12/01 pas de cours

19/01 simulation de processus comportant des sauts

26/01 examen a priori en présentiel à l'École des Ponts

02/02 envoi des projets à Bernard Lapeyre

→ partie théorique expliquant les fondements de la méthode numérique implémentée

→ partie résultats numériques avec graphiques et commentaires

→ codes C++ en annexe.

$$\text{EDS}\begin{cases} dX_t^{\in\mathbb{R}^n} = \sigma^{\in\mathbb{R}^{n\times d}}(t, X_t)\, dW_t^{\in\mathbb{R}^d} + b^{\in\mathbb{R}^n}(t, X_t)\, dt & t\in[0,T]. \\ X_0 = y \in\mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$(\text{Lip})\ \exists K<+\infty,\ \forall t\in[0,T],\ \forall x\in\mathbb{R}^n \begin{cases} |b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \le K(1+|x|) \\ \forall y\in\mathbb{R}^n,\ |b(t,x)-b(t,y)| + |\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \le K|x-y| \end{cases}$$

Sous (Lip) l'EDS admet une unique solution d'après Thm d'Itô.

<u>Schéma d'Euler avec $N\in\mathbb{N}^*$ pas</u>

$$t_\ell = \frac{\ell T}{N} \qquad \ell\in\{0,\dots,N\}.$$

$$\bar{X}^N_0 = y \qquad \bar{X}^N_{t_{\ell+1}} = \bar{X}^N_{t_\ell} + \sigma(t_\ell, \bar{X}^N_{t_\ell})(W_{t_{\ell+1}} - W_{t_\ell}) + b(t_\ell, \bar{X}^N_{t_\ell})(t_{\ell+1}-t_\ell)$$

$$\forall t\in[t_\ell, t_{\ell+1}] \quad \bar{X}^N_t = \dots (W_t - W_{t_\ell}) + \dots (t-t_\ell)$$

Sous (tq) ~~ordre~~ et ~~forte~~:

$\exists \alpha \in]0,1]$ $\exists K<+\infty$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall 0 \le s \le t \le T$

$$|\sigma(t,x)-\sigma(s,x)| + |b(t,x)-b(s,x)| \le K(1+|x|)(t-s)^{\alpha}$$

$\forall p \geq 1$, $\exists C_p<+\infty$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall N \in \mathbb{N}^*$

$$\left(\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t - \bar{X}^N_t|^{2p}\right)\right)^{\frac{1}{2p}} \le \frac{C_p}{N^{\beta}} \quad \text{où } \beta = \tfrac{1}{2} \wedge \alpha$$

En particulier si $\alpha \geq \frac{1}{2}$, ordre de convergence forte $\beta = \frac{1}{2}$

ordre faible:

On suppose σ, b C^{∞} avec dérivées bornées $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^{∞} avec dérivées à croissance polynomiale. Alors $\exists (c_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$ tq $\forall L \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}(f(\bar{X}^N_T)) - \mathbb{E}(f(X_T)) = \sum_{\ell=1}^{L} \frac{c_\ell}{N^\ell} + O\left(\frac{1}{N^{L+1}}\right)$$

Prop : Sous les hyp préc, l'EDP $\quad a = \sigma\sigma^*$

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\,\partial^2_{x_i x_j} u(t,x) + b(t,x)\cdot\nabla_x u(t,x) = 0 & (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n \\ u(T,x) = f(x) & x\in\mathbb{R}^n \end{cases}$$

admet une unique solution. Cette solution est C^∞ avec des dérivées à croissance polynomiale

En outre $\boxed{\mathbb{E}(f(X_T)) = u(0,\underbrace{y}_{X_0})}$

éléments de preuve du developpement erreur faible $n=d=1$

$$\mathbb{E}(f(\bar{X}^N_T)) - \mathbb{E}(f(X_T)) = \mathbb{E}(u(T,\bar{X}^N_T)) - \underbrace{u(0,y)}_{\mathbb{E}(u(0,\bar{X}^N_0))}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\mathbb{E}\left(u(t_{k+1},\bar{X}^N_{t_{k+1}}) - u(t_k,\bar{X}^N_{t_k})\right)}_{\xi_k}$$

Itô

$$u(t_{\ell+1}, \bar X^N_{t_{\ell+1}}) - u(t_\ell, \bar X^N_{t_\ell}) = \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \partial_x u(t, \bar X^N_t)\left(\sigma(t_\ell, \bar X^N_{t_\ell})\, dW_t + b(t_\ell, \bar X^N_{t_\ell})\, dt\right)$$

$$+ \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \partial_t u(t, \bar X^N_t)\, dt + \frac{1}{2}\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \partial_{xx} u(t, \bar X^N_t)\, \sigma^2(t_\ell, \bar X^N_{t_\ell})\, dt$$

On pose $\sigma_\ell = \sigma(t_\ell, \bar X^N_{t_\ell})$ $\quad b_\ell = b(t_\ell, \bar X^N_{t_\ell})$.

$$\xi_\ell = \mathbb{E}\left(u(t_{\ell+1}, \bar X^N_{t_{\ell+1}}) - u(t_\ell, \bar X^N_{t_\ell})\right) = \underbrace{\mathbb{E}\left(\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \partial_x u(t, \bar X^N_t)\, \sigma_\ell\, dW_t\right)}_{0}$$

car σ et $\partial_x u$ à $\nearrow$ poly et contrôle des moments du schéma d'Euler par lemme sur moments EDS + schéma fort.

$$+ \mathbb{E}\left(\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} f_\ell(t, \bar X^N_t)\, dt\right)$$

où $f_\ell(t,x) = \partial_t u(t,x) + b_\ell\, \partial_x u(t,x) + \frac{1}{2}\sigma_\ell^2\, \partial_{xx} u(t,x)$.

$$\xi_\ell = \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \mathbb{E}\left(f_\ell(t, \bar X^N_t)\right) dt$$

Itô $\mathbb{E} f_\ell(t, \bar X^N_t) = \cancel{f_\ell(t_\ell, \bar X^N_{t_\ell})} + \cancel{\mathbb{E}\int_{t_\ell}^{t} \sigma_\ell\, \partial_x f_\ell(s, \bar X^N_s)\, dW_s}$

$$+ \mathbb{E}\int_{t_\ell}^{t} \partial_t f_\ell(s, \bar X^N_s) + b_\ell\, \partial_x f_\ell(s, \bar X^N_s) + \frac{1}{2}\sigma_\ell^2\, \partial_{xx} f_\ell(s, \bar X^N_s)\, ds$$

On $f_\ell(t_\ell, \bar X^N_{t_\ell}) = 0$

$$\xi_\ell = \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} (t_{\ell+1} - s)\, \mathbb{E}\left(\partial_t f_\ell(s, \bar X^N_s) + b_\ell\, \partial_x f_\ell(s, \bar X^N_s) + \frac{1}{2}\sigma_\ell^2\, \partial_{xx} f_\ell(s, \bar X^N_s)\right) ds$$

espérance bornée par C ne dépendant pas de s

$$|\xi_\ell| \le C\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} (t_{\ell+1}-s)\,ds = \frac{C}{2}(t_{\ell+1}-t_\ell)^2 = \frac{CT^2}{2N^2}$$

$$\left|\mathbb{E}(f(\bar X^N_T)) - \mathbb{E}(f(X_T))\right| \le \sum_{\ell=0}^{N-1}|\xi_\ell| \le \frac{CT^2}{2N}$$

donc ordre 1 de convergence de l'erreur faible.

Pour $s\in[t_\ell,t_{\ell+1}]$,

$$\partial_t f_\ell(s,\bar X^N_s) + b_\ell\,\partial_x f_\ell(s,\bar X^N_s) + \frac12\sigma_\ell^2\,\partial_{xx} f_\ell(s,\bar X^N_s)$$

$$\begin{aligned}\simeq\ & \partial^2_{tt}u(t_\ell,\bar X^N_{t_\ell}) + b_\ell\,\partial^2_{tx}u(t_\ell,\bar X^N_{t_\ell}) + \frac12\sigma_\ell^2\,\partial^3_{txx}u(t_\ell,\bar X^N_{t_\ell})\\ &+ b_\ell\,\partial^2_{tx}u(t_\ell,\bar X^N_{t_\ell}) + b_\ell^2\,\partial^2_{xx}u(t_\ell,\bar X^N_{t_\ell}) + \frac12 b_\ell\sigma_\ell^2\,\partial^3_{xxx}u(t_\ell,\bar X^N_{t_\ell})\\ &+ \frac12\sigma_\ell^2\,\partial^3_{txx}u(t_\ell,\bar X^N_{t_\ell}) + \frac12 b_\ell\sigma_\ell^2\,\partial^3_{xxx}u(t_\ell,\bar X^N_{t_\ell}) + \frac14\sigma_\ell^4\,\partial^4_{xxxx}u(t_\ell,\bar X^N_{t_\ell})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(\bar X^N_T)) - \mathbb{E}(f(X_T)) \simeq\ & \frac12\left(\frac{T}{N}\right)^2\sum_{\ell=0}^{N-1}\mathbb{E}\Big(\partial^2_{tt}u(t_\ell,X_{t_\ell}) + 2b(t_\ell,X_{t_\ell})\,\partial^2_{tx}u(t_\ell,X_{t_\ell})\\ &+ \sigma^2(t_\ell,X_{t_\ell})\,\partial^3_{txx}u(t_\ell,X_{t_\ell}) + b^2(t_\ell,X_{t_\ell})\,\partial^2_{xx}u(t_\ell,X_{t_\ell}) + b\sigma^2\,\partial^3_{xxx}u(t_\ell,X_{t_\ell})\\ &+ \frac14\sigma^4\,\partial^4_{xxxx}u(t_\ell,X_{t_\ell})\Big)\\ \simeq\ & \underbrace{\frac{T}{2N}\int_0^1\mathbb{E}\Big(\partial^2_{tt}u(t,X_t) + 2b\,\partial^2_{tx}u(t,X_t) + \sigma^2\,\partial^3_{txx}u(t,X_t) + b^2\,\partial^2_{xx}u(t,X_t) + b\sigma^2\,\partial^3_{xxx}u(t,X_t) + \frac{\sigma^4}{4}\,\partial^4_{xxxx}u(t,X_t)\Big)\,dt}_{C_1}\end{aligned}$$

Commentaires :

Bally Talay $\mathbb{E}(f(\overline{X}^N_T)) - \mathbb{E}(f(X_T)) = \frac{C_1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$ (*) dès que f mesurable bornée si $\sigma(x)$ et $b(x)$ sont C^∞ à dérivées bornées et satisfont une condition de non dégénerescence qui assure que X_T possède une densité C^∞

uniforme ellepticité ie $\exists\, \varepsilon > 0, \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n, \xi^* \sigma\sigma^*(x)\xi \geq \varepsilon |\xi|^2$

a

$\Rightarrow$ non dégénerescence.

Sous uniforme ellepticité Guyon a montré (*) lorsque f est une distribution tempérée $\mathbb{E}(f(X_T))$ et $\mathbb{E}(f(\overline{X}^N_T))$ s'interprétant comme l'action de cette distribution sur les densités de X_T ou $\overline{X}^N_T$.

Alfonsi Corbetta J $n = d = 1$

pour $F : \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R})$ Lipschitz pour la norme sup $\forall \varepsilon > 0, \exists\, C_\varepsilon < \infty, \forall N \geq 1$

$$\left|\mathbb{E}\left(F\left((X_t)_{t\in[0,T]}\right)\right) - \mathbb{E}\left[F\left((\overline{X}^N_t)_{t\in[0,T]}\right)\right]\right| \leq \frac{C_\varepsilon}{N^{\frac{2}{3}-\varepsilon}}$$

si b C^3 σ C^4 bornées ainsi que leur dérivées et $\inf_{x\in\mathbb{R}} \sigma^2(x) > 0$!

III Le schéma de Milstein : Améliorer l'ordre de cv forte

1) dimension $n=d=1$

$$dX_t = \sigma(X_t)\,dW_t + b(X_t)\,dt$$

Pour $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $X_t = X_{t_k} + \int_{t_k}^t \sigma(X_s)\,dW_s + \int_{t_k}^t b(X_s)\,ds$

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_{t_k}^t \sigma(X_s)\,dW_s\right)^2\right) \overset{\text{isométrie}}{=} \mathbb{E}\left(\int_{t_k}^t \sigma^2(X_s)\,ds\right) = O(t-t_k)$$

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_{t_k}^t b(X_s)\,ds\right)^2\right) \overset{\text{C.S.}}{\leq} \mathbb{E}\left((t-t_k)\int_{t_k}^t b^2(X_s)\,ds\right) = O((t-t_k)^2)$$

Pour améliorer la discrétisation on doit se concentrer sur l'intég stoch.

$$\sigma(X_s) \simeq \sigma(X_{t_k}) + \sigma'(X_{t_k})(X_s - X_{t_k}) \simeq \sigma(X_{t_k}) + \sigma'(X_{t_k})\int_{t_k}^s \sigma(X_u)\,dW_u$$

$$\simeq \sigma(X_{t_k}) + \sigma\sigma'(X_{t_k})(W_s - W_{t_k})$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma(X_s)\,dW_s \simeq \sigma(X_{t_k})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + \sigma\sigma'(X_{t_k})\int_{t_k}^{t_{k+1}}(W_s - W_{t_k})\,dW_s$$

$$= \frac{1}{2}\left(W_{t_{k+1}}^2 - W_{t_k}^2 - (t_{k+1}-t_k)\right) - W_{t_k}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) = \frac{1}{2}\left((W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 - (t_{k+1}-t_k)\right)$$

$$\tilde{X}^N_0 = y$$

$$\tilde{X}^N_{t_{\ell+1}} = \tilde{X}^N_{t_\ell} + \sigma(\tilde{X}^N_{t_\ell})(W_{t_{\ell+1}} - W_{t_\ell}) + b(\tilde{X}^N_{t_\ell})(t_{\ell+1} - t_\ell) + \frac{1}{2}\sigma\sigma'(\tilde{X}^N_{t_\ell})\left((W_{t_{\ell+1}} - W_{t_\ell})^2 - (t_{\ell+1} - t_\ell)\right)$$

$t \in [t_\ell, t_{\ell+1}]$ $\tilde{X}^N_t =$ W_t t W_t t

<u>Thm</u> : On suppose que σ, b sont C^2 à dérivées bornées.

$$\forall p \geq 1,\ \exists C_p < +\infty,\ \forall N \geq 1,\ \left(\mathbb{E}\left(\sup_{t \in [0,T]} |X_t - \tilde{X}^N_t|^{2p}\right)\right)^{\frac{1}{2p}} \leq \frac{C_p}{N}$$

En outre $\forall \gamma < 1$, $N^\gamma \sup_{t \in [0,T]} |X_t - \tilde{X}^N_t| \xrightarrow[N \to +\infty]{p.s.} 0$.

<u>NB</u> : Si σ constante, $\sigma' = 0$ et Milstein $=$ Euler si bien que l'ordre de cv forte d'Euler est 1.

2) <u>cas général</u> :

$1 \le i \le n \qquad 1 \le j \le d$

$$\sigma_{ij}(X_s) \simeq \sigma_{ij}(X_{t_\varepsilon}) + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_l}(X_{t_\varepsilon}) \underbrace{(X_s^l - X_{t_\varepsilon}^l)}_{\simeq \sum_{m=1}^{d} \sigma_{lm}(X_{t_\varepsilon})(W_s^m - W_{t_\varepsilon}^m)}$$

On note $\sigma_j = \begin{pmatrix} \sigma_{1j} \\ \vdots \\ \sigma_{nj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ la j ème colonne de $\sigma \in \mathbb{R}^{n\times d}$

et $\partial \sigma_j = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_l} \right)_{1 \le i, l \le n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\sigma_j(X_s) \simeq \sigma_j(X_{t_\varepsilon}) + \sum_{m=1}^{d} \overbrace{\partial \sigma_j}^{\in \mathbb{R}^{n\times n}} \overbrace{\sigma_m(X_{t_\varepsilon})}^{\in \mathbb{R}^n} (W_s^m - W_{t_\varepsilon}^m) \cdot$$

vient multiplier dW_s^j

$\tilde{X}_0^N = y$

$$\tilde{X}_{t_{\varepsilon+1}}^N = \tilde{X}_{t_\varepsilon}^N + \sigma(\tilde{X}_{t_\varepsilon}^N)(W_{t_{\varepsilon+1}} - W_{t_\varepsilon}) + b(\tilde{X}_{t_\varepsilon}^N)(t_{\varepsilon+1} - t_\varepsilon)$$
$$+ \sum_{j,m=1}^{d} \partial \sigma_j \sigma_m (\tilde{X}_{t_\varepsilon}^N) \underbrace{\int_{t_\varepsilon}^{t_{\varepsilon+1}} (W_s^m - W_{t_\varepsilon}^m)\, dW_s^j}_{\text{Comment simuler cette integ pour } j \neq m ?}$$

→ même thm de cv qu'en dimension $n = d = 1$

→ si σ constante, Euler = Milstein

On sait simuler le schéma de Milstein sous la condition de commutativité

$$\forall\, 1 \leq j, m \leq d, \quad \partial\sigma_j \sigma_m = \partial\sigma_m \sigma_j$$

ie $\forall\, 1 \leq i \leq n$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\displaystyle\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_l} \sigma_{lm}(x) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{im}}{\partial x_l} \sigma_{lj}(x)$

En effet pour $j \neq m$ $\displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}} (W_s^m - W_{t_k}^m)\, dW_s^j + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (W_s^j - W_{t_k}^j)\, dW_s^m$

$$\underset{\text{IPP}}{=} (W_{t_{k+1}}^m - W_{t_k}^m)(W_{t_{k+1}}^j - W_{t_k}^j)$$

Sous la condition de commutativité

$$\tilde{X}_{t_{k+1}}^N = \tilde{X}_{t_k}^N + \sigma(\tilde{X}_{t_k}^N)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + b(\tilde{X}_{t_k}^N)(t_{k+1} - t_k)$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{j,m=1}^{d} \partial\sigma_j \sigma_m (\tilde{X}_{t_k}^N) \left((W_{t_{k+1}}^m - W_{t_k}^m)(W_{t_{k+1}}^j - W_{t_k}^j) - 1_{\{j=m\}}(t_{k+1} - t_k) \right)$$

$\boxed{\text{http://cermics.enpc.fr/~jourdain/MC/MonteCarlo.html}}$

$\boxed{TD}$ $dS_t = \sigma S_t \, dW_t + r S_t \, dt$

$\sigma(x) = \sigma x \qquad b(x) = rx$

$\sigma'(x)\sigma(x) = \sigma^2 x$

$S_{t_{k+1}} = S_0 e^{\sigma W_{t_{k+1}} + (r - \frac{\sigma^2}{2}) t_{k+1}}$

$= \underbrace{S_0 e^{\sigma W_{t_k} + (r-\frac{\sigma^2}{2}) t_k}}_{S_{t_k}} e^{\sigma (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(t_{k+1} - t_k)}$

$S_{t_{k+1}} = S_{t_k} e^{\sigma (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(t_{k+1} - t_k)}$

$t_{k+1} - t_k = \frac{T}{N}$ car $t_j = j\frac{T}{N}$

$S^e_{t_{k+1}} = S^e_{t_k} \left(1 + \sigma (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + r (t_{k+1} - t_k)\right)$

$S^m_{t_{k+1}} = S^m_{t_k} \left(1 + \sigma (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + r(t_{k+1} - t_k) + \frac{\sigma^2}{2}\left((W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 - (t_{k+1} - t_k)\right)\right)$

$\mathbb{E}\left(e^{-rT}(K - S^e_T)^+\right) - \underbrace{\mathbb{E}\left(e^{-rT}(K - S_T)^+\right)}_{BS}$

$\simeq \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} (K - S^{e,i}_T)^+ - BS \longrightarrow \mathrm{Var} \simeq \frac{1}{M} \mathrm{Var}\left((K - S_T)^+\right)$

$\simeq \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \left((K - S^{e,i}_T)^+ - (K - S^i_T)^+\right) \longrightarrow \mathrm{Var} \simeq \frac{1}{M} \underbrace{\mathrm{Var}\left((K - S^{e,i}_T)^+ - (K - S^i_T)^+\right)}_{\leq \mathbb{E}(|S^{e,i}_T - S^i_T|^2) \leq \frac{C}{N}}$

erreur relative sans variable de contrôle

$$\frac{\sqrt{c/M}}{\tilde{c}/N} = \Theta\left(\frac{N}{\sqrt{M}}\right)$$

avec variable de contrôle

$$\frac{\sqrt{c/(MN)}}{\tilde{c}/N} = \Theta\left(\sqrt{\frac{N}{M}}\right)$$

Pour Milstein avec variable de contrôle

$$\frac{\sqrt{c/(MN^2)}}{\tilde{c}/N} = \Theta\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)$$