\eta(x)}{\theta_*(i)} \lambda(dx)$$

$$= \sum_{i=1}^{g} \left| \frac{\frac{\theta_*(i)}{\theta_1^\alpha(i)}}{\sum_{j=1}^{g} \frac{\theta_*(j)}{\theta_1^\alpha(j)}} - \frac{\frac{\theta_*(i)}{\theta_2^\alpha(i)}}{\sum_{j=1}^{g} \frac{\theta_*(j)}{\theta_2^\alpha(j)}} \right| \leq \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{g} \frac{\left| \frac{\theta_*(i)}{\theta_1^\alpha(i)} \frac{\theta_*(j)}{\theta_2^\alpha(j)} - \frac{\theta_*(i)}{\theta_2^\alpha(i)} \frac{\theta_*(j)}{\theta_1^\alpha(j)} \right|}{\sum_{\ell=1}^{g} \frac{\theta_*(\ell)}{\theta_1^\alpha(\ell)} \sum_{\ell=1}^{g} \frac{\theta_*(\ell)}{\theta_2^\alpha(\ell)}}$$

$$- \theta_2^{\alpha}(i)\theta_2^{\alpha}(j) + \theta_2^{\alpha}(i)\,\theta_2^{\alpha}(j)$$

numerator

$$N = \sum_{i=1}^{g} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{g} \theta_*(i)\,\theta_*(j) \left| \frac{\theta_2^{\alpha}(i)\,\theta_1^{\alpha}(j) - \theta_2^{\alpha}(j)\,\theta_1^{\alpha}(i)}{\theta_2^{\alpha}(i)\,\theta_1^{\alpha}(j)\;\theta_2^{\alpha}(j)\,\theta_1^{\alpha}(i)} \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{g} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{g} \left\{ \frac{\theta_*(i)\,\theta_*(j)}{\theta_2^{\alpha}(j)\,\theta_1^{\alpha}(i)} \left| \frac{\theta_1^{\alpha}(j) - \theta_2^{\alpha}(j)}{\theta_1^{\alpha}(j)} \right| + \frac{\theta_*(i)\,\theta_*(j)}{\theta_2^{\alpha}(i)\,\theta_1^{\alpha}(j)} \left| \frac{\theta_2^{\alpha}(i) - \theta_1^{\alpha}(i)}{\theta_1^{\alpha}(i)} \right| \right\}$$

$$\leq 2 \sum_{i=1}^{g} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{g} \frac{\theta_*(i)\,\theta_*(j)}{\theta_2^{\alpha}(j)\,\theta_1^{\alpha}(i)} \left| 1 - \frac{\theta_2^{\alpha}(j)}{\theta_1^{\alpha}(j)} \right|$$

$$\sum_{\ell=1}^{g} \frac{\theta_*(\ell)}{\theta_1^{\alpha}(\ell)} \sum_{\ell=1}^{g} \frac{\theta_*(\ell)}{\theta_2^{\alpha}(\ell)} \geq \frac{\theta_*(i)\,\theta_*(j)}{\theta_2^{\alpha}(j)\,\theta_1^{\alpha}(i)}$$

$$2\, d_{TV}\left(\pi^{\alpha}_{\theta_1}, \pi^{\alpha}_{\theta_2}\right) \leq 2 \sum_{j=1}^{g} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{g} \left| 1 - \frac{\theta_2^{\alpha}(j)}{\theta_1^{\alpha}(j)} \right| = 2(g-1) \sum_{j=1}^{g} \left| 1 - \frac{\theta_2^{\alpha}(j)}{\theta_1^{\alpha}(j)} \right|$$

$\blacksquare$

Lemme : • $d_{TV}\left(P^{\alpha}_{\theta_1}(x,\cdot),\ P^{\alpha}_{\theta_2}(x,\cdot)\right) \leq \alpha \max_{1\leq i\leq g} \left|1-\dfrac{\theta_2^{\alpha}(i)}{\theta_1^{\alpha}(i)}\right|$

• $\exists\ C<\infty \quad \forall\ \theta_1,\theta_2\in\Theta$

$$\sup_{x\in E}\left\{\left|\hat{H}_{\theta_2}(x)-\hat{H}_{\theta_1}(x)\right| + \left|P^{\alpha}_{\theta_1}\hat{H}_{\theta_1}(x)-P^{\alpha}_{\theta_2}\hat{H}_{\theta_2}(x)\right|\right\}$$
$$\leq C\left(|\theta_1-\theta_2| + \sum_{i=1}^{g}\left|1-\frac{\theta_2^{\alpha}(i)}{\theta_1^{\alpha}(i)}\right|\right).$$

Approximation stochastique :

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \gamma_{n+1}\left(h(\theta_n) + \xi_n\right)$$

$\omega(\theta)$ tq $h(\theta) \cdot \nabla\omega(\theta) < 0$ pour $\theta \neq \theta_*$ où θ_* minimise ω

Ici $\omega(\theta) = \sum_{i=1}^{g} \theta_*(i) \ln \dfrac{\theta_*(i)}{\theta(i)}$.

$\Theta = \{\theta \in]0,1[^g$ tq $\theta(1) + \dots + \theta(g) = 1\}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^g$

$\hat{\Theta} = \{\hat\theta \in]0,1[^{g-1}$ tq $\hat\theta(1) + \dots + \hat\theta(g-1) < 1\}$ ouvert de $\mathbb{R}^{g-1}$

pour $\hat\theta \in \hat\Theta$ on pose $\hat\theta_+ = \left(\hat\theta(1), \dots, \hat\theta(g-1), 1 - (\hat\theta(1) + \dots + \hat\theta(g-1))\right) \in \Theta$.

$$\hat h_i(\hat\theta) = \frac{1}{2\alpha\hat\theta_+}\left(\theta_*(i) - \hat\theta(i)\right) \quad 1 \leq i \leq g-1$$

$$\hat\omega(\hat\theta) = \sum_{i=1}^{g-1} \theta_*(i) \ln\left(\frac{\theta_*(i)}{\hat\theta(i)}\right) + \theta_*(g) \ln\left(\frac{\theta_*(g)}{1 - \sum_{i=1}^{g-1}\hat\theta(i)}\right)$$

$$\partial_{\hat\theta(i)} \hat\omega(\hat\theta) = -\frac{\theta_*(i)}{\hat\theta(i)} + \frac{\theta_*(g)}{1-\sum_{j=1}^{g-1}\hat\theta(j)}$$

$$\hat h(\hat\theta)\cdot\nabla\hat\omega(\hat\theta) = -\frac{1}{Z_{\hat\theta_+}}\sum_{i=1}^{g-1}\left(\theta_*(i)-\hat\theta(i)\right)\frac{\theta_*(i)}{\hat\theta(i)} \underbrace{+\frac{1}{Z_{\hat\theta_+}}\sum_{i=1}^{g-1}\frac{\theta_*(g)}{1-\sum_{j=1}^{g-1}\hat\theta(j)}\left(\theta_*(i)-\hat\theta(i)\right)}_{-\frac{\theta_*(g)}{Z_{\hat\theta_+}\underbrace{\left(1-\sum_{j=1}^{g-1}\hat\theta(j)\right)}_{\hat\theta_+(g)}}\underbrace{\left(1-\sum_{i=1}^{g-1}\theta_*(i)-\left(1-\sum_{i=1}^{g-1}\hat\theta(i)\right)\right)}_{\theta_*(g)-\hat\theta_+(g)}}$$

$$= h(\hat\theta_+)\cdot\nabla\omega(\hat\theta_+)$$

$$< 0 \text{ si } \hat\theta \neq \left(\theta_*(1),\dots,\theta_*(g-1)\right)$$

ch IV Stabilité et convergence des algorithmes stochastiques

$d_\theta \in \mathbb{N}^*$ Θ ouvert de $\mathbb{R}^{d_\theta}$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \gamma_{n+1}\left(h(\theta_n) + \xi_n\right), \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (*)$$

suite à valeurs dans Θ où $h : \Theta \to \mathbb{R}^{d_\theta}$

et $(\gamma_{n+1}, \xi_n)_{n \geq 0}$ suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^{d_\theta}$

<u>fonction de Lyapunov :</u> $\quad w : \Theta \to \mathbb{R}_+$ mesurable

Pour $M' \geq M \geq 0$,

$$\mathcal{W}^M = \{\theta : \Theta \text{ tq } w(\theta) \leq M\}.$$

$$\mathcal{W}_M^{M'} = \{\theta \in \Theta \text{ tq } M \leq w(\theta) \leq M'\}.$$

__Exemple :__ Robbins Monro où $\Theta = \mathbb{R}^{d_\theta}$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \gamma_{n+1} Y_{n+1}$$

où $(Y_n)_n$ est une suite de va de carré intég à valeurs dans $\mathbb{R}^{d_\theta}$ tq si $\mathcal{F}_n = \sigma(\theta_0, Y_1, \dots, Y_n)$

$$\mathbb{E}(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) = h(\theta_n)$$

Se réécrit sous forme $(*)$: $\theta_{n+1} = \theta_n + \gamma_{n+1}(h(\theta_n) + \xi_n)$

avec $\xi_n = Y_{n+1} - \mathbb{E}(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n)$ accroissement de martingale.

__Prop :__ Supposons h continue sur Θ, ω C^1 sur Θ et $\exists$ $0 < M_0 < M_1 < +\infty$ tq $\mathcal{W}^{M_1}$ est un compact de $\mathbb{R}^d$ et $h \cdot \nabla\omega < 0$ sur $\mathcal{W}^{M_1}_{M_0}$.

Pour tous M, M' tq $M_0 < M < M' < M_1$ il existe $\delta, \eta > 0$ tq si $\theta_0 \in \mathcal{W}^M$, la suite $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ est à valeurs dans $[0, \delta]$, la suite $(\xi_n)_{n \geq 1}$

vérifie $\xi_n = \xi_n^1 + \xi_n^2$ avec $\sup_{n\geq 1}\left(\left|\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\xi_k^1\right| + \left|\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\xi_k^2 \mathbb{1}_{W^{M_1}}(\theta_{k-1})\right|\right) \leq \eta$

alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\theta_n \in W^{M'} \subset W^{M_1}$.

Corollaire : Sous les hypothèses de la proposition, si

$\lim_{n\to+\infty} \gamma_n = 0$ et $\xi_n = \xi_n^1 + \xi_n^2$ tq

$\lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n}\left(\left|\sum_{j=n}^{k}\gamma_j\xi_j^1\right| + \left|\sum_{j=n}^{k}\gamma_j\xi_j^2 \mathbb{1}_{W^{M_1}}(\theta_{j-1})\right|\right) = 0$

et il existe $M \in]M_0, M_1[$ tq $(\theta_n)_{n\geq 1}$ est infiniment souvent dans W^M, alors $\forall M' \in]M, M^1[$, $\exists N < +\infty$ tq $\forall n \geq N$, $\theta_n \in W^{M'}$

Preuve du Corollaire : Soit $M' \in]M, M'[$ et (δ, η) les constantes associées à (M, M') d'après la proposition.

Par hypothèse $\exists\, n_{\delta,\eta} < \infty$ tq $\forall n \geq n_{\delta,\eta}$

$\gamma_n \leq \delta$

$\sup_{k\geq n}\left(\left|\sum_{j=n}^{k}\gamma_j\xi_j^1\right| + \left|\sum_{j=n}^{k}\gamma_j\xi_j^2 \mathbb{1}_{W^{M_1}}(\theta_{j-1})\right|\right) \leq \eta$.

$\{n \geq n_{\delta,\eta}$ tq $\theta_n \in \mathcal{W}^M\}$ est infini donc non vide

On note N son minimum.

On applique la proposition à la suite décalée, $(\theta_{N+n})_{n\in\mathbb{N}}$ pour conclure que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\theta_{N+n} \in \mathcal{W}^M$

<u>Lemme</u> : Supposons h continue ω C^1 sur Θ et il existe $M_1 \in]0,+\infty[$ tq $\mathcal{W}^{M_1}$ est un compact de $\mathbb{R}^{d_\theta}$.

Alors

i) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \hat{\eta}_\varepsilon > 0$, $\forall \hat{\theta} \in \mathcal{W}^{M_1}$, $\forall \tilde{\theta} \in \mathbb{R}^{d_\theta}$ tq $|\tilde{\theta} - \hat{\theta}| \leq \hat{\eta}_\varepsilon$ alors $\tilde{\theta} \in \Theta$ et $|\omega(\tilde{\theta}) - \omega(\hat{\theta})| \vee |h(\tilde{\theta}) - h(\hat{\theta})| \leq \varepsilon$

ii) pour tout sous-ensemble compact K de $\mathcal{W}^{M_1}$ tq $\nabla\omega \cdot h < 0$ sur K

$\exists \delta, \lambda, \beta > 0$, $\forall \bar{\theta} \in K$, $\forall \gamma \in [0,\delta]$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^{d_\theta}$ tq $|\xi| \leq \lambda$, $\bar{\theta} + \gamma(h(\bar{\theta}) + \xi) \in \Theta$ et $\omega(\bar{\theta} + \gamma(h(\bar{\theta}) + \xi)) \leq \omega(\bar{\theta}) - \beta\gamma$

iii) Si en outre il existe $M_0 \in]0, M_1[$ tq $\nabla\omega \cdot h < 0$ sur $\mathcal{W}_{M_0}^{M_1}$ alors

$\forall M \in]M_0, M_1[$ / $\exists \delta, \lambda > 0$, $\forall \bar\theta \in \mathcal{W}^M$, $\forall \gamma \in [0, \delta]$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$ tq $|\xi| \leq \lambda$,

$$\bar\theta + \gamma(h(\bar\theta) + \xi) \in \mathcal{W}^M.$$

Preuve de la proposition :

Soit M, M' tq $M_0 < M < M' < M_1$ et $(\bar\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\bar\theta_0 = \theta_0$ et $\bar\theta_{n+1} = \bar\theta_n + \gamma_{n+1} h(\theta_n)$.

$$\theta_n - \bar\theta_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \xi_k.$$

Soit $\hat\eta_\varepsilon$ la constante donnée par $1^{ère}$ assertion du lemme

(δ, λ) les constantes données par $3^{ème}$ assertion du lemme

et $\eta = \hat\eta_{M'-M} \wedge \hat\eta_\lambda$.

On suppose que $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ est à valeurs dans $[0,\delta]$ et

$$\sup_{n\geq 1}\left(\left|\sum_{\ell=1}^{n}\gamma_\ell \xi_\ell^1\right| + \left|\sum_{\ell=1}^{n}\gamma_\ell \xi_\ell^2 \mathbb{1}_{W^{M_1}}(\theta_{\ell-1})\right|\right) \leq \eta.$$

Montrons par récurrence sur n que pour tout $\ell\in\{0,\dots,n\}$ $\bar\theta_\ell \in W^M$ et $\theta_\ell \in W^{M'}$.

Initialisation : $\bar\theta_0 = \theta_0 \in W^M \subset W^{M'} (\subset W^{M_1})$

Supposons l'hypothèse de récurrence vraie au rang n :

$$\sum_{\ell=1}^{n}\gamma_\ell \xi_\ell = \sum_{\ell=1}^{n}\gamma_\ell \xi_\ell^1 + \sum_{\ell=1}^{n}\gamma_\ell \xi_\ell^2 \mathbb{1}_{W^{M_1}}(\theta_{\ell-1})$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{\ell=1}^{n}\gamma_\ell \xi_\ell\right| \leq \eta$$

$$\Rightarrow |\bar\theta_n - \theta_n| \leq \eta \leq \hat\eta_\lambda$$

Par le lemme i) $|h(\theta_n) - h(\bar\theta_n)| \leq \lambda$

$$\bar\theta_{n+1} = \bar\theta_n + \gamma_{n+1} h(\theta_n) = \bar\theta_n + \underbrace{\gamma_{n+1}}_{\leq\delta}\Big(h(\bar\theta_n) + \underbrace{(h(\theta_n) - h(\bar\theta_n))}_{|\ \ |\leq\lambda}\Big)$$

Par (iii) lemme, $\bar\theta_{n+1}\in W^M$

$$\theta_{n+1} - \bar\theta_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k \xi_k = \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k \xi_k^1 + \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k \xi_k^2 \mathbb{1}_{\mathcal{W}^{M_1}}(\theta_{k-1})$$

$$|\theta_{n+1} - \bar\theta_{n+1}| \le \eta \le \hat\eta_{M'-M}$$

D'après lemme i) $\quad |w(\theta_{n+1}) - w(\bar\theta_{n+1})| \le M' - M$

donc $\quad w(\theta_{n+1}) \le w(\bar\theta_{n+1}) + |w(\theta_{n+1}) - w(\bar\theta_{n+1})| \le \cancel{M} + M' - \cancel{M}$
$\le M'$.

ie $\quad \theta_{n+1} \in \mathcal{W}^{M'}$. ∎

Preuve du lemme :

Montrons (ii)

et commençons par établir que

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta_\varepsilon > 0, \ \forall \hat\theta \in \mathcal{W}^{M_1} \ \forall \tilde\theta \in \mathbb{R}^{d_\theta}$ tq $|\tilde\theta - \hat\theta| \le \eta_\varepsilon$, $\tilde\theta \in \Theta$
et $|\nabla w(\tilde\theta) - \nabla w(\hat\theta)| \le \varepsilon$.

(i) s'obtient en appliquant le même raisonnement à h et w qu'à ∇w.

Par continuité de $\nabla \omega$, pour tout $\theta \in \Theta$, $\exists \, \eta_\theta > 0$ tq $B(\theta, \eta_\theta) \subset \Theta$ ouvert et $\forall \hat{\theta} \in B(\theta, \eta_\theta)$, $|\nabla \omega(\hat{\theta}) - \nabla \omega(\theta)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Comme $\mathcal{W}^{M_1}$ est compact il est recouvert par un nb fini de boules $B(\theta, \frac{\eta_\theta}{2})$ et on note η_ε le rayon minimum de ces boules.

Si $\hat{\theta} \in \mathcal{W}^{M_1}$, $\hat{\theta}$ est dans l'une de ces boules : $B(\theta, \frac{\eta_\theta}{2})$

Pour $\tilde{\theta}$ tq $|\hat{\theta} - \tilde{\theta}| \leq \eta_\varepsilon$

$$|\theta - \tilde{\theta}| \leq |\theta - \hat{\theta}| + |\hat{\theta} - \tilde{\theta}| \leq \frac{\eta_\theta}{2} + \underbrace{\eta_\varepsilon}_{\leq \frac{\eta_\theta}{2}} \leq \eta_\theta$$

Ainsi $\tilde{\theta} \in \Theta$ et
$$|\nabla \omega(\tilde{\theta}) - \nabla \omega(\hat{\theta})| \leq \underbrace{|\nabla \omega(\tilde{\theta}) - \nabla \omega(\theta)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|\nabla \omega(\theta) - \nabla \omega(\hat{\theta})|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \leq \varepsilon .$$

Soit K sous-ensemble compact non vide de $\mathcal{W}^M$, tq $\nabla\omega . h < 0$ sur K.

Soit $\varepsilon = \dfrac{-\sup_{\beta\in K} \nabla\omega . h(\beta)}{2\sup_{\beta\in K} |h(\beta)|}$ et $\bar\theta\in K$ NB: $\varepsilon \le \sup_{\beta\in K} \dfrac{|\nabla\omega(\beta)|}{2}$

$\forall\theta\in\mathbb{R}^{d}$ tq $|\beta - \bar\beta| \le \eta_\varepsilon$, $\beta\in$ (H)

$$|\nabla\omega(\beta)| \le |\nabla\omega(\bar\beta)| + \underbrace{|\nabla\omega(\beta) - \nabla\omega(\bar\beta)|}_{\le\varepsilon} \le \sup_{\tilde\beta\in K} |\nabla\omega(\tilde\beta)| + \sup_{\tilde\beta\in K}\frac{|\nabla\omega(\tilde\beta)|}{2}$$
$$= \frac{3}{2}\sup_{\tilde\beta\in K}|\nabla\omega(\tilde\beta)|.$$

$$\nabla\omega(\theta) . h(\bar\theta) \le \nabla\omega(\bar\theta) . h(\bar\theta) + \underbrace{|\nabla\omega(\theta) - \nabla\omega(\bar\theta)|}_{\le\varepsilon} \times |h(\bar\theta)|$$
$$\le -\sup_{\tilde\theta\in K}\nabla\omega . h(\tilde\theta) + \frac{1}{2}\sup_{\tilde\theta\in K}\nabla\omega . h(\tilde\theta)$$
$$= -\frac{1}{2}\sup_{\tilde\theta\in K}\nabla\omega . h(\tilde\theta)$$

Soit $\gamma\in\left[0, \dfrac{\eta_\varepsilon}{2\sup_{\theta\in K}|h(\theta)|}\right]$ et $|\xi| \le \sup_{\theta\in K}|h(\theta)|$ $\quad |\bar\theta + \gamma(h(\bar\theta)+\xi) - \bar\theta| \le \eta_\varepsilon$

Ainsi pour tout $t \in [0,1]$, $\bar\theta + \gamma t(h(\bar\theta)+\xi) \in \Theta$

$$\left|\nabla \omega\left(\bar\theta + \gamma t\left(h(\bar\theta)+\xi\right)\right)\right| \leq \frac{3}{2} \sup_{\tilde\theta \in K} |\nabla\omega(\tilde\theta)|$$

$$\nabla\omega\left(\bar\theta+\gamma t\left(h(\bar\theta)+\xi\right)\right) . h(\bar\theta) \leq -\frac{1}{2} \sup_{\tilde\theta\in K} \nabla\omega . h(\tilde\theta)$$

$$\omega\left(\bar\theta+\gamma\left(h(\bar\theta)+\xi\right)\right) - \omega(\bar\theta)$$

$$= \int_{t=0}^{1} \nabla\omega\left(\bar\theta+\gamma t\left(h(\bar\theta)+\xi\right)\right) . \gamma\left(h(\bar\theta)+\xi\right) dt$$

$$\leq -\frac{\gamma}{2} \sup_{\tilde\theta\in K} \nabla\omega . h(\tilde\theta) + \frac{3\gamma}{2} \sup_{\tilde\theta\in K} |\nabla\omega(\tilde\theta)| \, |\xi|$$

membre de droite ≤ 0 si $|\xi| \leq \dfrac{-\sup_{\tilde\theta\in K} \nabla\omega . h(\tilde\theta)}{3 \sup_{\tilde\theta\in K} |\nabla\omega(\tilde\theta)|}$.

$\Rightarrow |\xi| \leq \sup_{\tilde\theta\in K} \dfrac{|h(\tilde\theta)|}{3}$

$$\leq -\frac{\gamma}{4} \sup_{\tilde\theta\in K} \nabla\omega . h(\tilde\theta) \quad \text{si} \quad |\xi| \leq \frac{-\sup_{\tilde\theta\in K} \nabla\omega . h(\tilde\theta)}{6 \sup_{\tilde\theta\in K} |\nabla\omega(\tilde\theta)|}$$

et alors

$$\omega\left(\bar\theta+\gamma\left(h(\bar\theta)+\xi\right)\right) \leq \omega(\bar\theta) - \frac{\gamma}{4} \sup_{\tilde\theta\in K} \nabla\omega . h(\tilde\theta)$$

Ainsi (ii) est vraie avec $\eta = -\frac{1}{4}\sup_{\tilde\theta\in K} \nabla\omega\cdot h(\tilde\theta)$

Pour $\delta = \dfrac{\eta_\varepsilon}{2\sup_{\tilde\theta\in K}|h(\tilde\theta)|}$ avec $\varepsilon = -\dfrac{\sup_{\tilde\theta\in K}\nabla\omega\cdot h(\tilde\theta)}{2\sup_{\tilde\theta\in K}|h(\tilde\theta)|}$

et $\lambda = -\dfrac{\sup_{\tilde\theta\in K}\nabla\omega\cdot h(\tilde\theta)}{6\sup_{\tilde\theta\in K}|\nabla\omega(\tilde\theta)|}$

Supposons enfin l'existence de $M_0 \in]0, M_1[$ tq $\nabla\omega\cdot h<0$ sur W^{M_1} et choisissons $M\in]M_0, M_1[$.

Supposons $W^{M}_{M_0}$ non vide et même W^{M_0} et $W^{M}_{M_0}$ tous 2 non vides.

si $\bar\theta\in W^{M_0}$, $\gamma\in\left[0, \dfrac{\hat\eta_{M-M_0}}{1+\sup_{\theta\in W^{M_0}}|h(\theta)|}\right]$ et $|\xi|\le 1$

$|\bar\theta+\gamma(h(\bar\theta)+\xi)-\bar\theta| \le \hat\eta_{M-M_0}$ et $\bar\theta+\gamma(h(\bar\theta)+\xi)\in\Theta$ donc par (i) $|\omega(\bar\theta+\gamma(h(\bar\theta)+\xi))-\omega(\bar\theta)| \le M-M_0$

et donc $\omega(\bar\theta+\gamma(h(\bar\theta)+\xi)) \le M_0+M-M_0 = M$

Si $\bar\theta \in \mathcal{W}_{M_0}^{M}$, on applique ii) avec $X = \mathcal{W}_{M_0}^{M_1}$

en utilisant le cas avec membre de droite négatif

$$\omega(\bar\theta + \gamma(h(\bar\theta)+\xi)) \leq \omega(\bar\theta)$$

si $\gamma \leq \dfrac{\eta_\varepsilon}{2 \sup_{\tilde\theta \in \mathcal{W}_{M_0}^{M_1}} |h(\tilde\theta)|}$ avec $\varepsilon = \dfrac{-\sup_{\tilde\theta \in \mathcal{W}_{M_0}^{M_1}} \nabla\omega \cdot h(\tilde\theta)}{2 \sup_{\tilde\theta \in \mathcal{W}_{M_0}^{M_1}} |h(\tilde\theta)|}$

$$\lambda \leq \frac{-\sup_{\tilde\theta \in \mathcal{W}_{M_0}^{M_1}} \nabla\omega \cdot h(\tilde\theta)}{3 \sup_{\tilde\theta \in \mathcal{W}_{M_0}^{M_1}} |\nabla\omega(\tilde\theta)|}$$

<u>Synthèse des 2</u> : $\delta = \dfrac{\hat\eta_{M-M_0}}{1 + \sup_{\tilde\theta \in \mathcal{W}^{M_0}} |h(\tilde\theta)|} \wedge \dfrac{\eta_\varepsilon}{2 \sup_{\tilde\theta \in \mathcal{W}_{M_0}^{M_1}} |h(\tilde\theta)|}$

$$\lambda = 1 \wedge \frac{-\sup_{\tilde\theta \in \mathcal{W}_{M_0}^{M_1}} \nabla\omega \cdot h(\tilde\theta)}{3 \sup_{\tilde\theta \in \mathcal{W}_{M_0}^{M_1}} |\nabla\omega(\tilde\theta)|}$$

$\boxtimes$

$$\mathcal{L} = \{\theta \in \Theta : \nabla w \cdot h(\theta) = 0\}$$

Thm : Supposons h est continue, w C^1 et $\exists\, 0 < M_0 < M_1 < +\infty$ tq $\mathcal{L} \cap W_{M_0}^{M_1} = \emptyset$, W^{M_1} est compact et $\nabla w \cdot h \le 0$ sur W^{M_1}. Supposons également que $\sum_n \gamma_n = +\infty$, $\lim_{n \to +\infty} \gamma_n = 0$ et $\xi_n = \xi_n^1 + \xi_n^2$ avec

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{k \ge n} \left(\left| \sum_{j=n}^{k} \xi_j^1 \right| + \left| \sum_{j=n}^{k} \xi_j^2 \, \mathbb{1}_{W^{M_1}}(\theta_{j-1}) \right| \right) = 0.$$

S'il existe $M \in]M_0, M_1[$ tq pour n assez grand $\theta_n \in W^M$ et l'image $\mathcal{D}$ de $\mathcal{L} \cap W^{M_1}$ par w est d'intérieur vide alors $w(\theta_n)$ converge vers une limite dans $\mathcal{D}$ lorsque $n \to +\infty$.

NB : . $\nabla w \cdot h < 0$ sur $W_{M_0}^{M_1}$

. Si $\mathcal{L} = \{\theta_*\}$, $\mathcal{D}$ est un singleton et son intérieur est vide et $w(\theta_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} w(\theta_*)$. Dans le cas où θ_* est l'unique point minimisant w, on en déduit que $\theta_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \theta_*$.