Méthodes de Monte-Carlo

Examen du mardi 23 janvier 2018

Les deux parties sont à rédiger sur des copies différentes.

Partie 2 : Comparaison des variances asymptotiques dans le théorème ergodique pour les chaînes de Markov

Sur l'espace d'état E muni de la tribu $\mathcal{E}$, on se donne une mesure de probabilité π.

1. On suppose dans cette question que P_0 et P_1 sont deux noyaux markoviens sur $(E, \mathcal{E})$ qui laissent π invariante et que

$$\forall x \in E,\ \forall A \in \mathcal{E} \text{ t.q. } x \notin A,\ P_0(x, A) \geq P_1(x, A). \tag{1}$$

   Soit $g : E \to \mathbb{R}$ mesurable et telle que $\pi(g^2) < \infty$.

   (a) Montrer que $\pi(P_0|g|) \leq \sqrt{\pi(g^2)}$ et en déduire que $\pi(dx)$ p.p., $P_0 g(x)$ est bien défini.

   (b) Pour $i \in \{0, 1\}$, montrer que $\pi(dx)$ p.p., $(P_i g(x))^2 \leq P_i g^2(x)$ et en déduire à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $\pi(|gP_i g|) \leq \pi(g^2)$. Conclure que $\pi(|g(P_0 g - P_1 g)|) < \infty$.

   Soit $P(x, dy) = \delta_x(dy) + P_0(x, dy) - P_1(x, dy)$.

   (c) Montrer que pour tout $x \in E$ et tout $B \in \mathcal{E}$, $P(x, B) \geq 0$ et en déduire que P est un noyau markovien sur $(E, \mathcal{E})$.

   (d) Vérifier que π est invariante par P. En déduire que

$$\int_E g^2(x)\pi(dx) = \frac{1}{2}\int_{E\times E} (g^2(x) + g^2(y))\pi(dx)P(x, dy).$$

   (e) Remarquer que $\pi(g(P_1 g - P_0 g)) = \int_{E\times E} g(x)g(y)\pi(dx)(\delta_x(dy) - P(x, dy))$ et en déduire que

$$\pi(g(P_1 g - P_0 g)) = \frac{1}{2}\int_{E\times E} (g(x) - g(y))^2 \pi(dx)P(x, dy).$$

   Conclure que

$$\forall g : E \to \mathbb{R} \text{ mesurable et t.q. } \pi(g^2) < \infty,\ \pi(g(P_1 g - P_0 g)) \geq 0. \tag{2}$$

2. On suppose maintenant que π est réversible pour P_0 et P_1 qui vérifient (2) et

$$\exists V : E \to \mathbb{R}_+ \text{ mesurable}, \exists K \in \mathbb{R}_+,\ \exists \gamma \in]0, 1[,\ \forall x \in E,\ P_0 V \vee P_1 V(x) \leq \gamma V(x) + K,$$

$$\exists R > \frac{4K}{(1-\sqrt{\gamma})^2},\ \exists \alpha \in]0, 1],\ \forall x, y \text{ t.q. } V(x) + V(y) \leq R,$$

$$(P_0(x, .) \wedge P_0(y, .)(E)) \wedge (P_1(x, .) \wedge P_1(y, .)(E)) \geq \alpha.$$

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable et telle que $\sup_{x\in E} \frac{|f(x)|}{1+\sqrt{V(x)}} < \infty$.

Pour $t \in [0,1]$, on note $P_t = tP_1 + (1-t)P_0$, $F_t = \sum_{n\in\mathbb{N}} P_t^n(f - \pi(f))$ la solution de l'équation de Poisson $F_t - P_tF_t = f - \pi(f)$ vérifiant $\pi(F_t) = 0$ et $\sigma_t^2(f) = \pi(F_t^2) - \pi((P_tF_t)^2)$ la variance asymptotique de l'estimateur ergodique $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k^t)$ de $\pi(f)$ reposant sur la chaîne de Markov $(X_k^t)_{k\in\mathbb{N}}$ de noyau de transition P_t. On admet que les hypothèses permettent de justifier la dérivabilité de F_t par rapport à t et tous les échanges de dérivées avec des sommes ou des intégrales dans ce qui suit.

(a) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, π est réversible pour le noyau P_t. En déduire que $\pi\left(\frac{dF_t}{dt}P_tF_t\right) = \pi\left(F_tP_t\frac{dF_t}{dt}\right)$.

(b) Vérifier que $F_t^2 - (P_tF_t)^2 = (f-\pi(f))(2F_t - f + \pi(f))$ et en déduire que $\frac{d\sigma_t^2(f)}{dt} = 2\pi\left((f-\pi(f))\frac{dF_t}{dt}\right) = 2\pi\left(F_t\left(\frac{dF_t}{dt} - P_t\frac{dF_t}{dt}\right)\right)$.

(c) Vérifier que pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in E$, $[0,1] \ni t \mapsto P_t^n f(x)$ est un polynôme de degré n. Pour $t \in [0,1]$ et $h \neq 0$ tel que $t-h \in [0,1]$, montrer que

$$\frac{1}{h}(P_t^n f(x) - P_{t-h}^n f(x)) = \sum_{m=0}^{n-1} P_t^m(P_1 - P_0)P_{t-h}^{n-1-m} f(x)$$

En déduire $\frac{dP_t^n(f-\pi(f))}{dt}$ puis que $\frac{dF_t}{dt} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sum_{m=0}^{n-1} P_t^m(P_1-P_0)P_t^{n-1-m}f$

$$\text{et } P_t\frac{dF_t}{dt} = \sum_{n\geq 2}\sum_{m=0}^{n-1} P_t^m(P_1-P_0)P_t^{n-1-m}f - \sum_{n\geq 2}(P_1-P_0)P_t^{n-1}f$$

et en déduire que $\frac{dF_t}{dt} - P_t\frac{dF_t}{dt} = P_1F_t - P_0F_t$.

(d) Conclure que $\frac{d\sigma_t^2(f)}{dt} \geq 0$ puis que $\sigma_1^2(f) \geq \sigma_0^2(f)$.

3. On suppose que $\pi(dx) = \frac{\eta(x)\lambda(dx)}{\int_E \eta(y)\lambda(dy)}$ où λ est une mesure de référence sur $(E,\mathcal{E})$ et η une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}_+$ telle que $\int_E \eta(x)\lambda(dx) \in]0,\infty[$. Soit $q : E\times E \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable telle que $\forall x \in E$, $\int_E q(x,y)\lambda(dy) = 1$ et on sait simuler suivant la probabilité $q(x,y)\lambda(dy)$. On pose

$$P_1(x,dy) = \alpha(x,y)q(x,y)\lambda(dy) + \left(\int_{E\setminus\{x\}} (1-\alpha(x,z))q(x,z)\lambda(dz)\right)\delta_x(dy)$$
$$\text{où } \alpha(x,y) = \begin{cases} a\left(\frac{\eta(y)q(y,x)}{\eta(x)q(x,y)}\right) \text{ si } \eta(x)q(x,y) > 0 \\ 1 \text{ si } \eta(x)q(x,y) = 0 \end{cases},$$

pour une fonction $a : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ mesurable vérifiant $a(0) = 0$ et $\forall u > 0,\ a(u) = ua(1/u)$.

(a) Quel est le choix de Metropolis-Hastings pour la fonction a?

On note $\alpha_0(x,y)$ et $P_0(x,dy)$ la probabilité d'acceptation de la proposition et le noyau markovien obtenus pour ce choix.

(b) Verifier que pour $u > 0$, $a(u) \leq \min(1,u)$ et en déduire que pour tous $x,y \in E$, $\alpha(x,y) \leq \alpha_0(x,y)$. Conclure que (1) est vérifiée.