Méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov et algorithmes particulaires

Examen du mardi 6 avril 2021

On se place dans le cadre et les notations du chapitre du cours consacré aux méthodes particulaires. On suppose que pour tout $p \in \mathbb{N}$ la fonction $g_p : E^{p+1} \to \mathbb{R}$ est mesurable et telle que

$$0 < \underline{g}_p := \inf_{x_{0:p} \in E^{p+1}} g_p(x_{0:p}) \leq \bar{g}_p := \sup_{x_{0:p} \in E^{p+1}} g_p(x_{0:p}) < \infty.$$

On suppose que les positions initiales des particules $(X_0^{0,m})_{m \geq 1}$ sont i.i.d. suivant la probabilité η_0 et que la sélection est effectuée par échantillonnage multinomial, résiduel ou stratifié. Pour $h_p : E^{p+1} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, on pose $\hat{\eta}_p^M(h_p) = \frac{\eta_p^M(g_p h_p)}{\eta_p^M(g_p)}$ et $\hat{\eta}_p(h_p) = \frac{\eta_p(g_p h_p)}{\eta_p(g_p)}$. Pour $h_{p+1} : E^{p+2} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, on note $P_{p+1}h_{p+1} : E^{p+1} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $P_{p+1}h_{p+1}(x_{0:p}) = \int_{x_{p+1} \in E} h_{p+1}(x_{0:p+1}) P_{p+1}(x_p, dx_{p+1})$.

1. Montrer que $\sup_{M \geq 1} M^2 \mathbb{E}\left[\left(\hat{\eta}_p^M(h_p) - \hat{\eta}_p(h_p)\right)^4\right] < \infty$ et que $\mathbb{P}\left(\lim_{M \to \infty} \hat{\eta}_p^M(h_p) = \hat{\eta}_p(h_p)\right) = 1$.

2. Pour quelle fonction $h_{p+1} : E^{p+2} \to \mathbb{R}$, a-t-on $\frac{1}{M}\sum_{m=1}^M h_p(X_{0:p}^{p+1,m}) = \eta_{p+1}^M(h_{p+1})$? Que vaut alors $P_{p+1}h_{p+1}$? En déduire que
$$\mathbb{P}\left(\lim_{M \to \infty} \frac{1}{M}\sum_{m=1}^M h_p(X_{0:p}^{p+1,m}) = \hat{\eta}_p(h_p)\right) = 1.$$

3. Montrer que lorsque $M \to \infty$, pour $h_0 : E \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, $\sqrt{M}(\eta_0^M(h_0) - \eta_0(h_0))$ converge en loi vers $\mathcal{N}_1(0, \mathbb{V}_0(h_0))$ où on explicitera la forme quadratique $h_0 \mapsto \mathbb{V}_0(h_0)$ sur l'espace des fonctions mesurables bornées de E dans $\mathbb{R}$ et la forme bilinéaire symétrique $\mathbb{C}_0$ associée.

On suppose désormais que l'étape de sélection est effectuée suivant l'échantillonnage multinomial. L'objectif de la suite du problème est de montrer par récurrence sur p que pour $h_p : E^{p+1} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, $\sqrt{M}(\eta_p^M(h_p) - \eta_p(h_p))$ converge en loi lorsque $M \to \infty$ vers $\mathcal{N}_1(0, \mathbb{V}_p(h_p))$ avec $h_p \mapsto \mathbb{V}_p(h_p)$ une forme quadratique sur l'espace des fonctions mesurables bornées de E^{p+1} dans $\mathbb{R}$. On suppose l'hypothèse de récurrence satisfaite au rang p et on se donne $h_{p+1} : E^{p+2} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée.

4. Pour $\hat{h}_p : E^{p+1} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, on pose $\tilde{h}_p = \frac{g_p}{\eta_p(g_p)}(\hat{h}_p - \hat{\eta}_p(\hat{h}_p))$. Remarquer que $\eta_p(\tilde{h}_p) = 0$ et $\hat{\eta}_p^M(\hat{h}_p) - \hat{\eta}_p(\hat{h}_p) = \frac{\eta_p(g_p)}{\eta_p^M(g_p)}\eta_p^M(\tilde{h}_p)$. En déduire que $\sqrt{M}(\hat{\eta}_p^M(\hat{h}_p) - \hat{\eta}_p(\hat{h}_p))$ converge en loi lorsque $M \to \infty$ vers $\mathcal{N}_1\left(0, \mathbb{V}_p(\tilde{h}_p)\right)$. Vérifier que $\sqrt{M}\left(\hat{\eta}_p^M(\hat{h}_p) - \hat{\eta}_p(\hat{h}_p) - \eta_p^M(\tilde{h}_p)\right)$ converge en probabilité vers 0 lorsque $M \to \infty$.

5. Vérifier que pour $v \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{F}_p = \sigma((X_{0:k}^{k,m})_{1\leq m\leq M, 0\leq k\leq p})$,

$$\mathbb{E}\left[e^{iv\sqrt{M}(\eta_{p+1}^M(h_{p+1})-\eta_{p+1}(h_{p+1}))}\right] = \mathbb{E}\Bigg[e^{iv\sqrt{M}(\hat{\eta}_p^M(P_{p+1}h_{p+1})-\hat{\eta}_p(P_{p+1}h_{p+1}))} \times \mathbb{E}\left[e^{iv\sqrt{M}\left(\eta_{p+1}^M(h_{p+1})-\hat{\eta}_p^M(P_{p+1}h_{p+1})\right)}|\mathcal{F}_p\right]\Bigg].$$

6. On pose $\hat{\eta}_p^M P_{p+1}(dx_{0:p+1}) := \hat{\eta}_p^M(dx_{0:p})P_{p+1}(x_p, dx_{p+1})$. Vérifier que $\hat{\eta}_p^M P_{p+1}(h_{p+1}) = \hat{\eta}_p^M(P_{p+1}h_{p+1})$ et montrer que conditionnellement à $\mathcal{F}_p$, les trajectoires $(X_{0:p+1}^{p+1,m})_{1\leq m\leq M}$ sont i.i.d. suivant $\hat{\eta}_p^M P_{p+1}(dx_{0:p+1})$.

7. Vérifier que pour $x \in \mathbb{R}$ $\left|e^{ix} - 1 - ix + \frac{x^2}{2}\right| \leq \frac{|x|^3}{6}$puis, en notant $\overline{|h_{p+1}|} = \sup_{x_{0:p+1}\in E^{p+2}} |h_{p+1}(x_{0:p+1})|$, montrer que pour $m \in \{1, \ldots, M\}$,

$$\left|\mathbb{E}\left[e^{iu(h_{p+1}(X_{0:p+1}^{p+1,m})-\hat{\eta}_p^M(P_{p+1}h_{p+1}))}|\mathcal{F}_p\right] - 1 + \frac{u^2}{2}\left(\hat{\eta}_p^M(P_{p+1}h_{p+1}^2) - (\hat{\eta}_p^M(P_{p+1}h_{p+1}))^2\right)\right| \leq \frac{4|u|^3\overline{|h_{p+1}|}^3}{3}.$$

8. En déduire que pour $v \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[e^{iv\sqrt{M}\left(\eta_{p+1}^M(h_{p+1})-\hat{\eta}_p^M(P_{p+1}h_{p+1})\right)}|\mathcal{F}_p\right] = \left(1 - \frac{v^2\mathbb{W}_{p+1}(h_{p+1})}{2M} + \frac{\varepsilon_M}{M}\right)^M$$

avec $\mathbb{W}_{p+1}(h_{p+1}) := \hat{\eta}_p(P_{p+1}h_{p+1}^2) - (\hat{\eta}_p(P_{p+1}h_{p+1}))^2$ et

$$|\varepsilon_M| \leq \frac{v^2}{2}|\hat{\eta}_p^M(P_{p+1}h_{p+1}^2)-\hat{\eta}_p(P_{p+1}h_{p+1}^2)|+\frac{v^2}{2}|(\hat{\eta}_p^M(P_{p+1}h_{p+1}))^2-(\hat{\eta}_p(P_{p+1}h_{p+1}))^2|+\frac{4|v|^3\overline{|h_{p+1}|}^3}{3\sqrt{M}}.$$

Quel est le comportement asymptotique de la suite de variables aléatoires $(\varepsilon_M)_{M\geq 1}$ lorsque $M \to \infty$?

9. Vérifier que $\mathbb{W}_{p+1}(h_{p+1}) \geq 0$ et exhiber la forme bilinéaire symétrique $\mathbb{D}_{p+1}$ associée à la forme quadratique $h_{p+1} \mapsto \mathbb{W}_{p+1}(h_{p+1})$.

10. À l'aide de la formule du binôme, vérifier que pour $M \geq \frac{v^2\mathbb{W}_{p+1}(h_{p+1})}{4}$,

$$\left|\left(1 - \frac{v^2\mathbb{W}_{p+1}(h_{p+1})}{2M} + \frac{\varepsilon_M}{M}\right)^M - \left(1 - \frac{v^2\mathbb{W}_{p+1}(h_{p+1})}{2M}\right)^M\right| \leq \sum_{k=1}^M \frac{|\varepsilon_M|^k}{k!} \leq e^{|\varepsilon_M|} - 1$$

et en déduire que $\mathbb{E}\left[e^{iv\sqrt{M}\left(\eta_{p+1}^M(h_{p+1})-\hat{\eta}_p^M(P_{p+1}h_{p+1})\right)}|\mathcal{F}_p\right]$ converge presque sûrement vers $e^{-\frac{v^2\mathbb{W}_{p+1}(h_{p+1})}{2}}$ lorsque $M \to \infty$. puis que

$$\lim_{M\to\infty} \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}\left[e^{iv\sqrt{M}\left(\eta_{p+1}^M(h_{p+1})-\hat{\eta}_p^M(P_{p+1}h_{p+1})\right)}|\mathcal{F}_p\right] - e^{-\frac{v^2\mathbb{W}_{p+1}(h_{p+1})}{2}}\right|\right] = 0.$$

11. Vérifier que

$$\left|\mathbb{E}\left[e^{iv\sqrt{M}(\eta^M_{p+1}(h_{p+1})-\eta_{p+1}(h_{p+1}))}\right] - e^{-\frac{v^2\mathbb{W}_{p+1}(h_{p+1})}{2}}\mathbb{E}\left[e^{iv\sqrt{M}(\hat{\eta}^M_p(P_{p+1}h_{p+1})-\hat{\eta}_p(P_{p+1}h_{p+1}))}\right]\right|$$
$$\leq \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}\left[e^{iv\sqrt{M}\left(\eta^M_{p+1}(h_{p+1})-\hat{\eta}^M_p(P_{p+1}h_{p+1})\right)}\middle|\mathcal{F}_p\right] - e^{-\frac{v^2\mathbb{W}_{p+1}(h_{p+1})}{2}}\right|\right]$$

et conclure que, lorsque $M \to \infty$, $\sqrt{M}(\eta^M_{p+1}(h_{p+1}) - \eta_{p+1}(h_{p+1}))$ converge en loi vers $\mathcal{N}_1\left(0, \mathbb{V}_{p+1}(h_{p+1})\right)$ avec

$$\mathbb{V}_{p+1}(h_{p+1}) = \mathbb{W}_{p+1}(h_{p+1}) + \mathbb{V}_p\left(\mathbb{L}_p h_{p+1}\right) \text{ où } \mathbb{L}_p h_{p+1} = \frac{g_p}{\eta_p(g_p)}\left(P_{p+1}h_{p+1} - \hat{\eta}_p(P_{p+1}h_{p+1})\right).$$

12. Remarquer que $\mathbb{L}_p$ est une application linéaire de l'espace des fonctions mesurables bornées de E^{p+2} dans $\mathbb{R}$ dans l'espace des fonctions mesurables bornées de E^{p+1} dans $\mathbb{R}$ et justifier que $h_{p+1} \mapsto \mathbb{V}_{p+1}(h_{p+1})$ est une forme quadratique sur l'espace des fonctions $h_{p+1} : E^{p+2} \to \mathbb{R}$ mesurables bornées. En déduire que pour $d \in \mathbb{N}^*$ et $H_{p+1} : E^{p+2} \to \mathbb{R}^d$ mesurable bornée, $\sqrt{M}(\eta^M_{p+1}(H_{p+1}) - \eta_{p+1}(H_{p+1}))$ (où les intégrales sont calculées coordonnée par coordonnée) converge en loi vers $\mathcal{N}_d\left(0, \Gamma\right)$ où on exprimera la matrice de covariance Γ à l'aide de la forme bilinéaire symétrique $\mathbb{C}_{p+1}$ associée à $\mathbb{V}_{p+1}$ (*On pourra pour cela s'intéresser au comportement asymptotique de* $\sqrt{M}(\eta^M_{p+1}(u.H_{p+1}) - \eta_{p+1}(u.H_{p+1}))$ *où* $u \in \mathbb{R}^d$).

13. Exprimer $\mathbb{C}_{p+1}$ à l'aide de $\mathbb{C}_p$, $\mathbb{L}_p$ et $\mathbb{D}_{p+1}$.

Montrons maintenant par récurrence sur p que, lorsque $M \to \infty$,

$$Y^M_p := \sqrt{M}(\eta^M_0(h_0) - \eta_0(h_0), \ldots, \eta^M_p(h_p) - \eta_p(h_p))$$

converge en loi vers $\mathcal{N}_{p+1}(0, (K_{ij})_{0\leq i,j\leq p})$ où $K_{ij} = \mathbb{C}_{i\wedge j}(h_{i\wedge j}, \mathbb{L}_{i\wedge j}\ldots\mathbb{L}_{i\vee j-1}h_{i\vee j})$, propriété vraie pour $p = 0$ d'après la question 3. Supposons que l'hypothèse de récurrence est vraie au rang $p \in \mathbb{N}$. Soit $u = (u_0, \ldots, u_{p+1}) \in \mathbb{R}^{p+2}$ et $\hat{u} = (u_0, \ldots, u_{p-1}, 1) \in \mathbb{R}^{p+1}$. On pose également

$$\hat{Y}^M_p := \sqrt{M}\bigg(\eta^M_0(h_0) - \eta_0(h_0), \ldots, \eta^M_{p-1}(h_{p-1}) - \eta_{p-1}(h_{p-1}),$$
$$u_p(\eta^M_p(h_p) - \eta_p(h_p)) + u_{p+1}(\hat{\eta}^M_p(P_{p+1}h_{p+1}) - \hat{\eta}_p(P_{p+1}h_{p+1})\bigg).$$

14. Remarquer que

$$\mathbb{E}\left[e^{iu.Y^M_{p+1}}\right] = \mathbb{E}\left[e^{i\hat{u}.\hat{Y}^M_p}\mathbb{E}\left[e^{iu_{p+1}\sqrt{M}\left(\eta^M_{p+1}(h_{p+1})-\hat{\eta}^M_p(P_{p+1}h_{p+1})\right)}\middle|\mathcal{F}_p\right]\right].$$

15. À l'aide de la question 4, vérifier que, lorsque $M \to \infty$, $\hat{Y}^M_p$ converge en loi vers $\mathcal{N}_{p+1}(0, (\hat{K}_{ij})_{0\leq i,j\leq p})$ avec $\hat{K}_{ij} = K_{ij}$ pour $0 \leq i, j \leq p-1$ et où précisera $\hat{K}_{ip}$ pour $0 \leq i \leq p$.

16. À l'aide de la question 10, conclure que Y_{p+1}^M converge en loi vers $\mathcal{N}_{p+2}(0,(K_{ij})_{0\leq i,j\leq p+1})$.

17. On pose $h_j = g_j$ pour $j \in \{0,\dots,p\}$. Remarquer que
$$\sqrt{M}\left(\gamma_{p+1}^M(h_{p+1}) - \gamma_{p+1}(h_{p+1})\right) = \sum_{j=0}^{p+1}\prod_{k=0}^{j-1}\eta_k^M(h_k)\prod_{k=j+1}^{p+1}\eta_k(h_k)\times\sqrt{M}\left(\eta_j^M(h_j)-\eta_j(h_j)\right).$$
Conclure que $\sqrt{M}\left(\gamma_{p+1}^M(h_{p+1}) - \gamma_{p+1}(h_{p+1})\right)$ converge en loi lorsque $M\to\infty$ vers $\mathcal{N}_1(0,\sigma^2)$ où on exprimera la variance σ^2 à l'aide de $(K_{ij})_{0\leq i,j\leq p+1} \in \mathbb{R}^{(p+2)\times(p+2)}$ et de $u = \left(\frac{\gamma_{p+1}(h_{p+1})}{\eta_j(h_j)}\right)_{0\leq j\leq p+1} \in \mathbb{R}^{p+2}$ où, par convention, $\frac{\gamma_{p+1}(h_{p+1})}{\eta_{p+1}(h_{p+1})} = \prod_{k=0}^p \eta_k(h_k) = \prod_{k=0}^p \eta_k(g_k)$ si $\eta_{p+1}(h_{p+1}) = 0$.

18. Vérifier que
$$K_{ij} = \mathbb{C}_0(\mathbb{L}_0\dots\mathbb{L}_{i-1}h_i, \mathbb{L}_0\dots\mathbb{L}_{j-1}h_j) + \sum_{\ell=1}^{i\wedge j}\mathbb{D}_\ell(\mathbb{L}_\ell\dots\mathbb{L}_{i-1}h_i,\mathbb{L}_\ell\dots\mathbb{L}_{j-1}h_j).$$
Pourquoi les matrices $(1_{\{i\wedge j\geq \ell\}}\mathbb{D}_\ell(\mathbb{L}_\ell\dots\mathbb{L}_{i-1}h_i,\mathbb{L}_\ell\dots\mathbb{L}_{j-1}h_j))_{0\leq i,j\leq p}$ sont-elles symétriques positives pour $1\leq \ell\leq p$?

Pour $y\in\mathbb{R}$, $\lfloor y\rfloor$ désigne l'entier tel que $\lfloor y\rfloor \leq y < \lfloor y\rfloor + 1$ et $\{y\} = y - \lfloor y\rfloor$. Supposons désormais les sélections effectuées par échantillonnage résiduel. On peut montrer que $\mathbb{E}\left[e^{iv\sqrt{M}\left(\eta_{p+1}^M(h_{p+1}) - \hat{\eta}_p^M(P_{p+1}h_{p+1})\right)}|\mathcal{F}_p\right]$ converge p.s. et dans L^1 vers $e^{-\frac{v^2\widetilde{\mathbb{W}}_{p+1}(h_{p+1})}{2}}$ où
$$\widetilde{\mathbb{W}}_{p+1}(h_{p+1}) = \hat{\eta}_p(P_{p+1}h_{p+1}^2) - \hat{\eta}_p((P_{p+1}h_{p+1})^2) + \eta_p\left(\left\{\frac{g_p}{\eta_p(g_p)}\right\}(P_{p+1}h_{p+1})^2\right) - \frac{\left(\eta_p\left(\left\{\frac{g_p}{\eta_p(g_p)}\right\}P_{p+1}h_{p+1}\right)\right)^2}{\eta_p\left(\left\{\frac{g_p}{\eta_p(g_p)}\right\}\right)}.$$

19. Vérifier que $\left(\eta_p\left(\frac{g_p}{\eta_p(g_p)}h_p\right)\right)^2 \leq \frac{\left(\eta_p\left(\left\lfloor\frac{g_p}{\eta_p(g_p)}\right\rfloor h_p\right)\right)^2}{\eta_p\left(\left\lfloor\frac{g_p}{\eta_p(g_p)}\right\rfloor\right)} + \frac{\left(\eta_p\left(\left\{\frac{g_p}{\eta_p(g_p)}\right\}h_p\right)\right)^2}{\eta_p\left(\left\{\frac{g_p}{\eta_p(g_p)}\right\}\right)}$ et $\frac{\left(\eta_p\left(\left\lfloor\frac{g_p}{\eta_p(g_p)}\right\rfloor h_p\right)\right)^2}{\eta_p\left(\left\lfloor\frac{g_p}{\eta_p(g_p)}\right\rfloor\right)} \leq \eta_p\left(\left\lfloor\frac{g_p}{\eta_p(g_p)}\right\rfloor h_p^2\right)$. En déduire que $\widetilde{\mathbb{W}}_{p+1}(h_{p+1}) \leq \mathbb{W}_{p+1}(h_{p+1})$.

20. Exprimer $\widetilde{\mathbb{V}}_p(h_p)$ t.q. $\sqrt{M}\left(\eta_p^M(h_p) - \eta_p(h_p)\right)$ converge en loi vers $\mathcal{N}_1(0,\widetilde{\mathbb{V}}_p(h_p))$ lorsque $M\to\infty$. Montrer que $\widetilde{\mathbb{V}}_p(h_p)\leq\mathbb{V}_p(h_p)$.

21. On note respectivement $\widetilde{\mathbb{C}}_p$ et $\widetilde{\mathbb{D}}_p$ les formes bilinéaires symétriques respectivement associées à $\widetilde{\mathbb{V}}_p$ pour $p\in\mathbb{N}$ et $\widetilde{\mathbb{W}}_p$ pour $p\geq 1$ et on pose $\widetilde{K}_{ij} = \widetilde{\mathbb{C}}_{i\wedge j}(h_{i\wedge j},\mathbb{L}_{i\wedge j}\dots\mathbb{L}_{i\vee j-1}h_{i\vee j})$. À l'aide de la question 18, montrer que pour tout $p\in\mathbb{N}$, $(\widetilde{K}_{ij})_{0\leq i,j\leq p}$ est plus petite que $(K_{ij})_{0\leq i,j\leq p}$ au sens de l'ordre sur les matrices symétriques positives $(p+1)\times(p+1)$ et en déduire que la variance asymptotique de $\sqrt{M}(\gamma_p^M(h_p) - \gamma_p(h_p))$ est plus petite pour l'échantillonnage résiduel que pour l'échantillonnage multinomial.

Nous allons maintenant nous intéresser au cas où la sélection est effectuée par échantillonnage résiduel. Rappelons que pour $y \in \mathbb{R}$, $\lfloor y \rfloor$ désigne l'entier tel que $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$ et $\{y\} = y - \lfloor y \rfloor$.

22. Vérifier que

$$\max_{1 \leq m \leq M} \left| \frac{g_p(X_{0:p}^{p,m})}{\eta_p^M(g_p)} - \frac{g_p(X_{0:p}^{p,m})}{\eta_p(g_p)} \right| \leq \frac{\bar{g}_p}{\underline{g}_p^2} |\eta_p(g_p) - \eta_p^M(g_p)|.$$

En déduire que pour tout $m \in \{1, \dots, M\}$,

$$\left| \left\{ \frac{g_p(X_{0:p}^{p,m})}{\eta_p^M(g_p)} \right\} - \left\{ \frac{g_p(X_{0:p}^{p,m})}{\eta_p(g_p)} \right\} \right| \leq \frac{\bar{g}_p}{\underline{g}_p^2} |\eta_p(g_p) - \eta_p^M(g_p)| + 1_{\left\{ \left\{ \frac{g_p(X_{0:p}^{p,m})}{\eta_p(g_p)} \right\} \wedge \left(1 - \left\{ \frac{g_p(X_{0:p}^{p,m})}{\eta_p(g_p)} \right\} \right) \leq \frac{\bar{g}_p}{\underline{g}_p^2} |\eta_p(g_p) - \eta_p^M(g_p)| \right\}}$$

puis que, pour $\varepsilon > 0$, en posant $R_p^M = \sum_{m=1}^M \left\{ \frac{g_p(X_{0:p}^{p,m})}{\eta_p^M(g_p)} \right\}$,

$$\left| \frac{R_p^M}{M} - \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left\{ \frac{g_p(X_{0:p}^{p,m})}{\eta_p(g_p)} \right\} \right| \leq 1_{\{|\eta_p(g_p) - \eta_p^M(g_p)| \geq \frac{\varepsilon \underline{g}_p^2}{\bar{g}_p}\}} + \varepsilon + \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M 1_{\left\{ \left\{ \frac{g_p(X_{0:p}^{p,m})}{\eta_p(g_p)} \right\} \wedge \left(1 - \left\{ \frac{g_p(X_{0:p}^{p,m})}{\eta_p(g_p)} \right\} \right) \leq \varepsilon \right\}}.$$

Conclure que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{M \to \infty} \left| \frac{R_p^M}{M} - \eta_p\left(\left\{ \frac{g_p}{\eta_p(g_p)} \right\} \right) \right| \leq \eta_p\left(\left\{ x_{0:p} \in E^{p+1} : \left\{ \frac{g_p(x_{0:p})}{\eta_p(g_p)} \right\} = 0 \right\} \right) \right) = 1.$$

Lorsque $R_p^M > 0$, on pose $\tilde{\eta}_p^M = \frac{1}{R_p^M} \sum_{m=1}^M \left\{ \frac{g_p(X_{0:p}^{p,m})}{\eta_p^M(g_p)} \right\} \delta_{X_{0:p}^{p,m}}$. On suppose désormais que $\eta_p\left(\left\{ x_{0:p} \in E^{p+1} : \left\{ \frac{g_p(x_{0:p})}{\eta_p(g_p)} \right\} = 0 \right\} \right) = 0$ et on pose $\tilde{\eta}_p(h_p) = \frac{\eta_p\left(h_p \left\{ \frac{g_p}{\eta_p(g_p)} \right\} \right)}{\eta_p\left(\left\{ \frac{g_p}{\eta_p(g_p)} \right\} \right)}$ pour $h_p : E^{p+1} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée.

23. Pourquoi a-t-on alors p.s. $\mathbb{P}\left(\exists M_1 \in \mathbb{N} : \forall M \geq M_1, R_p^M \geq 1\right) = 1$? Vérifier que $\mathbb{P}\left(\lim_{M \to \infty} \tilde{\eta}_p^M(h_p) = \tilde{\eta}_p(h_p)\right) = 1$.

On rappelle que dans l'échantillonnage résiduel, $X_{0:p}^{p+1,m} = X_{0:p}^{p,\ell}$ pour $\sum_{j=1}^{\ell-1} \left\lfloor \frac{g_p(X_{0:p}^{p,j})}{\eta_p^M(g_p)} \right\rfloor + 1 \leq m \leq \sum_{j=1}^{\ell} \left\lfloor \frac{g_p(X_{0:p}^{p,j})}{\eta_p^M(g_p)} \right\rfloor$ et, lorsque $R_p^M \geq 1$, $(X_{0:p}^{p+1,m})_{M - R_p^M + 1 \leq m \leq M}$ sont choisis i.i.d. suivant $\tilde{\eta}_p^M$ conditionnellement à $\mathcal{F}_p$.

24. Vérifier que pour $v \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{G}_{p+1} = \sigma((X_{0:k}^{k,m})_{1\leq m\leq M, 0\leq k\leq p}, (X_{0:p}^{p+1,m})_{1\leq m\leq M})$,

$$\mathbb{E}\left[e^{iv\sqrt{M}\left(\eta_{p+1}^M(h_{p+1})-\hat{\eta}_p^M(P_{p+1}h_{p+1})\right)}|\mathcal{F}_p\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\prod_{m=1}^M e^{i\frac{v}{\sqrt{M}}(h_{p+1}(X_{0:p+1}^{p+1,m})-P_{p+1}h_{p+1}(X_{0:p}^{p+1,m}))}|\mathcal{G}_{p+1}\right]\right.$$
$$\left.\times \prod_{m=M-R_p^M+1}^{M} e^{i\frac{v}{\sqrt{M}}(P_{p+1}h_{p+1}(X_{0:p}^{p+1,m})-\tilde{\eta}_p^M(P_{p+1}h_{p+1}))}\middle|\mathcal{F}_p\right]$$

Vérifier que

$$\prod_{m=1}^M \mathbb{E}\left[e^{i\frac{v}{\sqrt{M}}(h_{p+1}(X_{0:p+1}^{p+1,m})-P_{p+1}h_{p+1}(X_{0:p}^{p+1,m}))}|\mathcal{G}_{p+1}\right] - \prod_{m=1}^M e^{-\frac{v^2}{2M}[P_{p+1}h_{p+1}^2-(P_{p+1}h_{p+1})^2](X_{0:p}^{p+1,m})}$$

converge presque sûrement et dans L^1 vers 0 lorsque $M \to \infty$ et en déduire à l'aide de la question 2, la limite presque sûre et dans L^1 de $\mathbb{E}\left[\prod_{m=1}^M e^{i\frac{v}{\sqrt{M}}(h_{p+1}(X_{0:p+1}^{p+1,m})-P_{p+1}h_{p+1}(X_{0:p}^{p+1,m}))}|\mathcal{G}_{p+1}\right]$.
Conclure que $\mathbb{E}\left[e^{iv\sqrt{M}\left(\eta_{p+1}^M(h_{p+1})-\hat{\eta}_p^M(P_{p+1}h_{p+1})\right)}|\mathcal{F}_p\right]$ converge presque sûrement et dans L^1 vers $e^{-\frac{v^2\widetilde{\mathbb{W}}_{p+1}(h_{p+1})}{2}}$ lorsque $M \to \infty$ avec

$$\widetilde{\mathbb{W}}_{p+1}(h_{p+1}) = \hat{\eta}_p(P_{p+1}h_{p+1}^2) - \hat{\eta}_p((P_{p+1}h_{p+1})^2)$$
$$+ \eta_p\left(\left\{\frac{g_p}{\eta_p(g_p)}\right\}(P_{p+1}h_{p+1})^2\right) - \frac{\left(\eta_p\left(\left\{\frac{g_p}{\eta_p(g_p)}\right\}P_{p+1}h_{p+1}\right)\right)^2}{\eta_p\left(\left\{\frac{g_p}{\eta_p(g_p)}\right\}\right)}.$$

25. Vérifier que $\left(\eta_p\left(\frac{g_p}{\eta_p(g_p)}h_p\right)\right)^2 \leq \frac{\left(\eta_p\left(\left\lfloor\frac{g_p}{\eta_p(g_p)}\right\rfloor h_p\right)\right)^2}{\eta_p\left(\left\lfloor\frac{g_p}{\eta_p(g_p)}\right\rfloor\right)} + \frac{\left(\eta_p\left(\left\{\frac{g_p}{\eta_p(g_p)}\right\}h_p\right)\right)^2}{\eta_p\left(\left\{\frac{g_p}{\eta_p(g_p)}\right\}\right)}$ et $\frac{\left(\eta_p\left(\left\lfloor\frac{g_p}{\eta_p(g_p)}\right\rfloor h_p\right)\right)^2}{\eta_p\left(\left\lfloor\frac{g_p}{\eta_p(g_p)}\right\rfloor\right)} \leq \eta_p\left(\left\lfloor\frac{g_p}{\eta_p(g_p)}\right\rfloor h_p^2\right)$. En déduire que $\widetilde{\mathbb{W}}_{p+1}(h_{p+1}) \leq \mathbb{W}_{p+1}(h_{p+1})$.

26. On suppose que pour tout p, $\eta_p\left(\left\{x_{0:p} \in E^{p+1} : \left\{\frac{g_p(x_{0:p})}{\eta_p(g_p)}\right\} = 0\right\}\right) = 0$. Exprimer $\widetilde{\mathbb{V}}_p(h_p)$ t.q. $\sqrt{M}\left(\eta_p^M(h_p) - \eta_p(h_p)\right)$ converge en loi vers $\mathcal{N}_1(0, \widetilde{\mathbb{V}}_p(h_p))$ lorsque $M \to \infty$. Montrer que $\widetilde{\mathbb{V}}_p(h_p) \leq \mathbb{V}_p(h_p)$.

27. On note respectivement $\widetilde{\mathbb{C}}_p$ et $\widetilde{\mathbb{D}}_p$ les formes bilinéaires symétriques respectivement associées à $\widetilde{\mathbb{V}}_p$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $\widetilde{\mathbb{W}}_p$ pour $p \geq 1$ et on pose $\widetilde{K}_{ij} = \widetilde{\mathbb{C}}_{i\wedge j}(h_{i\wedge j}, \mathbb{L}_{i\wedge j}\ldots\mathbb{L}_{i\vee j-1}h_{i\vee j})$. À l'aide de la question 18, montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(\widetilde{K}_{ij})_{0\leq i,j\leq p}$ est plus petite que $(K_{ij})_{0\leq i,j\leq p}$ au sens de l'ordre sur les matrices symétriques positives $(p+1)\times(p+1)$ et en déduire que la variance asymptotique de $\sqrt{M}(\gamma_p^M(h_p) - \gamma_p(h_p))$ est plus petite pour l'échantillonnage résiduel que pour l'échantillonnage multinomial.