

Rapports: $(E, \mathcal{E})$ espace mesurable

noyau $P: E \times \mathcal{E} \rightarrow [0, 1]$ tq. $\forall x \in E$, $P(x, \cdot)$ proba sur E
 $\in \mathcal{P}(E)$
 $\cdot \forall A \in \mathcal{E}$, $x \rightarrow P(x, A)$ est mesurable.

$$d_{TV}(\mu, \sigma) = \sup_{A \in \mathcal{E}} |\mu(A) - \sigma(A)| = 1 - \mu \wedge \sigma(E) = \sup_{|\varphi| \leq \frac{1}{2}} |\mu(\varphi) - \sigma(\varphi)|$$

Sous Doeblin ie $\exists \alpha > 0 \forall x, y \in E$, $P(x, \cdot) \wedge P(y, \cdot)(E) \geq \alpha$,

P admet une unique proba invariante π et

$$d_{TV}(\mu P^n, \pi) \leq (1 - \alpha)^n d_{TV}(\mu, \pi).$$

loi de X_n ou $(X_n)_{n \geq 0}$ chaîne de Markov de noyau enie de $X_0 \mu$.

Condition de Drift:

$$\begin{array}{|l} (D1) \exists V: E \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ mesurable } \exists \gamma \in [0, 1], \exists K < +\infty, \forall x \in E, P V(x) \leq \gamma V(x) + K \\ (D2) \exists R > \frac{2K}{1-\gamma}, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in E \text{ tq } V(x) + V(y) \leq R, P(x, \cdot) \wedge P(y, \cdot)(E) \geq \alpha. \end{array}$$

Pour $\beta \geq 0$, $\|\varphi\|_\beta = \sup_{x \in E} \frac{|\varphi(x)|}{1 + \beta V(x)}$

$d_\beta(\mu, \sigma) = \sup_{\|\varphi\|_\beta \leq 1} |\mu(\varphi) - \sigma(\varphi)| < \infty$ si $\mu, \sigma \in \mathcal{P}_V(E)$
 $= \{\gamma \in \mathcal{P}(E) \mid \int \gamma(V) < \infty\}$

Thm | On suppose (D1) et (D2). Alors P admet une unique proba invariante π . En outre $\pi(V) < \infty$
 et $d_\beta(\mu P^m, \pi) \leq X^m d_\beta(\mu, \pi)$ avec
 $X = (1 - \alpha + \beta K) \sqrt{\frac{2 + \beta R + 2\beta K}{2 + \beta R}} < 1$ si $\beta \in]0, \frac{\alpha}{K}[$.

Application à Metropolis Hastings: $E = \mathbb{R}^d$ $\lambda(dx) = dx$ lebesgue
 $q(x, y) = \varphi(y - x)$ où φ densité de proba paire sur $\mathbb{R}^d$.
 Alors $\alpha(x, y) = \frac{\gamma(y) q(y, x)}{\gamma(x) q(x, y)} \wedge 1 = \frac{\gamma(y)}{\gamma(x)} \wedge 1$ MH Marche Aléatoire $\pi(dx) = \frac{\gamma(x) \lambda(dx)}{\int \gamma(z) \lambda(dz)}$
Prop 1.3.33: Si γ est C^1 > 0 renfermé $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{x}{|x|} \cdot \nabla \gamma(x) = -\infty$
 et $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{x}{|x|} \cdot \frac{\nabla \gamma(x)}{|\nabla \gamma(x)|} < 0$. Alors tout algorithme MHA avec $\forall M > 0 \inf_{|x| \leq M} |\varphi(x)| > 0$
 satisfait (D1) et (D2) avec $\frac{1}{V(x)} = \frac{1}{\sqrt{\gamma(x)}}$

IV Loi Forte des Grands Nombres pour moyennes ergodiques:

objectif M_n sous $(D1)$ et $(D2)$ si $(X_k)_{k \geq 0}$ chaîne de Markov
de moyenne P , alors $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P.S.} \pi(f)$ si $\pi(f) < \infty$
et $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable

Birkhoff
Thm ergodique:

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probas et $T: \Omega \rightarrow \Omega$
une application mesurable qui préserve P ($\forall A \in \mathcal{A}, P(T^{-1}(A)) = P(A)$)
et qui est ergodique au sens où

$$\forall A \in \mathcal{A}, T^{-1}(A) = A \Rightarrow P(A) \in \{0, 1\}.$$

Alors pour toute variable aléatoire Y intégrable sur
 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $P\left(\left\{\omega \in \Omega, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Y(T^k(\omega)) = E(Y)\right\}\right) = 1$

$$T(T^{k-1}(\omega)) = T^k(\omega)$$

$$T^0(\omega) = \omega.$$

Def: Une proba invariante π pour P est dite extrême si
 il n'existe pas 2 probas invariantes distinctes σ et μ
 et $t \in]0,1[$ tq $\pi = t\mu + (1-t)\sigma$

NB: Si π est l'unique proba invariante, alors π est extrême.

Prop: Soit π probabilité invariante extrême pour P .

Alors $\mathbb{P}_\pi((X_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A) \in \{0,1\}$ pour tout ensemble A de $E^{\mathbb{N}}$
 Invariant par l'opérateur de décalage $T((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$
 ou sens où $1_A((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = 1_A((x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}) \quad \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$
 En outre pour toute $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable tq $\pi(|f|) < \infty$

$$\mathbb{P}_\pi\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int f d\pi\right) = 1$$

On note $\mathbb{P}_\mu$ la proba sur l'espace sur lequel la chaîne de Markov est définie lorsque $X_0 \sim \mu \in \mathcal{P}(E)$. Espérance $\rightarrow \mathbb{E}_\mu$
 Si $\mu = \delta_x$ on note plus simplement $\mathbb{P}_x$ et $\mathbb{E}_x$.

preuve: M_μ sous P_π l'opérateur de décalage T est ergodique.
 On peut alors appliquer le théorème ergodique de Birkhoff.

Comme π est invariant, sous P_π , la loi de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$
 est la même que celle de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si bien que
 l'opérateur T préserve P_π .

Soit $A \in \mathcal{F}^{\otimes \mathbb{N}}$ invariant par T . On veut que $P_\pi((X_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}} \in A) \in \{0, 1\}$.

On pose $Y_n = \mathbb{E}_{P_\pi} (1_A((X_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}) | \mathcal{F}_n)$ où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$.
 $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une $\mathcal{F}_n$ martingale sous P_π fermée par $1_A((X_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}})$
 et donc $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P_\pi \text{ p.s.}} 1_A((X_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}})$.

Par invariance de A par T , $1_A((X_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}) = 1_A((X_\ell)_{\ell \geq n})$.
 $Y_n = \mathbb{E}_\pi (1_A((X_\ell)_{\ell \geq n}) | \mathcal{F}_n) \stackrel{\text{Markov}}{=} \varphi(X_n)$ où $\varphi(n) = \mathbb{E}_\pi (1_A((X_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}))$.

Sous P_π , $X_n \sim \pi$ et la loi de $\varphi(X_n)$ ne dépend pas de n .
 Soit $Z_n = \sup_{\ell \geq n} \varphi(X_\ell) = \sup_{\ell \geq n} Y_\ell$. On sait que $\varphi(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P_\pi \text{ p.s.}} 1_A((X_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}})$
 $Z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P_\pi \text{ p.s.}} 1_A((X_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}})$

$$\mathbb{P}_\pi(\varphi(X_n) \leq z_n) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_\pi(z_{n+1} \leq z_n) = 1.$$

Sous $\mathbb{P}_\pi$ les lois de $\varphi(X_n)$ et de z_n ne dépendent que de n .
Ces lois sont donc égales à celle de $1_A((X_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{N}})$ leur
seule p.s. (car p.s. $\Rightarrow$ car en loi).

$$\mathbb{P}_\pi(\varphi(X_n) = z_n = z_{n+1}) = 1.$$

Donc $\mathbb{P}_\pi$ p.s. $\varphi(X_n)$ est constante et égale à $1_A((X_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{N}})$.

$$\text{Soit } B = \varphi^{-1}(\{1\}). \quad 1_B(X_0) = 1_A((X_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{N}}) = 1_B(X_1) \cdot \mathbb{P}_\pi \text{ p.s.}$$

et $\mathbb{P}_\pi((X_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{N}} \in A) = \pi(B)$. Supposons $\pi(B) < 1$ et obtenons
une contradiction. On pose $\pi(C|B) = \frac{\pi(C \cap B)}{\pi(B)}$ $\pi(C|B^c) = \frac{\pi(C \cap B^c)}{\pi(B^c)}$

On a $\pi = \pi(B) \times \pi(\cdot|B) + \pi(B^c) \times \pi(\cdot|B^c)$ si on met $\pi(\cdot|B)$
et $\pi(\cdot|B^c)$ sont mutuellement singuliers entraînant l'annulation de π .

$$\pi(C|B) = \frac{\mathbb{E}_\pi(1_{C \cap B}(X_1))}{\pi(B)} = \frac{\mathbb{E}_\pi(1_C(X_1)1_B(X_1))}{\pi(B)} = \frac{\mathbb{E}_\pi(1_C(X_1)1_B(X_0))}{\pi(B)}$$

$$\begin{aligned} \text{when } \pi(C|B^c) &= \pi(\cdot|B^c)P(C). \\ &= \int P(x, c) \frac{1_B(x)}{\pi(B)} \pi(dx) \\ &= \mathbb{E}_{\pi(\cdot|B^c)P(C)} \frac{1_B}{\pi(B)} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{P}_\pi ((x_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}} \in A) \in \{0, 1\}$.

Donc sous $\mathbb{P}_\pi$ l'opération de décalage est ergodique

Donc si $F: E^\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable et tq

$\mathbb{E}_\pi (|F((x_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}})|) < \infty$ alors par thm ergodique de Birkhoff.

$$\mathbb{P}_\pi \left(\frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} F((x_\ell)_{\ell \geq \ell}) \rightarrow \mathbb{E}_\pi (F((x_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}})) \right) = 1.$$

Pour $F((x_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}) = f(x_0)$ avec $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable
tq $\pi(|f|) < +\infty$ on conclut que

$$\mathbb{P}_\pi \left(\frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} f(x_\ell) \rightarrow \pi(f) \right) = 1 \quad \square$$

Thm: Sous (D1) et (D2), $\forall \mu \in \mathcal{P}(E)$, $\mathbb{P}_\mu \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(X_j) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \pi(f) \right) = 1$

pour toute fonction $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable tq $\pi(|f|) < +\infty$
 où π est l'unique proba invariante par P .
 car on a n'importe quelle loi μ pour X_0 et pas seulement π .

preuve: Comme $\mathbb{P}_\mu \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(X_j) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \pi(f) \right) = \int_E \mathbb{P}_x \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(X_j) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \pi(f) \right) \mu(dx)$
 il suffit de montrer le résultat avec $\mu = \delta_x$ pour $x \in E$ quelconque.
 Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé
 $\frac{1}{n} \sum_{j=k}^{n+k-1} f(X_j) = \left(\frac{n+k}{n} \right) \times \frac{1}{n+k} \sum_{j=0}^{n+k-1} f(X_j) = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{k-1} f(X_j) \right) + \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(X_j) \right)$

A la fin les comportements asymptotiques de $\frac{1}{n} \sum_{j=k}^{n+k-1} f(X_j)$ et $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(X_j)$
 lorsque $n \rightarrow +\infty$ sont identiques

$$\mathbb{P}_x \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(X_j) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \pi(f) \right) = \mathbb{P}_x \left(\frac{1}{n} \sum_{j=k}^{n+k-1} f(X_j) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \pi(f) \right) = \int_E \varphi(y) P^k(x, dy)$$

où $\varphi(y) = \mathbb{P}_y \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(X_j) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \pi(f) \right)$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_n \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(X_j) \rightarrow \pi(f) \right) &= \int_{y \in E} \varphi(y) P^k(n, dy) \\
 &= \int_{y \in E} \varphi(y) \pi(dy) + \int_{y \in E} \varphi(y) (P^k(n, dy) - \pi(dy)) \\
 &\geq \underbrace{\mathbb{P}_\pi \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(X_j) \rightarrow \pi(f) \right)}_{=1} - \left| P^k(n, \cdot) (\varphi - \frac{1}{2}) - \pi(\varphi - \frac{1}{2}) \right|
 \end{aligned}$$

d'après la
 prop préc car π est extrémale
 comme unique proba invariante

φ est une proba donc à valeurs
 dans $[0, 1]$ si bien que
 $|\varphi - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$.

$$\geq 1 - \sup_{|\varphi| \leq \frac{1}{2}} |P^k(n, \cdot)(\varphi) - \pi(\varphi)| = 1 - d_{TV}(P^k(n, \cdot), \pi)$$

$$\geq 1 - \frac{d_\beta(P^k(n, \cdot), \pi)}{2} \geq 1 - \frac{\chi^k}{2} d_\beta(\delta_n, \pi)$$

pour $\beta \in]0, \frac{\alpha}{K}[$.

$$\geq 1 - \frac{\chi^k}{2} (\delta_n(1+\beta V) + \pi(1+\beta V))$$

$$\geq 1 - \frac{\chi^k}{2} \left(2 + \beta V(n) + \beta \frac{K}{1-\delta} \right) \xrightarrow{K \rightarrow +\infty} 1$$

IV Théorème de la limite Centrale par moyennes arithmétiques:

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) - n\pi(f) \right). \quad \text{Utilisation de TLC par martingales.}$$

Equation de Poisson: On suppose $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable

$$\text{Eq } \forall x \in E, \quad F(x) - PF(x) = f(x) - \pi(f)$$

$$\text{Alors } Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (f(X_k) - \pi(f)) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (F(X_k) - PF(X_k))$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} (F(X_0) - PF(X_{n-1}))}_{\substack{\text{"martingale"} \\ n \rightarrow \infty}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{(F(X_k) - PF(X_{k-1}))}_{\text{accroissement de martingale.}}$$

$$\mathbb{E}(F(X_k) | \mathcal{F}_{k-1}) \stackrel{\text{Markov}}{=} PF(X_{k-1})$$

$$M_n^F = \sum_{k=1}^{n-1} (F(X_k) - PF(X_{k-1}))$$

$$\langle M^F \rangle_n = \sum_{\ell=1}^{n-1} \mathbb{E} \left(\underbrace{(F(X_\ell) - PF(X_{\ell-1}))^2}_{F^2(X_\ell) - 2F(X_\ell)PF(X_{\ell-1}) + (PF)^2(X_{\ell-1})} \mid \mathcal{F}_{\ell-1} \right)$$

$$PF^2(X_{\ell-1}) - (PF)^2(X_{\ell-1})$$

$$\frac{\langle M^F \rangle_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-2} (PF^2(X_j) - (PF)^2(X_j)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{LFEN ergodique}} \frac{\pi(PF^2) - \pi((PF)^2)}{\pi(P) - \pi(P)} = \pi(F^2) - \pi((PF)^2)$$

D'après TLC pour martingales on s'attend à ce que

$$\zeta_n = \frac{F(X_n) - PF(X_{n-1})}{\sqrt{n}} + \frac{M_n^F}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_1(0, \pi(F^2) - \pi((PF)^2))$$

Prop: Sous (D1) et (D2), pour $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable
 tel $\sup_{x \in E} \frac{|f(x)|}{1+V(x)} < +\infty$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (P^n f - \pi(f))$
 converge normalement pour $\|\cdot\|_1$ vers F et
 F est solution de l'équation de Poisson
 $\forall x \in E \quad F(x) - PF(x) = f(x) - \pi(f)$

NB:
$$P \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} (P^n f - \pi(f)) \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (P^{n+1} f - \pi(f))$$

$$= \sum_{n \geq 1} (P^n f - \pi(f)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (P^n f - \pi(f)) - (f - \pi(f))$$

$$PF = F - (f - \pi(f))$$

Utiliser $\sqrt{V}$ au lieu de V comme fonction de Lyapounov

(D1) $\Rightarrow P\sqrt{V}(x) \leq \sqrt{PV(x)} \stackrel{(D1)}{\leq} \sqrt{\delta} \sqrt{V(x)} + \sqrt{K}$

$\sqrt{V(x)} + \sqrt{V(y)} \leq \sqrt{R} \Rightarrow V(x) + V(y) \leq R$

On veut $\sqrt{R} \geq \frac{2\sqrt{K}}{1-\sqrt{\delta}}$
 ce $R \geq \frac{4K}{(1-\sqrt{\delta})^2}$

$$(D2') \quad \exists R \geq \frac{4K}{(1-\sqrt{8})^2}, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x, y \in E \quad \text{tq} \quad V(x) + V(y) \leq \frac{4K}{(1-\sqrt{8})^2}, \\ P(x, \cdot) \wedge P(y, \cdot)(E) \geq \alpha.$$

Corollaire: Sous (D1) et (D2') si $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable
 | tq $\sup_{x \in E} \frac{|f(x)|}{1 + \sqrt{V(x)}} < +\infty$, alors l'équation de
 | Poisson admet une solution F tq $\pi(F^2) < \infty$.

Thm: Supposons (D1) et (D2'). Alors pour toute fonction
 | $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable tq $\sup_{x \in E} \frac{|f(x)|}{1 + \sqrt{V(x)}} < +\infty$,
 | $\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(X_j) - \pi(f) \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_1(0, \pi(F^2) - \pi(f)^2)$

http: // comics.empc.fr / ~ jordan / MC / MonteCarlo.html

TD 1)

$$i = \text{np.sum}(\underbrace{\text{np.cumsum}(X)}_{\text{général}} < \delta * \underbrace{\text{np.random.random}(1)}_{U \sim \mathcal{U}[0,1]}) \\ (X[0], X[0]+X[1], \dots, X[0]+\dots+X[I-1]).$$

$$\text{Pour } k \in \{0, \dots, I-1\} \quad X[0] + \dots + X[k-1] < \delta * U \leq X[0] + \dots + X[k] \\ \text{avec proba } \frac{X[k]}{\delta}$$

et alors $i = k$

$$j = \text{int}((I-1) * \underbrace{\text{np.random.random}(1)}_{\text{uniforme sur } [0,1]}) \sim \mathcal{U}(\{0, 1, \dots, I-2\})$$

$$j = j + (j \geq i) \sim \mathcal{U}(\{0, \dots, i-1, i+1, i+2, \dots, I-1\}).$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \mathbb{Q}(x, x - e_i + e_j) &= \frac{\pi(x - e_i + e_j) \mathbb{Q}(x - e_i + e_j, x)}{\pi(x) \mathbb{Q}(x, x - e_i + e_j)} \wedge 1 \\ &= \frac{\mu_i(x(i-1)) \mu_j(x(j+1)) \prod_{\ell \in \{i, j\}} \mu_\ell(x(\ell)) \frac{x(j)+1}{\delta(I-1)}}{\mu_i(x(i)) \mu_j(x(j)) \prod_{\ell \in \{i, j\}} \mu_\ell(x(\ell)) \frac{x(i)}{\delta(I-1)}} \wedge 1 \end{aligned}$$

$$3) \quad \alpha(x, x - e_i + e_j) = \frac{(\cancel{x(j)+1}) e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^{x(i)-1}}{(\cancel{x(i)-1})!} e^{-\lambda_j} \frac{\lambda_j^{x(j)+1}}{(\cancel{x(j)+1})!}}{\cancel{x(i)} e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^{x(i)}}{\cancel{x(i)}!} e^{-\lambda_j} \frac{\lambda_j^{x(j)}}{\cancel{x(j)}!}} \wedge 1$$

$$= \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \wedge 1.$$